

УДК 001.891.57

*Л.А. Хворова*

**Математические модели в теории и практике  
точного земледелия\***

*L.A. Khvorova*

**Mathematical Models in Theory and Practice  
of Precision Agriculture**

В рамках пространственно-дифференцированных технологий точного земледелия рассматриваются математические модели процесса теплопереноса в почве в двумерном случае.

**Ключевые слова:** точное земледелие, информационные технологии, почвенный компартмент, математическая модель, тепловой режим почвы, численные методы.

**Введение.** В настоящее время одно из наиболее перспективных направлений агрономической науки и производства растениеводческой продукции – точное земледелие, в основе которого лежит представление о возможности значительного повышения урожаев, существенной экономии ресурсов и снижения антропогенной нагрузки на окружающую среду за счет применения пространственно-дифференцированных агротехнологий, связанных с пространственной изменчивостью почвенных и иных факторов продуктивности в пределах отдельного сельскохозяйственного поля [1].

Наиболее слабым звеном в этих технологиях является отсутствие эффективных методов прогнозирования результатов воздействия на агроэкосистему. В традиционном земледелии все характеристики поля, как правило, считаются одинаковыми для всех его участков. Точное земледелие предполагает динамическую оптимизацию при выполнении агротехнических операций для каждого однородного участка поля в зависимости от складывающихся агрохимических, агрофизических, фитосанитарных факторов.

Располагая информацией о свойствах почвы, потребностях культур и тех условиях, в которых они реально находятся, можно максимально эффективно и оптимально и вместе с тем экологически безопасно распределять агротехнологии, адаптированные к почвенным участкам в рамках одного поля, связанные с внесением удобрений, санитарной обработкой почвы и культурными растениями.

В подавляющем большинстве современные модели, описывающие производственный процесс сельскохозяйственных растений, рассматривают однородный фиктивный посев, а стратификация его характеристик производится в единственном вертикальном направлении. В подобных моделях расчет

In the framework of the spatially differentiated technologies of a precision agriculture the article considers the mathematical models of heat transfer in the soil in the two-dimensional case.

**Key words:** precision agriculture, informational technology, soil compartment, mathematical model, thermal regimes of the soil, numerical methods.

производится отдельно для каждой опорной точки поля с параметрами, характерными только для данного типа почвы. Все точки считаются независимыми друг от друга, но предполагается, что все окружение данной точки обладает теми же свойствами и, соответственно, никаких горизонтальных переток вещества и энергии не происходит [1, 2].

Для целей точного земледелия горизонтальная неоднородность поля является важнейшим фактором, влияющим на выбор агротехники и определяющим результат хозяйствования. Учет взаимодействия динамики продукционного процесса на соседних участках неоднородного поля требует построения принципиально иной, более сложной многомерной модели агроландшафта.

Особое место в моделировании отводится гидротермическому режиму почвы, так как именно от него зависят все важные процессы, происходящие в почве и растениях: перенос вещества и энергии, физико-химические и биологические трансформации минеральных и органических соединений.

**Математическая модель теплового режима почвы в пространственно-дифференцированных технологиях точного земледелия.** В рамках концепции пространственно-дифференцированных технологий точного земледелия рассмотрим двумерную модель теплового режима почвы (модель для случая трех пространственных переменных рассмотрена в работе [3]).

Математические модели, связанные с описанием явления теплопереноса в пределах почвенного компартмента, основаны на нестационарных уравнениях параболического типа. Теплота, поступающая на поверхность почвы, под действием создаваемого градиента температур перераспределяется в объеме почвенного компартмента.

\* Работа выполнена при финансовой поддержке ведомственно-аналитической программы «Развитие научного потенциала высшей школы 2010–2011» (проект №2.2.2.4/4278).

