УДК 544.27

И.Г. Ахмерова

Разрешимость краевой задачи для уравнений одномерного движения двухфазной несжимаемой жидкости*

I.G. Akhmerova

Solvability of Boundary Problem for the Equation of Two-phase Incompressible Liquid One-dimensional Movement

Для системы уравнений одномерного нестационарного движения теплопроводной смеси вязких несжимаемых жидкостей доказана локальная разрешимость начально-краевой задачи с неоднородными условиями.

Ключевые слова: двухфазная смесь, взаимопроникающее движение, разрешимость.

The local solvability of initial-boundary problem with heterogeneous conditions is proved for the system of equations of one-dimensional nonstationary movement of heat-conducting mixture of viscous incompressible liquids.

Key words: two-phase mixture, interpenetrating movements, solvability.

1. Постановка задачи и формулировка основного результата. В работе изучается следующая квазилинейная система уравнений составного типа:

$$\frac{\partial(\rho_i^0 s_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i^0 s_i v_i) = 0, \quad i = 1, 2, \tag{1}$$

$$\rho_i^0 s_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_i \ s_i \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) =$$

$$= -s_i \frac{\partial p_i}{\partial x} + \varphi_i + \rho_i^0 s_i g, \tag{2}$$

$$s_1 + s_2 = 1, \quad \varphi_1 = K(v_2 - v_1),$$

$$\varphi_2 = -\varphi_1, \quad p_1 - p_2 = p_c(s_1, \theta), \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{2} c_i \rho_i^0 s_i (\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_i \frac{\partial \theta}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(\chi(s_1) \frac{\partial \theta}{\partial x}), \tag{4}$$

решаемая в области $(x,t) \in Q_T = \Omega \times (0,T)$, $\Omega = (0,1)$. Здесь v_i, s_i, p_i – соответственно скорость, объемная концентрация и давление i-й фазы; θ – абсолютная температура среды ($\theta_1 = \theta_2 = \theta$); g – ускорение силы тяжести; постоянные $\rho_i^0 > 0$, $\mu_i > 0$, $c_i > 0$ – соответственно истинная плотность, коэффициент динамической вязкости и теплоемкость i-й фазы при постоянном объеме; коэффициент взаимодействия фаз $K(s_1)$, коэффициент теплопроводности смеси $\chi(s_1)$ и разность давлений $p_c(s_1, \theta)$ – заданные функции. Искомыми являются функции $(s_i(x,t), v_i(x,t), p_i(x,t), \theta(x,t))$.

Система (1)–(4) дополняется начально-краевыми условиями:

$$v_i \mid_{x=0} = a_i(t), \quad v_i \mid_{x=1} = b_i(t),$$

$$v_i \mid_{t=0} = v_i^0(x), \quad s_1 \mid_{t=0} = s_1^0(x), \tag{5}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} \mid_{x=0} = \theta_1(t), \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} \mid_{x=1} = \theta_2(t), \qquad \theta \mid_{t=0} = \theta^0(x).$$

Для данной системы рассматривается два варианта граничных условий: $a_i(t) = b_i(t) = a(t)$ и $v_1 \mid_{x=0} = a_1(t)$, $v_1 \mid_{x=1} = b_1(t)$, $v_2 \mid_{x=0,x=1} = 0$. Заметим, что из уравнений (1) с учетом равенства $s_1 + s_2 = 1$ вытекает соотношение $s_1 v_1 + s_2 v_2 = h(t)$, справедливое для произвольной функции $h(t)$, $t \in [0,T]$. В первом варианте граничных условий функция $h(t) = a(t)$, т.е. предполагается известной, а во втором варианте – $h(t) = s(0,t) a_1(t)$ и является неизвестной функцией.

Дополнительное условие для однозначного определения $p_1(x,t)$ берется в виде

$$\int_0^1 p_1(x,t) dx = 0. \tag{6}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 гг.)» (код проекта №2.2.2.4/4278), а также при поддержке федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 гг.» (государственные контракты №14.740.11.0355, №14.740.11.0878).

Относительно функций $s^0(x)$, $\theta^0(x)$ предполагается выполнение неравенств следующего вида:

$$0 < m_0 \le s^0(x) \le M_0 < 1, \qquad 0 < k_1^{-1} \le \theta^0(x) \le k_1 < \infty \tag{7}$$

для всех $x \in [0,1]$ и при фиксированных постоянных m_0, M_0, k_1.

Определение 1. Обобщенным решением задачи (1)–(6) называется совокупность функций $(s_i(x,t),\ v_i(x,t),\ p_i(x,t),\ \theta(x,t))$, $i = 1,2$ из пространств

$$s_i \in L_\infty(0,T; W_2^1(\Omega)), \quad \frac{\partial s_i}{\partial t} \in L_2(Q_T),$$

$$(v_i, \theta) \in L_\infty(0,T; W_2^1(\Omega)) \cap L_2(0,T; W_2^2(\Omega)),$$

$$p_i \in L_\infty(0,T; W_2^1(\Omega)),$$

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}, \frac{\partial \theta}{\partial t}, \frac{\partial p_i}{\partial x}\right) \in L_2(Q_T),$$

$$\Omega = (0,1), \quad Q_T = \Omega \times (0,T),$$

удовлетворяющих уравнениям (1)–(4) и неравенствам $0 < s < 1$, $0 < \theta < \infty$ почти всюду в Q_T и принимающих заданные граничные и начальные значения в смысле следов функций из указанных классов.

Определение 2. Классическим решением задачи (1)–(4) называется совокупность функций $(v_i(x,t), s_i(x,t), p_i(x,t), \theta(x,t))$, $i = 1,2$, если они обладают непрерывными производными, входящими в уравнения (1)–(4), и удовлетворяют уравнениям, начальным и граничным условиям как непрерывные в $\overline{Q}_T$ функции.

Теорема 1. Пусть данные задачи (1)–(6) удовлетворяют следующим условиям гладкости

$$(v_i^0,\ \theta^0) \in W_2^1(\Omega), \quad s^0 \in W_2^2(\Omega),$$

$$g \in L_2(0,T; W_2^1(\Omega)),$$

$$(\theta_i, a_i, b_i) \in W_2^1(0,T)$$

и условиям согласования:

$$v_i^0(0) = a_i(0), \quad v_i^0(1) = b_i(1), \quad i = 1,2;$$

$$\frac{\partial \theta^0(x)}{\partial x}\,|_{x=0} = \theta_1(0), \quad \frac{\partial \theta^0(x)}{\partial x}\,|_{x=1} = \theta_2(1).$$

Пусть $K(s_1)$, $p_c(s_1,\theta)$, $\chi(s_1)$ – достаточно гладкие функции своих аргументов, удовлетворяющие следующим условиям:

$$K(s_1) = K_0(s_1)(s_1 s_2)^q,$$

$$0 < k_0^{-1} \le K_0(s_1) \le k_0 = const,$$

$$k_1^{-1}(s_1 s_2)^{q_1} \le \chi(s_1) \le k_1 (s_1 s_2)^{q_1},$$

$$k_1^{-1}(s_1 s_2)^{q_1 - 1} \le \frac{d\chi(s_1)}{ds_1} \le k_1 (s_1 s_2)^{q_1 - 1},$$

$$|\frac{\partial p_c(s_1,\theta)}{\partial s_1}| \le k_1 (s_1 s_2)^{q_2} |\theta|^{q_3},$$

$$|\frac{\partial p_c(s_1,\theta)}{\partial \theta}| \le k_1 (s_1 s_2)^{q_4} |\theta|^{q_5},$$

$$|\frac{\partial^2 p_c(s_1,\theta)}{\partial s_1^2}| \le k_1 (s_1 s_2)^{q_6} |\theta|^{q_7},$$

$$|\frac{\partial^2 p_c(s_1,\theta)}{\partial \theta^2}| \le k_1 (s_1 s_2)^{q_8} |\theta|^{q_9},$$

$$|\frac{\partial^2 p_c(s_1,\theta)}{\partial s_1 \partial \theta}| \le k_1 (s_1 s_2)^{q_{10}} |\theta|^{q_{11}},$$

где $k_1 = const > 0$, $q, q_1, ..., q_{11}$ – фиксированные вещественные параметры, причем $q_3 \ge 0$, $q_5 \ge 0$, $q_7 \ge 0$, $q_9 \ge 0$, $q_{11} \ge 0$.

Если выполнены условия (7), то существует достаточно малое значение $t_0 > 0$, $t_0 \in (0,T)$ такое, что для всех $t \in (0,t_0)$ существует единственное обобщенное решение $(s_i,\ v_i,\ p_i,\ \theta)$ задачи (1)–(6).

Если дополнительно:

$$g \in C^{1+\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_T), \quad (s^0, v_i^0, \theta^0) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}),$$

$$v_i^0(0) = a_i(0), \quad v_i^0(1) = b_i(1), \quad i = 1,2,$$

$$\frac{\partial \theta^0(x)}{\partial x}\,|_{x=0} = \theta_1(0), \quad \frac{\partial \theta^0(x)}{\partial x}\,|_{x=1} = \theta_2(1),$$

коэффициенты $K(s_1)$ и $\chi(s_1)$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов, то в Q_{t_0} существует единственное классическое решение задачи, удовлетворяющее условиям

$$s_i \in C^{1+\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_{t_0}), \quad (\,v_i,\ \theta) \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_{t_0}),$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial x} \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_{t_0}),$$

причем найдутся числа $0 < m^{(2)} < M^{(2)} < 1$, $0 < m^{(3)} < M^{(3)} < \infty$, такие, что

$$0 < m^{(2)} \le s_1(x,t) \le M^{(2)} < 1,$$

$$0 < m^{(3)} \le \theta(x,t) \le M^{(3)} < \infty, \quad (x,t) \in \overline{Q}_{t_0}.$$

2. Локальная разрешимость. Следуя [2, 3] приходим к следующей задаче для $s(x,t) \equiv s_1(x,t)$, $u(x,t) = \beta_1 v_1(x,t) - \beta_2 v_2(x,t)$, $p_1(x,t)$, $\theta(x,t)$, $R(x,t)$:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(a(s)u + \frac{\beta_2 s h}{a_\mu}\right) = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{a_\rho}{a_\mu}u)+a_1(s)u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}a_1'(s)u^2\frac{\partial s}{\partial x}-$$

$$-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\nu\frac{a'(s)}{a(s)}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial x}-\nu\frac{a''(s)}{2a(s)}u(\frac{\partial s}{\partial x})^2+ \qquad (9)$$

$$+\frac{K}{\rho^0 a(s)a_\mu^2}u-\frac{1}{\rho^0}\frac{\partial p_c}{\partial x}-g_0-G_1=0,$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\mu_1 s\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1-s}{a_\mu(s)}u)-\mu_2(1-s)\frac{\partial}{\partial x}(\frac{s}{a_\mu(s)}u)-$$

$$-\rho^0\frac{a_\rho(s)}{a_\mu(s)}a(s)u^2)-(\rho_1^0-\rho_2^0)\frac{\partial}{\partial t}(a(s)u)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}(\mu_1 s\beta_2\frac{\partial}{\partial x}(\frac{h}{a_\mu(s)})+\mu_2(1-s)\beta_1\frac{\partial}{\partial x}(\frac{h}{a_\mu(s)})-$$

$$-\frac{2\rho_1^0 a(s)\beta_2 hu}{a_\mu}+\frac{2\rho_2^0 a(s)\beta_1 hu}{a_\mu}-\rho_1^0 s(\frac{\beta_2 h}{a_\mu})^2-$$

$$-\rho_2^0(1-s)(\frac{\beta_1 h}{a_\mu})^2)-\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\rho_1^0 s\beta_2 h}{a_\mu}+\frac{\rho_2^0(1-s)\beta_1 h}{a_\mu})+$$

$$+\rho^0 a_\rho(s)g+(1-s)\frac{\partial p_c}{\partial x}, \qquad (10)$$

$$\chi_0(s)\frac{\partial\theta}{\partial t}+c_0 a(s)u\frac{\partial\theta}{\partial x}+$$

$$+\chi_0(s)(\beta_1+\beta_2)\frac{h}{a_\mu}\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\chi(s)\frac{\partial\theta}{\partial x}), \qquad (11)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t}+U(s,u)\frac{\partial R}{\partial x}=-\frac{1}{2\mu}a''(s)a(s)uR\,(R-b(s)u)-$$

$$-\frac{K}{a(s)a_\mu^2}u-\frac{\delta}{\mu}\frac{a(s)}{a_\mu^2}u\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\beta_1(1-s)-\beta_2 s}{\mu a_\mu^2}u(R-b(s)u)\right)+$$

$$+\rho^0 g_0-\frac{\partial p_c}{\partial x}+hG_2\equiv f_1(s,u,R), \qquad (12)$$