Пусть  $P$  – точка почвенного компартмента  $\Omega$ . В двумерной постановке ( $\Omega \subset R^2$ )  $P = P(x, y)$ ,  $T = T(P, t)$  – температура в точке  $P$  почвенного компартмента в момент времени  $t$ ,  $t \in [0, T]$ . Тогда уравнение теплопереноса в области  $\Omega$  можно записать в виде [4]:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \chi \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \chi \frac{\partial T}{\partial y} \right) + f(x, y, t), \quad (1)$$

где  $\rho(x, y)$  – плотность почвы;  $c$  – теплоемкость,  $\chi$  – коэффициент теплопроводности, зависящие от влажности почвы  $w$ ;  $f(x, y, t)$  – функция источника тепла.

Суть рассматриваемого процесса теплопроводности и решаемой задачи позволяет сделать следующие предположения:

1. Функция влияния стоков и источников тепла  $f(x, y, t)$  равна нулю.

2. Влажность почвы  $w$  считаем здесь заданной функцией.

Связь теплопроводности и влажности почвы хорошо аппроксимируется квадратичной зависимостью вида [3]:

$$\chi(w) = c(w) \cdot (\lambda_1 (w - \lambda_4)^2 + \lambda_2 \rho + \lambda_3).$$

Коэффициенты  $\lambda_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ) в указанной квадратичной зависимости приведены для некоторых почв, например, в [2].

Искомая функция  $T(P, t)$  должна удовлетворять начальным условиям:

$$T(P, t)|_{t=0} = T(P, 0) = T_0(P) \text{ для } P \in \Omega \quad (2)$$

и некоторым граничным условиям.

Нижняя граница помещается, как правило, на глубине, на которой температура либо полагается постоянной, либо зависящей от времени и точек границы известным образом. Следовательно, при  $y = -H$  (на нижней границе почвенного компартмента  $\Omega$ ) выполняется

$$T(-H, t) = \varphi_H(t). \quad (3)$$

В качестве верхнего граничного условия следует записать соотношение, обеспечивающее «сшивание» решений задачи в почве и приземном воздухе.

Наиболее корректным представляется условие теплового баланса на деятельной поверхности почвы (условие третьего рода [5, 6]) вида:

$$\chi \frac{\partial T}{\partial n} + \beta(T - T_a) = q(x, t). \quad (4)$$

Здесь  $\vec{n} = (n_1, n_2)$  – вектор внешней нормали к верхней границе деятельной поверхности почвы;

$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial x} n_1 + \frac{\partial T}{\partial y} n_2$ , функция  $q$  задает тепловой поток в почву, затраты тепла на турбулентный перенос в атмосферу и на испарение и т.д.

Двумерная задача с вертикальной границей раздела. Пусть неоднородный почвенный компартмент  $\Omega$  состоит из двух участков  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  (рис. 1), значительно отличающихся по влиянию характеристик поля на продукционный процесс посева и движение почвенных растворов (в действительности, свойства почвы меняются от точки к точке непрерывно и случайным образом). Цель «размежевания» поля на единицы управления – уменьшение теоретически бесконечной вариабельности условий произрастания к ограниченному набору вариантов.

**Двумерная задача с вертикальной границей раздела.** Пусть неоднородный почвенный компартмент  $\Omega$  состоит из двух участков  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  (рис. 1), значительно отличающихся по влиянию характеристик поля на продукционный процесс посева и движение почвенных растворов (в действительности, свойства почвы меняются от точки к точке непрерывно и случайным образом). Цель «размежевания» поля на единицы управления – уменьшение теоретически бесконечной вариабельности условий произрастания к ограниченному набору вариантов.