в которой введены следующие обозначения

$$\beta_i=\frac{\mu_i}{\mu},\quad \mu=\mu_1+\mu_2,\quad \alpha_i=\frac{\rho_i^0}{\rho^0},\quad i=1,2,$$

$$a(s)=\frac{s(1-s)}{a_\mu},\quad a_\mu(s)=\beta_1(1-s)+\beta_2 s,$$

$$\nu=\mu/\rho^0,\quad \rho^0=\rho_1^0+\rho_2^0,\quad a_\rho(s)=\alpha_1(1-s)+\alpha_2 s;$$

$$a_1(s)=\frac{\alpha_1(1-s)^2-\alpha_2 s^2}{a_\mu^2},\quad a_1'(s)\equiv\frac{da_1}{ds},$$

$$\chi_0(s)=c_1\rho_1^0 s+c_2\rho_2^0(1-s),\quad c_0=c_1\rho_1^0-c_2\rho_2^0,$$

$$R(x,t)=R_1(x,t)-R_2(x,t),\ R_i(x,t)=\rho_i^0 v_i+\frac{\mu_i}{s_i}\frac{\partial s_i}{\partial x},$$

$$b(s)\equiv\rho^0\frac{a_\rho}{a_\mu},\quad \delta=\mu_2\rho_1^0-\mu_1\rho_2^0,\quad g_0\equiv(\alpha_1-\alpha_2)g,$$

$$U(s,u)\equiv a'(s)u-\frac{\beta_1\beta_2 h}{a_\mu},$$

$$G_1=\frac{\rho_2^0}{\rho^0}[\beta_1\frac{\partial}{\partial t}(\frac{h}{a_\mu})-su\beta_1\frac{\partial}{\partial x}(\frac{h}{a_\mu})+\beta_1(\frac{h}{a_\mu})\frac{\partial}{\partial x}(\frac{-su}{a_\mu})$$

$$+\frac{\beta_1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{h}{a_\mu})^2]-\frac{\rho_1^0}{\rho^0}[\beta_2\frac{\partial}{\partial t}(\frac{h}{a_\mu})-(1-s)u\beta_2\frac{\partial}{\partial x}(\frac{h}{a_\mu})+$$

$$+\beta_2(\frac{h}{a_\mu})\frac{\partial}{\partial x}(\frac{(1-s)u}{a_\mu})+\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{h}{a_\mu})^2]+\frac{\beta_2 h}{s}\cdot$$

$$\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_1 s\frac{(\beta_1-\beta_2)}{a_\mu^2}\frac{\partial s}{\partial x}\right)-\frac{\beta_1 h}{1-s}\cdot$$

$$\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\mu_2(1-s)\frac{(\beta_1-\beta_2)}{a_\mu^2}\frac{\partial s}{\partial x})+\frac{Kh(\beta_1-\beta_2)}{\rho^0 s(1-s)a_\mu},$$

$$G_2=\frac{K}{a_\mu}(\beta_1-\beta_2)+(\frac{(1-s)\beta_1\delta}{a_\mu\mu})u\frac{\partial}{\partial x}(\frac{a(s)}{sa_\mu})-$$

$$-(\frac{(1-s)\beta_2\rho_1^0}{a_\mu})u\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{a_\mu})-(\frac{\beta_2\delta}{a_\mu\mu})\frac{\partial}{\partial x}(\frac{a(s)u}{a_\mu})-$$

$$-(\frac{s\beta_1\rho_2^0}{a_\mu})u\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{a_\mu})-(\frac{s\beta_2\delta}{a_\mu\mu})u\frac{\partial}{\partial x}(\frac{a(s)}{(1-s)a_\mu})+$$

$$+(\frac{\beta_1\delta}{a_\mu\mu})\frac{\partial}{\partial x}(\frac{a(s)u}{a_\mu})+h[(\frac{\beta_2^2\rho_1^0}{a_\mu})\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{a_\mu})+$$

$$+(\frac{\beta_2\beta_1\delta}{a_\mu\mu})\frac{\partial}{\partial x}(\frac{a(s)}{sa_\mu})+(\frac{\beta_1^2\rho_2^0}{a_\mu})\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{a_\mu})+$$

$$+(\frac{\beta_2\beta_1\delta}{a_\mu\mu})\frac{\partial}{\partial x}(\frac{a(s)}{(1-s)a_\mu})].$$

Таким образом, искомые $s(x,t)$, $u(x,t)$, $p_1(x,t)$, $\theta(x,t)$, $R(x,t)$ удовлетворяют системе уравнений (8)–(12) и условиям

$$u\mid_{x=0}=\beta_1 a_1(t)-\beta_2 a_2(t),$$

$$u\mid_{x=1}=\beta_1 b_1(t)-\beta_2 b_2(t),$$

$$u\mid_{t=0}=u^0(x),\quad \theta\mid_{t=0}=\theta^0(x),$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}\mid_{x=0}=\theta_1(t),\quad \frac{\partial\theta}{\partial x}\mid_{x=1}=\theta_2(t),$$

$$s\mid_{t=0}=s^0(x),\quad \int\limits_0^1 p_1(x,t)dx=0, \qquad (13)$$

$$R\mid_{t=0}=\frac{\mu}{a(s^0(x))}\frac{\partial s^0(x)}{\partial x}+b(s^0(x))u^0(x)+$$

$$+\frac{\delta}{\mu}\frac{h(0)}{a_\mu(s^0(x))}\equiv R^0(x).$$

2.1. Построение галеркинских приближений. Уравнения (8)–(12) представим в виде

$$\frac{\partial s}{\partial t}=-a'(s)u((R-b(s)u)\frac{a(s)}{\mu}-\frac{a(s)h\delta}{a_\mu\mu^2})-$$

$$-\frac{\beta_1\beta_2 h}{a_\mu^2}((R-b(s)u)\frac{a(s)}{a_\mu}-\frac{a(s)h\delta}{a_\mu\mu^2})-$$

$$-a(s)\frac{\partial u}{\partial x}\equiv f_2(u,s,R), \qquad (14)$$

$$L_1(s,u,R,\theta)\equiv\frac{\partial u}{\partial t}-\nu\frac{\partial}{\partial x}\left(b_0(s)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+$$

$$+b_1(s)u\left(R-b(s)u\right)^2+b_2(s)u\frac{\partial u}{\partial x}+$$

$$+b_3(s)u^2\left(R-b(s)u\right)+b_4(s)\frac{\partial u}{\partial x}\left(R-b(s)u\right)+$$

$$+b_5(s)u-b_6(s,\theta)(R-b(s)u)-$$

$$-b_7(s,\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x}-b_0(s)g_0-hG_3=0, \qquad (15)$$

$$L_2(s,u,R,\theta)\equiv\frac{\partial\theta}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(b_9(s)\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)+$$

$$+b_8(s)u\frac{\partial\theta}{\partial x}-b_{10}(s)\left(R-b(s)u\right)\frac{\partial\theta}{\partial x}+$$

$$(b_{11}(s)+b_{12}(s))\frac{\partial\theta}{\partial x}=0, \qquad (16)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t}+U(s,u)\frac{\partial R}{\partial x}=-\frac{1}{2\mu}a''(s)a(s)uR\cdot$$

$$\cdot(R-b(s)u)-\frac{K}{a(s)a_\mu^2}u-\frac{\delta}{\mu}\frac{a(s)}{a_\mu^2}u\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\beta_1(1-s)-\beta_2 s}{\mu a_\mu^2}u(R-b(s)u)\right)+$$

$$+\rho^0 g_0-\frac{\partial p_c}{\partial x}+hG_2\equiv f_1(s,u,R). \qquad (17)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$b_0(s)=\frac{a_\mu(s)}{a_\rho(s)},\quad b_1(s)=\frac{\beta_1\beta_2}{\rho^0\mu}\frac{a(s)}{a_\rho a_\mu^2(s)},$$

$$b_2(s)=a_2(s),\ a_2(s)=b_0(s)a_1(s)+a(s)\frac{b_0'(s)}{b_0(s)},$$

$$b_3(s)=a_3(s)\frac{a(s)}{\mu},\ a_3(s)=\frac{1}{2}a_1'(s)b_0(s)+a'(s)\frac{b_0'(s)}{b_0(s)},$$

$$b_4(s)=-\frac{a(s)}{\mu}(b_0(s)\frac{a'(s)}{a(s)}-b_0'(s)),$$

$$b_5(s)=\frac{Kb_0(s)}{\rho^0 a(s)a_\mu^2(s)},b_6(s,\theta)=\frac{b_0(s)}{\rho^0}\frac{a(s)}{\mu}\frac{\partial p_c(s,\theta)}{\partial s},$$

$$b_7(s,\theta)=\frac{b_0(s)}{\rho^0}\frac{a(s)}{\mu}\frac{\partial p_c(s,\theta)}{\partial\theta},\quad b_8(s)=c_0\frac{a(s)}{\chi_0(s)},$$

$$b_9(s)=\frac{\chi(s)}{\chi_0(s)},\quad b_{10}(s)=-c_0\frac{\chi(s)}{\chi_0^2(s)}\frac{a(s)}{\mu},$$

$$b_{11}(s)=\chi_0(s)(\beta_1+\beta_2)\frac{h}{a_\mu(s)},\quad b_{12}(s)=\frac{a(s)h\delta}{a_\mu(s)\mu^2},$$

$$G_3=\frac{b_0'(s)}{b_0^2(s)}\left(\frac{a'(s)a(s)u\delta}{a_\mu\mu^2}\right)+$$

$$+\frac{\beta_1\beta_2}{a_\mu^2}\left((R-b(s)u)\frac{a(s)}{\mu}-\frac{a(s)\delta h}{a_\mu\mu^2}\right)b_0(s)u+$$

$$+\frac{1}{2}b_0(s)a_1'(s)u^2(-\frac{a(s)\delta}{a_\mu\mu^2})+\nu b_0(s)\frac{a'(s)}{a(s)}\frac{\partial u}{\partial x}(\frac{a(s)\delta}{a_\mu\mu^2})-$$

$$-\nu b_0(s)\frac{a''(s)}{2a(s)}u\left(-2\frac{a^2(s)}{a_\mu^2}(R-b(s)u)\frac{\delta}{\mu^2}+\frac{a^2(s)\delta^2h}{a_\mu^2\mu^4}\right)$$

$$+G_1(R,s,u,h).$$

При $0\le s(x,t)\le 1$ коэффициенты $a_\rho(s),a_\mu(s),b_0(s),\chi_0(s)$ удовлетворяют неравенствам

$$0<\min(\alpha_1,\alpha_2)\le a_\rho(s)\le\max(\alpha_1,\alpha_2)<1,$$

$$0<\min(\beta_1,\beta_2)\le a_\mu(s)\le\max(\beta_1,\beta_2)<1,$$

$$0<\frac{\min(\beta_1,\beta_2)}{\max(\alpha_1,\alpha_2)}\le b_0(s)\le\frac{\max(\beta_1,\beta_2)}{\min(\alpha_1,\alpha_2)}<\infty,$$

$$0<\min(c_1\rho_1^0,c_2\rho_2^0)\le\chi_0(s)\le\max(c_1\rho_1^0,c_2\rho_2^0)<\infty.$$

Коэффициенты $b_j(s), j=0,..,12$ удовлетворяют условиям

$$C^{-1}\le(\frac{b_1(s)}{a(s)},\frac{b_5(s)}{a^{q-1}(s)},\frac{b_8(s)}{a(s)},\frac{b_9(s)}{\chi(s)})\le C,$$

$$C^{-1}\le(\frac{|b_{10}(s)|}{\chi(s)a(s)},a_\mu(s)b_{11}(s),\frac{a_\mu(s)}{a(s)}b_{12}(s))\le C,$$

$$|b_2(s)|+|b_3(s)|+|b_4(s)|\le C,$$

$$|b_6(s,\theta)|\le C(s(1-s))^{q_2+1}|\theta|^{q_3},$$

$$|b_7(s,\theta)|\le C(s(1-s))^{q_4+1}|\theta|^{q_5},$$

где C – положительная постоянная, зависящая только от данных задачи.