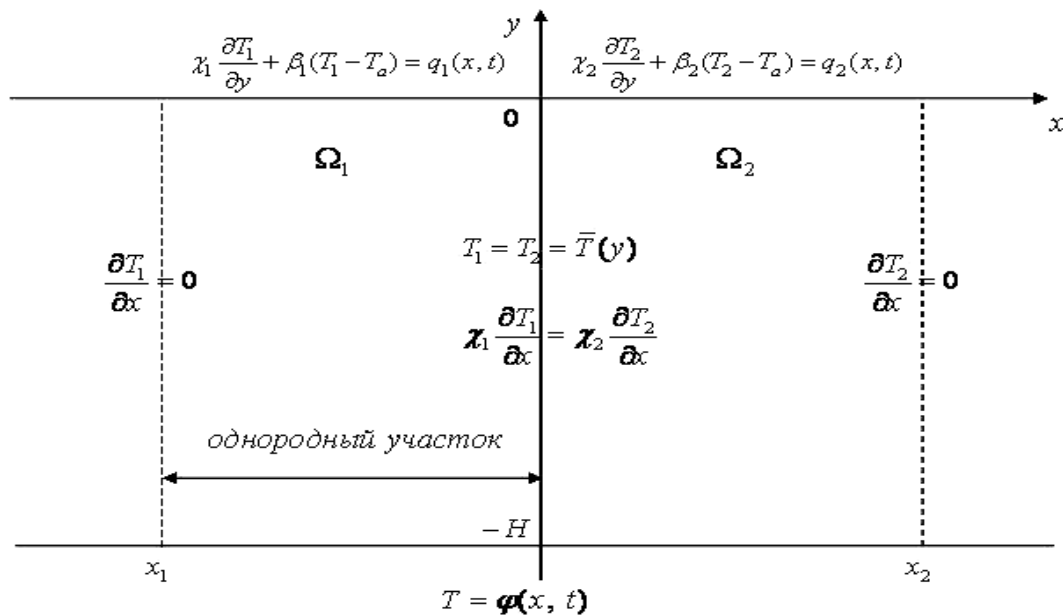


Рис. 1. Почвенный компартмент  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$

Пусть система координат выбрана таким образом, что ось  $Oy$  проходит по границе раздела областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . Тогда  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ . Здесь

$$\Omega_1 = \{(x, y) : x_1 < x < 0; -H < y < 0\},$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) : 0 < x < x_2; -H < y < 0\}.$$

Полагаем, что границы участков  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  являются известными и прямолинейными. В случае криволинейных границ областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  задача также может быть сформулирована и успешно решена.

Функция  $T_1$  определяет температуру почвы в области  $\Omega_1$ , а  $T_2$  – температуру почвы в области  $\Omega_2$ . Тогда в силу почвенной однородности областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  можно записать условия:

$$\frac{\partial T_i}{\partial x} = 0 \text{ при } x = x_i, i = 1, 2. \quad (5)$$

На деятельной поверхности почвы условие теплового баланса имеет вид:

$$\chi \frac{\partial T_i}{\partial y} + \beta_i(T_i - T_a) = q_i(x, t) \quad (6)$$

при  $y = 0, x \in \Omega_i, i = 1, 2$ .

На границе раздела компартментов  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  ( $x = 0$ ) должны выполняться условия непрерывности температур и тепловых потоков:

$$T_1 = T_2 \text{ и } \chi_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = \chi_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \text{ при } x = 0. \quad (7)$$

Однородное равнение теплопроводности (1) будет иметь вид:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \chi \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \chi \frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (8)$$

Введем коэффициент температуропроводности  $K$ :  $K = \frac{\chi}{\rho c}$ , который также будет функцией пространственных координат  $x, y$ , и перепишем уравнение (8) в следующем дивергентном виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{K}{\rho c} \left[ \frac{\partial(\rho c)}{\partial x} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial(\rho c)}{\partial y} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right]. \quad (9)$$

Для численного решения уравнения (9), описывающего процесс теплопереноса в областях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , применяется численный метод с использованием продольно-поперечной конечно-разностной схемы (метод переменных направлений) [5, 6]. Схема расчета записывается в следующем общем виде:

$$\frac{T^{k+1/2} - T^k}{0.5\Delta t} = [K T_x]_x^k + [K T_y]_y^{k+1/2} + F^{k+1/2},$$

$$\frac{T^{k+1} - T^{k+1/2}}{0.5\Delta t} = [K T_x]_x^{k+1} + [K T_y]_y^{k+1/2} + F^{k+1/2}. \quad (10)$$

$$\text{Здесь } F = \frac{K}{\rho c} \left[ \frac{\partial(\rho c)}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial(\rho c)}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right], \Delta t - \text{ шаг}$$