Положим $u(x,t)=\omega(x,t)+\psi(x,t)$, $\theta(x,t)=\hat\theta(x,t)+\phi(x,t)$, $\psi(x,t)=(1-x)u_1(t)+xu_2(t)$, $\phi(x,t)=-\frac{(1-x)^2}{2}\theta_1(t)+\frac{x^2}{2}\theta_2(t)$, тогда $\omega\mid_{x=0}=\omega\mid_{x=1}=0$, $\omega\mid_{t=0}=\omega^0(x)=u^0(x)-\psi(x,0)$, $\frac{\partial\hat\theta}{\partial x}\mid_{x=0}=\frac{\partial\hat\theta}{\partial x}\mid_{x=1}=0$. Заменяем в (14)–(17) $u(x,t)$ через $\omega(x,t)$, а $\theta(x,t)$ через $\hat\theta(x,t)$.

Решение $(s,\omega,\hat\theta,R)$ уравнений (14)–(17) с соответствующими начальными и граничными условиями построим как предел приближенных решений $(s^n,\omega^n,\hat\theta^n,R^n)$, где $\omega^n(x,t)$ и $\hat\theta^n(x,t)$ представляются в виде конечных сумм: $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i^n(t)\sin(\pi ix)$, $\sum\limits_{j=0}^{n}\hat\theta_j^n(t)\cos(\pi jx)$, $n=1,2,...$ с неизвестными коэффициентами $u_i^n(t)$, $i=1,2,...,n$, $\theta_j^n(t)$, $j=0,1,2,...,n$. Для определения последних предполагается, что уравнения (15), (16) выполняются приближенно:

$$\int_0^1 L_1(s^n,\omega^n,\hat{\theta}^n,R^n)\sin(\pi ix)dx=0, \quad i=1,2,...,n, \tag{18}$$

$$\int_0^1 L_2(s^n,\omega^n,\hat{\theta}^n,R^n)\cos(\pi jx)dx=0, \quad j=0,1,2,...,n. \tag{19}$$

Тогда $\omega_i^n(t)$, $\hat{\theta}_j^n(t)$ находятся из решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{d\omega_i^n}{dt}=\Phi_i^n(\omega_1^n,...,\omega_n^n;\hat{\theta}_0^n,...,\hat{\theta}_n^n;s^n,R^n),\\ &\frac{d\hat{\theta}_j^n}{dt}=\lambda_j\Psi_j^n(\omega_1^n,...,\omega_n^n;\hat{\theta}_0^n,...,\hat{\theta}_n^n;s^n,R^n),\end{aligned} \tag{20}$$

$$\omega_i^n(0)=2\int_0^1\omega^0(x)\sin(\pi ix)dx,$$

$$\hat{\theta}_0^n(0)=2\int_0^1\hat{\theta}^0(x)dx,$$

$$\hat{\theta}_j^n(0)=2\int_0^1\hat{\theta}^0(x)\cos(\pi jx)dx, \quad j=1,2,...,n.$$

Здесь $\lambda_0=1$, $\lambda_j=2$, $j=1,2,...,n$,

$$\Phi_i^n(t)=2\int_0^1[-(\frac{\partial\psi}{\partial t})-\nu\frac{\partial}{\partial x}\left(b_0(s^n)\frac{\partial(\omega^n+\psi)}{\partial x}\right)-$$

$$-b_1(s^n)(\omega^n+\psi)\left(R^n-b(s^n)(\omega^n+\psi)\right)^2-$$

$$-b_2(s^n)(\omega^n+\psi)\frac{\partial(\omega^n+\psi)}{\partial x}-b_3(s^n)(\omega^n+\psi)^2\cdot$$

$$\cdot(R^n-b(s^n)(\omega^n+\psi))-b_4(s^n)\frac{\partial(\omega^n+\psi)}{\partial x}\cdot$$

$$\cdot(R^n-b(s^n)(\omega^n+\psi))-b_5(s^n)(\omega^n+\psi)-$$

$$-b_6(s,\hat{\theta}^n+\phi)(R-b(s)(\omega^n+\psi))-$$

$$-b_7(s^n,(\hat{\theta}^n+\phi))\frac{\partial(\hat{\theta}^n+\phi)}{\partial x}-b_0(s)g_0]\sin(\pi ix)dx,$$

$$\Psi_j^n(t)=\int_0^1[\frac{\partial}{\partial x}(b_9(s^n)\frac{\partial(\hat{\theta}^n+\phi)}{\partial x})-$$

$$-b_8(s^n)(\omega^n+\psi)\frac{\partial(\hat{\theta}^n+\phi)}{\partial x}+$$

$$+b_{10}(s^n)(R^n-b(s^n)(\omega^n+\psi))\frac{\partial(\hat{\theta}^n+\phi)}{\partial x}+$$

$$=(b_{11}(s^n)+b_{12}(s^n))\frac{\partial(\hat{\theta}^n+\phi)}{\partial x}]\cos(\pi jx)dx.$$

Функции $s^n(x,t)$, $R^n(x,t)$ определим из решения задач

$$\frac{\partial s^n}{\partial t}=f_2(\omega^n,s^n,R^n)\equiv f_2^n,\ s^n\mid_{t=0}=s^0(x). \tag{21}$$

$$\begin{aligned}&\tfrac{\partial R^n}{\partial t}+U^n\tfrac{\partial R^n}{\partial x}=f_1(\omega^n,s^n,R^n,\hat{\theta}^n)\equiv f_1^n,\\ &R^n\mid_{t=0}=R^0(x),\end{aligned} \tag{22}$$

где $U^n\equiv U(s^n,\omega^n)=a'(s^n)\omega^n$ и в силу (19): $\partial s^n/\partial x=a(s^n)(R^n-b(s^n)(\omega^n+\psi))/\mu-\frac{a(s^n)\delta h}{a_\mu(s^n)\mu^2}$. Соответствующая (22) характеристическая система имеет вид [4]:

$$\begin{aligned}&\tfrac{dy(t,\xi)}{dt}=U^n(y(t,\xi),t),\ y\mid_{t=0}=\xi,\\ &\tfrac{d\overline{R}^n}{dt}=f_1^n(y(t,\xi),t,\overline{R}^n),\ \overline{R}^n\mid_{t=0}=R^0(\xi),\end{aligned} \tag{23}$$

где $y(t,\xi)=x$, $\overline{R}^n(t,\xi)=R^n(y,t)$ и для $I\equiv\frac{\partial y(t,\xi)}{\partial\xi}$ имеем

$$I=\exp\int_0^t\Phi_1(y(\tau,\xi),\tau)d\tau,$$

$$\Phi_1=a'(s^n)\frac{\partial(\omega^n+\psi)}{\partial x}+a''(s^n)(\omega^n+\psi)\frac{\partial s^n}{\partial x}.$$

Кроме того, необходимо задавать $R^n(x,t)$ на границе $x=0$ в случае $U^n(0,t)>0$ (на правой границе $x=1$ в случае $U^n(1,t)<0$). Неизвестную функцию $h(t)$ в задаче Коши (20)–(22), заменим на $h^n(t)=s^n(0,t)a_1(t)$ (в дальнейшем индекс n у h опускаем).

Таким образом, приближенное решение $(\omega^n,s^n,\hat{\theta}^n,R^n)$ удовлетворяет задаче Коши (20)–(22). Локальная разрешимость этой задачи при каждом фиксированном n следует из теоремы Коши-Пикара для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Укажем такое значение t_0, для которого данная задача на интервале $[0,t_0]$ разрешима для всех n. Для этого достаточно получить равномерные по n оценки для $\omega^n,s^n,R^n,\hat{\theta}^n$ в том числе и оценки снизу и сверху для $s^n, \hat\theta^n$. Положим

$$z_n(t) = \|\omega^n(t)\|^2 + \|R^n(t)\|^2 + \|\omega^n_x(t)\|^2 + \|R^n_x(t)\|^2 + \|\hat\theta^n(t)\|^2 + \|\hat\theta^n_x(t)\|^2 + \kappa\int_0^t \|\omega^n_{xx}(\tau)\|^2 d\tau, \quad (24)$$

$$0 < m \le s^n \le M < 1,$$

$$0 < m^{(1)} \le \hat\theta^n \le M^{(1)} < \infty.$$

где $\|\omega(t)\|^2 = \int_0^1 \omega^2(x,t)dx$, $\omega_x = \frac{\partial\omega}{\partial x}$, $\omega_{xx} = \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}$, $\kappa \in (0,1)$ – вещественный параметр.

Искомые оценки имеют вид [2, 3]

$$\frac{1}{s^n(x,t)(1-s^n(x,t))} \le C\exp(\frac{C}{\kappa}z_n(t) + \|\psi_x(t)\| + |h|^2 + \|\psi(t)\|^2). \quad (25)$$

Здесь и далее C – положительная постоянная, независящая от n.

Для $\omega^n(x,t)$ и $\omega^n_x(x,t)$ верны следующие оценки[2, 3]:

$$\frac{d}{dt}\|\omega^n(t)\|^2 + \nu_0\|\omega^n_x(t)\|^2 \le C(\|g_0(t)\|^2 + z_n(t) + z_n^3(t) + \|D^n(t)\|^2 + |h(t)|^2 + |h(t)|^3 + |h(t)|^4 + |h(t)|^6), \quad (26)$$

$$\frac{d}{dt}\|\omega^n_x(t)\|^2 + 2\nu_0\|\omega^n_{xx}(t)\|^2 \le \sum_{i=5}^{7}\varepsilon_i\|\omega^n_{xx}(t)\|^2 + C(\|g_0(t)\|^2 + \|D^n(t)\|^2 + z_n(t) + z_n^3(t) + \exp\frac{3C(q+1)}{\kappa}z_n(t) + \|\psi(t)\|^6 + \|\psi(t)\|^4 + \|\psi_x(t)\|^2 + \|\psi_{xx}(t)\|^2 + \|\psi_t(t)\|^2 + |h(t)|^6 + |h(t)|^4 + |h(t)|^3 + |h(t)|^2). \quad (27)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$D(s^n,\omega^n,R^n,\hat{\theta^n}) = b_6(s^n,(\hat{\theta^n}+\phi))(R^n - b(s^n)\cdot (\omega^n+\psi)) + b_7(s^n,(\hat{\theta^n}+\phi))(\hat{\theta^n}+\phi)_x.$$

Оценки для $R^n(x,t)$ и $R^n_x(x,t)$ имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\|R^n(t)\|^2 \le C(\|g_0(t)\|^2 + z_n(t) + z_n^2(t) + z_n^3(t) + \|D_1(t)\|^2 + \exp\frac{2C(q+1)}{\kappa}z_n(t) + \|\psi(t)\|^6 + \|\psi_x(t)\|^2 + \|\psi(t)\|^2 + |h(t)|^2 + |h(t)|^4 + |h(t)|^6), \quad (28)$$

$$\frac{d}{dt}\|R^n_x(t)\|^2 \le (\varepsilon_8+\varepsilon_9)\|\omega^n_{xx}(t)\|^2 + C(\varepsilon_8,\varepsilon_9)(\|g_{0x}(t)\|^2 + z_n(t) + z_n^2(t) + z_n^3(t) + \exp\frac{3C(q+1)}{\kappa}z_n(t) + \|\psi^n(t)\|^4 + \|\psi^n_x(t)\|^2 + \|\psi^n_x(t)\|^4 + \|\psi^n(t)\|^2 + \|\psi^n(t)\| + \|\psi^n_x(t)\| + |h(t)|^2 + |h(t)|^4 + |h(t)|^6 + |h_x(t)|^2 + \int_0^1 |D_{1x}R^n_x|dx). \quad (29)$$