по времени,  $T^k = T(t_k, \cdot)$ ,  $t_k = k \cdot \Delta t$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Для реализации представленной схемы вводится равномерная разностная сетка  $(x_n, y_m)$  для каждой области  $\Omega_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Значения сеточной функции  $T(x, y, t)$  в узлах сетки обозначим  $T_{n,m}^k = T(x_n, y_m, t^k)$ . При этом используется следующая разностная аппроксимация для входящих в (10) слагаемых:

$$[K T_x]_x \approx \bar{K}_{n+1} \frac{T_{n+1,m} - T_{n,m}}{h_x^2} - \bar{K}_n \frac{T_{n,m} - T_{n-1,m}}{h_x^2}.$$

Здесь  $\bar{K}_{n+1} = K_{n+1/2,m}$ ,  $K_{n+1/2,m} = K(x_{n+1/2}, y_m)$ ,  $x_{n+1/2} = x_n + 0.5h_x$ ,  $h_x = h_1$  или  $h_x = h_2$ .

В результате требуется решить системы линейных алгебраических уравнений

$$-a_{n,m} T_{n,m-1}^{k+1/2} + b_{n,m} T_{n,m}^{k+1/2} - c_{n,m} T_{n,m+1}^{k+1/2} = d_{n,m},$$

$$-a_{n,m} T_{n-1,m}^{k+1} + b_{n,m} T_{n,m}^{k+1} - c_{n,m} T_{n+1,m}^{k+1} = d_{n,m},$$

соответствующие (10). Данные системы решаются методом прогонки. При этом в направлении  $y$  используется обычный вариант метода [5].

Граничные значения температуры  $T_1$  и  $T_2$  следуют из (3), (4).

Для определения  $T_1$  и  $T_2$  на слое  $(k+1)$  используем условия непрерывности температур и тепловых потоков на границе раздела (7) и представление решения (т.е. температуры в каждой из областей) в таком виде, когда  $(T_1)_{n,m}$  и  $(T_2)_{n,m}$  выражаются через неизвестные значения температуры  $(T_1)_{N_1+1,m} = (T_2)_{1,m}$  на границе раздела  $x = 0$ . Представления вида:

$$T_{1n,m} = \beta_{n,m}^1 + \gamma_{n,m}^1 \cdot \bar{T}_m, \quad T_{2n,m} = \beta_{n,m}^2 + \gamma_{n,m}^2 \cdot \bar{T}_m,$$

где  $\bar{T}_m$  – температура на границе раздела областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , позволяют организовать своеобразную прогонку с параметрами, коими являются граничные значения температуры  $\bar{T}_m$ , и найти сначала сами эти значения, а затем и распределение температуры в областях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ .

**Двумерная задача с криволинейной границей.** Рассмотрим случай, когда область  $\Omega$  однородна в направлении оси  $Ox$  и имеет верхнюю криволинейную границу  $y = f(x)$ , тем самым  $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < L, -H < y < f(x)\}$ .

Запишем рассматриваемую задачу:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \chi \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \chi \frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (11)$$

Условие теплового баланса на поверхности почвы:

$$\chi \frac{\partial T}{\partial n} + \beta(T - T_a) = q(x, t). \quad (12)$$

Здесь  $\vec{n} = (n_1, n_2)$  – вектор внешней нормали к границе  $y = f(x)$ ;

$$\vec{n} = \left( -\frac{f'_x}{\sqrt{1+(f'_x)^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+(f'_x)^2}} \right). \quad (13)$$

В силу горизонтальной почвенной однородности области  $\Omega$  условия (5) можно задать в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0, x = L. \quad (14)$$

На нижней границе почвенного компартмента  $\Omega$  полагается выполненным условие

$$T(-H, t) = \varphi_H(t). \quad (15)$$

Для численного исследования задачи (11), (12), (14), (15) в области с криволинейной границей  $y = f(x)$ , отобразим исходную область  $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < L, -H < y < f(x)\}$  на прямоугольник  $\bar{\Omega} = [0, L] \times [0, 1]$  (рис. 2), подобно тому, как это сделано в [7, с.124] для задач конвекции.