Здесь

$$D_1(s^n,\omega^n,R^n,\hat\theta^n) = p'_{cs}(s^n,\hat\theta^n)\frac{a(s^n)}{\mu}(R^n - b(s^n)\cdot (\omega^n+\psi)) + p'_{c\theta}(s^n,\hat\theta^n)(\hat\theta^n+\phi)_x.$$

Теперь получим необходимые оценки для $\hat\theta^n(x,t)$ и $\hat\theta^n_x(x,t)$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\hat\theta^n(t)\|^2 + \|\hat\theta^n_x(t)\|^2) + \int_0^1 b_9(s^n)(|\hat\theta^n_x|^2 + |\hat\theta^n_{xx}|^2)dx \le Cz_n^2(t)Z(t),$$

где

$$Z(t) = \max_{0\le x\le 1}\frac{b_{10}^2(s^n)}{b_9(s^n)} + \max_{0\le x\le 1}\frac{1}{b_9(s^n)} + \max_{0\le x\le 1}\frac{b_8^2(s^n)}{b_9(s^n)} + \max_{0\le x\le 1}\frac{b_{11}^2(s^n)}{b_9(s^n)} + \max_{0\le x\le 1}\frac{b_{12}^2(s^n)}{b_9(s^n)} + \max_{0\le x\le 1}\frac{(b_9'(s^n)a(s^n))^2}{b_9(s^n)} + \|\phi_t(t)\|^2 + \|\phi_x(t)\|^2 + |h(t)|^6 + |h(t)|^4 + |h(t)|^2.$$

Из свойств функций b_8, b_9, b_{10}, b_{12} имеем следующие оценки:

$$\frac{b_8^2(s)}{b_9(s)} \le C(s(1-s))^{-q_1+2}, \quad \frac{1}{b_9(s)} \le C(s(1-s))^{-q_1},$$

$$\frac{b_{10}^2(s)}{b_9(s)} \le C(s(1-s))^{q_1+1}, \quad \frac{b_{12}^2(s)}{b_9(s)} \le C(s(1-s))^{-q_1+2},$$

$$\frac{(b_9'(s)a(s))^2}{b_9(s^n)} \le C((s(1-s))^{q_1+2} + (s(1-s))^{q_1}).$$

В силу неравенства (25) существуют постоянные $k_2 > 0$ и $k_3 > 0$, зависящие только от

C, q_1 и независящие от n и такие, что $Z(t) \le k_2 \exp(k_3 z_n(t))$. Тем самым имеем

$$\frac{d}{dt}(\|\theta^n(t)\|^2 + \|\theta^n_x(t)\|^2) + \int_0^1 b_9(s^n)(|\theta^n_x|^2 + |\theta^n_{xx}|^2)dx \le \le Ck_2(z^n(t))^2 \exp(k_3 z_n(t)). \quad (30)$$

Складывая неравенства (26)–(29) получим

$$\frac{d}{dt}(\|\omega^n(t)\|^2 + \|\omega^n_x(t)\|^2 + \|R^n(t)\|^2 + \|R^n_x(t)\|^2) + +\nu_0\|\omega^n_x(t)\|^2 + 2\nu_0\|\omega^n_{xx}(t)\|^2 \le \sum_{i=5}^{9} \varepsilon_i \|\omega^n_{xx}(t)\|^2 + +C(\|g_0(t)\|^2 + \|g_{0x}(t)\|^2 + z_n(t) + +z_n^2(t) + z_n^3(t) + \exp\frac{3C|q+1|}{\kappa} z_n(t) + +\|D^n(t)\|^2 + \|D^n_1(t)\|^2 + \int_0^1 |D_{1x}R^n_x|dx + +\|\psi_t(t)\|^2 + \|\psi_x(t)\|^2 + \|\psi_{xx}(t)\|^2 + +\|\psi(t)\|^6 + |h(t)|^6). \quad (31)$$

Оценим теперь слагаемые правой части неравенства (31). Поскольку $b_6(s^n, \theta^n) \le C(s(1-s))^{q_2+1}|\theta|^{q_3}$ и $b_7(s^n, \theta^n) \le C(s(1-s))^{q_4+1}|\theta|^{q_5}$, то существуют постоянные $k_4 > 0$ и $k_5 > 0$, зависящие только от C, q_2, q_3, q_4, q_5 и независящие от n и такие, что $\|D(t)\|^2 + \|D_1(t)\|^2 \le k_4 \exp(k_5 z_n(t))$. Кроме того, с учетом свойств p''_{css}, $p''_{cs\theta}$, $p''_{c\theta\theta}$ для последнего слагаемого в правой части неравенства (29) имеем, что

$$\int_0^1 |D_{1x}R^n_x|dx \le \frac{1}{2}\int_0^1 b_9(s^n)|\theta^n_{xx}|^2 dx + +C(\|R^n_x(t)\|^2 + k_6 \exp(k_7 z_n(t))),$$

где постоянные $k_6 > 0$, $k_7 > 0$ зависят только от C, $q_1, ..., q_{11}$ и не зависят от n.

Сложим неравенства (30) и (31) и выберем $\varepsilon_5 - \varepsilon_9$ из условия $\sum\limits_{i=5}^{9} \varepsilon_i = 2\nu_0 - \kappa$ (если $\nu_0 \le 1$, то положим $\kappa = \nu_0/2$ и $\varepsilon_5 - \varepsilon_9$ выберем из условия $\sum\limits_{i=5}^{9} \varepsilon_i = 3\nu_0/2$; если $\nu_0 > 1$, то положим $\kappa = 1/2$, а ε_i выберем из условия $\sum\limits_{i=5}^{9} \varepsilon_i = 2\nu_0 - 1/2$). Усиливая правую часть полученного неравенства, выводим

$$\frac{dz_n(t)}{dt} \le C(\|g_0(t)\|^2 + \|g_{0x}(t)\|^2 + \exp C z_n(t) + +\|\psi_t(t)\|^2 + \|\psi_x(t)\|^2 + \|\psi_{xx}(t)\|^2 + \|\psi(t)\|^6 + \|\phi_t(t)\|^2 + \|\phi_x(t)\|^2 + |h(t)|^6), \quad (32)$$

где постоянная C не зависит от n. Из (32) следует равномерная по n ограниченность $z_n(t)$ при всех $t \le t_0$, где

$$t_0 < C^{-2} \exp(-C\{z_n(0) + C\int_0^T (\|g_0(\tau)\|^2 + +\|g_{0x}(\tau)\|^2 + \|\psi_t(t)\|^2 + \|\psi_x(t)\|^2 + \|\psi_{xx}(t)\|^2 + +\|\psi(t)\|^6 + \|\phi_t(t)\|^2 + \|\phi_x(t)\|^2)d\tau\}).$$

При таком выборе t_0 из (25), (30) и (31) следует, что для всех n справедливы неравенства:

$$0 < m \le s^n(x,t) \le M < 1, \ (x,t) \in \Omega \times (0, t_0),$$

$$\max_{0\le t\le t_0} \|\omega^n_x(t)\|^2 + \max_{0\le t\le t_0} \|\hat\theta^n_x(t)\|^2 + + \max_{0\le t\le t_0} \|R^n(t)\|^2 + \max_{0\le t\le t_0} \|R^n_x(t)\|^2 + + \int_0^{t_0}\int_0^1 (\|\omega^n_{xx}(t)\|^2 + \|\hat\theta^n_{xx}(t)\|^2)dt \le C \quad (33)$$

с постоянной C независящей от n. Для этого решения также имеет место принцип максимума для температуры в следующей форме: $0 < \min\limits_{0\le x\le 1} \theta^0(x) \le \theta(x,t) \le \max\limits_{0\le x\le 1} \theta^0(x)$ почти всюду в Q_{t_0} (см. [5]).

2.2. Предельный переход. Оценки (33) позволяют выделить из последовательностей $\{s^n, \omega^n, R^n\, \hat\theta^n\}$ сходящиеся подпоследовательности. Полученные равномерные оценки по n позволяют выделить слабо сходящиеся подпоследовательности:

$$\omega^n, R^n, \hat\theta^n, \omega^n_x, R^n_x \rightharpoonup \omega, R, \hat\theta, \omega_x, R_x$$

$$\text{слабо в} \quad L_2(0, t_0; L_2(\Omega)),$$

$$\omega^n_{xx}, \omega^n_t \rightharpoonup \omega_{xx}, \omega_t \quad \text{слабо в} \quad L_2(Q_{t_0}),$$

$$Q_{t_0} = (0, t_0) \times (0, 1).$$

Из равномерных оценок ω^n в $L_2(0, t_0; L_2(\Omega))$, $W^1_2(Q_T)$ и ω^n_t в $L_2(Q_{t_0})$ возможно выделить подпоследовательность ω^n, сильно сходящуюся к ω в $L_2(0, t_0; L_2(\Omega))$ [6]. Из (33), очевидно, вытекает сильная сходимость s^n к s в $L_2(Q_{t_0})$. В качестве примера рассмотрим один из главных нелинейных слагаемых в (15)

$$B = \int\limits_{Q_{t_0}} b_3(s^n)(\omega^n)^2 R^n F dQ_{t_0} \to$$

$$\to \int\limits_{Q_{t_0}} b_3(s)\omega^2 RFdQ_{t_0},\ n\to\infty,\ \forall F\in L_2(Q_T).$$

Очевидно, имеем $B = B_1 + B_2 + B_3$. Причем

$$B_1 = \int\limits_{Q_{t_0}} b_3'(\xi)(s^n - s)(\omega^n)^2 R^n F dQ_{t_0} \to 0,\ n\to\infty,$$

так как

$$\mid B_1 \mid \le \max_{x,t,\theta\in Q_T} \mid b_3'(\xi)(\omega^n(x,t))^2 \mid \cdot$$

$$\cdot \left(\int\limits_0^{t_0} \|s^n - s\|^2 dt\right)^{1/2} \left(\int\limits_0^{t_0} \|R^n F\|^2 dt\right)^{1/2},$$

так как

$$s^n \to s \quad \text{сильно в} \quad L_2(Q_{t_0}).$$

Аналогично

$$B_2 = \int\limits_{Q_{t_0}} b_3(s)(\omega^n - \omega)\cdot$$

$$\cdot(\omega^n + \omega)R^n F dQ_{t_0} \to 0, \quad n\to\infty,$$

так как

$$\mid B_2 \mid \le \max_{x,t,\theta\in Q_T} \mid b_3(s)(\omega^n + \omega) \mid \cdot$$

$$\left(\int\limits_0^{t_0} \|\omega^n - \omega\|^2 dt\right)^{1/2} \left(\int\limits_0^{t_0} \|R^n F\|^2 dt\right)^{1/2},$$

$$\omega^n \to \omega \quad \text{сильно в} \quad L_2(Q_{t_0}).$$

Рассмотрим

$$B_3 = \int\limits_{Q_{t_0}} b_3(s)(\omega)^2 (R^n - R) F dQ_{t_0} \to 0,\ n\to\infty,$$

$$R^n \rightharpoonup R \quad \text{слабо в} \quad L_2(Q_{t_0}),$$

$$\text{а} \quad b_3(s), \quad \omega^n - \text{ограничены}.$$

Предельный переход в слагаемых, содержащих h^n и h_t^n, обеспечивается сильной сходимость $h^n(t)$ к $h(t)$ и слабой сходимостью $h_t^n(t)$ к $h_t(t)$ в $L_2(0,T)$.

Предельным переходом в равенствах (18), (19), (21), (22) показывается, что предельные функции $\{s(x,t), \omega(x,t), R(x,t), \theta(x,t)\}$ дают обобщенное решение на промежутке $[0, t_0]$.

Повышение гладкости обобщенного решения до классического (при соответствующем повышении гладкости данных задачи) проводится так же, как в работе [3, с. 140; 186].

Библиографический список

1. Годунов С.К. Уравнения математической физики. – М., 1979.
2. Папин А.А., Ахмерова И.Г. Задача протекания для уравнений движения двух взаимопроникающих вязких жидкостей. – Новосибирск, 2004. – Деп. в ВИНИТИ, №37-В.
3. Папин А.А. Краевые задачи для уравнений двухфазной фильтрации. – Барнаул, 2009.
4. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – М., 1978.
5. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М., 1967.
6. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М., 1973.