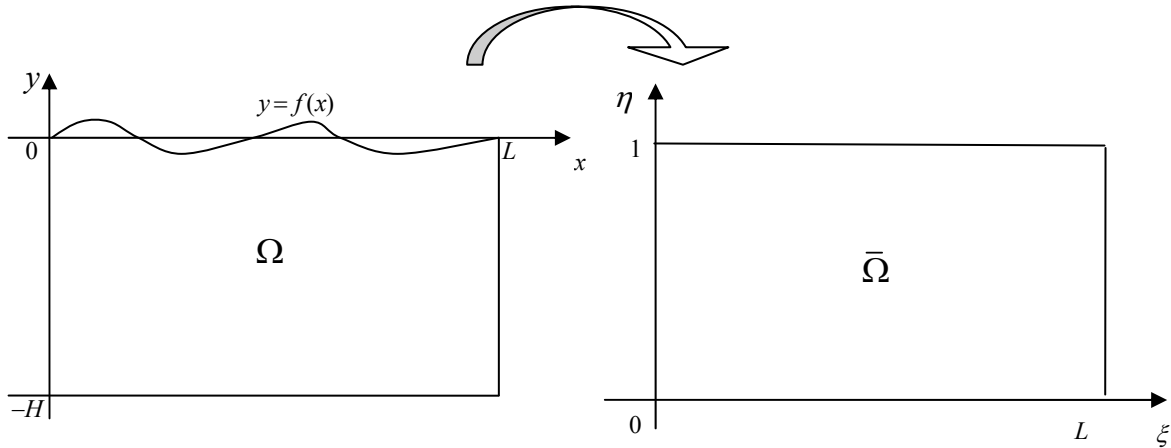


Рис. 2. Отображение области с криволинейной границей  $\Omega$  на прямоугольную область  $\bar{\Omega}$

Это позволит ввести равномерную прямоугольную сетку и применить в дальнейшем метод переменных направлений или метод стабилизирующей поправки. Для этого применим преобразование

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{y+H}{f(x)+H}, \quad (16)$$

где  $0 \leq \xi \leq L, 0 \leq \eta \leq 1$ .

Перепишем уравнение (11) и условие (12) в переменных  $\xi, \eta$ , для чего воспользуемся преобразованием (16).

1. Преобразуем правую часть уравнения (11):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x}(\chi T_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\chi T_y) = \\ & = \frac{1}{f+H} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \chi \left( (f+H) T_\xi - \eta f' T_\eta \right) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \chi \left( \frac{1+\eta^2 f'^2}{f+H} T_\eta - \eta f' T_\xi \right) \right] \right\}. \quad (17) \end{aligned}$$

Вводя обозначения  $B_{11} = f+H, B_{12} = -\eta f', B_{22} = \frac{1+\eta^2 f'^2}{f+H}$  и  $U = \chi(B_{11} T_\xi + B_{12} T_\eta), V = \chi(B_{12} T_\xi + B_{22} T_\eta)$ , запишем уравнение (11), учи-

тывая преобразование правой части (17) в следующем общем виде:

$$\frac{1}{\rho c} T_t = \frac{1}{f+H} [U_\xi + V_\eta]$$

или 
$$T_t = \frac{\rho c}{f+H} [U_\xi + V_\eta]. \quad (18)$$

2. Условие (12) на верхней границе области  $\bar{\Omega}$  в переменных  $\xi, \eta$  с учетом (13), (16) примет вид:

$$\begin{aligned} & \chi \left[ T_\xi \left( -\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}} \right) + \right. \\ & \left. + T_\eta \left( \frac{f'^2 \eta (f+H)}{\sqrt{1+f'^2} (f+H)^2} + \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}} \cdot \frac{1}{f+H} \right) \right] + \\ & \beta(T - T_a) = q(\xi, t). \quad (19) \end{aligned}$$

Рассмотрим постановку разностной задачи. Численное решение задачи (18), (19), (14), (15) реализуется методом стабилизирующей поправки. Для этого в расчетной области  $\bar{\Omega} = \{0 \leq \xi \leq L, 0 \leq \eta \leq 1\}$  введем равномерную разностную сетку  $(\xi_n, \eta_m)$ .

Представим разностную схему второго порядка аппроксимации (метод стабилизирующей поправки) для численного решения уравнения (18) [6, 7] в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{T^{k+1/2} - T^k}{\tau} = \frac{B}{f + H} [U_{\xi}^k + V_{\eta}^{k+1/2}], \\ \frac{T^{k+1} - T^{k+1/2}}{\tau} = \frac{B}{f + H} [U_{\xi}^{k+1} - U_{\xi}^k]. \end{cases} \quad (20)$$

Здесь  $U^k = (B_{11}T_{\xi}^k + B_{12}T_{\eta}^k)\chi$ ,  $B = \rho c$ .

Для  $V^{k+1/2}$  и  $U^{k+1}$  используются следующие представления:

$$V^{k+1/2}(T) = (B_{12}T_{\xi}^k + B_{22}T_{\eta}^{k+1/2})\chi,$$

$$U^k(T) = (B_{11}T_{\xi}^k + B_{12}T_{\eta}^k)\chi,$$

$$U^{k+1}(T) = (B_{11}T_{\xi}^{k+1} + B_{12}T_{\eta}^{k+1/2})\chi,$$

а для входящих в (20) производных – аппроксимация вида:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial U^{k+1}}{\partial \xi} \right)_{nm} &= \\ &= \frac{1}{h_{\xi}} \left[ (B_{11})_{n+1,m} \frac{T_{n+1,m}^{k+1} - T_{nm}^{k+1}}{h_{\xi}} - (B_{11})_{n,m} \frac{T_{nm}^{k+1} - T_{n-1,m}^{k+1}}{h_{\xi}} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{2h_{\xi}} \left[ (B_{12})_{n+1,m} \frac{T_{n+1,m+1}^{k+1/2} - T_{n+1,m-1}^{k+1/2}}{2h_{\eta}} - \right. \\ &\left. - (B_{12})_{n-1,m} \frac{T_{n-1,m+1}^{k+1/2} - T_{n-1,m-1}^{k+1/2}}{2h_{\eta}} \right]. \end{aligned}$$

Следует отметить, что к другим процессам, оказывающим решающее влияние на продукционный процесс, относятся динамика почвенной влаги, трансформация минеральных и органических форм азота, перенос нитратов по почвенному профилю. К сожалению, рамки данной статьи не позволяют рассмотреть решение совместной системы уравнений, описывающих теплообмен в почве, динамику почвенной влаги и содержание азота в корнеобитаемом слое почвы.

**Заключение.** В России процесс использования информационных технологий в точном земледелии находится на начальной стадии своего развития – теоретического обоснования и возможности практического использования, о чем говорят пока еще немногочисленные данные (Меньковская опытная станция Агрофизического института (Санкт-Петербург), хозяйства Курской области). Но уже они подтверждают рентабельность изысканий.

*Автор выражает благодарность доктору физико-математических наук, профессору О.Н. Гончаровой за плодотворные дискуссии по вопросам математического моделирования и численного исследования.*

## Библиографический список

1. Якушев В.П., Полуэктов Р.А., Э.И. Смоляр и др. Оценка технологий точного земледелия: аналитический обзор // *Агрохимический вестник*. – 2002. – №3.
2. Полуэктов Р.А. Модели продукционного процесса сельскохозяйственных культур. – СПб., 2006.
3. Хворова Л.А. Модель теплового режима почвы в пространственно-дифференцированных технологиях точного земледелия // *Научно-технические ведомости СПбГПУ*. – 2011. – №3.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М., 2004.
5. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М., 1978.
6. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск, 1967.
7. Гончарова О.Н. Расщепление по физическим процессам для расчета задач конвекции в двумерных областях с криволинейной границей // *Известия АлтГУ*. – 2009. – №1(61).