

Г.А. Семенов

**Выявление порога чувствительности  
спектрального метода к поиску периодического сигнала  
в нормальном шуме**

G.A. Semenov

**The Threshold Response Search of Spectral Analysis  
for Periodical Signal Detection in Gaussian Noise**

Приведены результаты теоретического и экспериментального выявления порога чувствительности спектрального метода анализа к поиску периодического сигнала в нормальном шуме. Описан сравнительный анализ полученных зависимостей.

**Ключевые слова:** выделение сигнала на фоне шума, спектральный анализ.

In this paper the results of theoretical and practical threshold response search of spectral analysis for periodical signal detection in Gaussian noise are presented. Comparative analysis of received dependences is described.

**Key words:** signal detection in noise, spectral analysis.

Задачи обнаружения периодических сигналов в шуме решаются при приеме и обработке сигналов различной природы во всевозможных технических устройствах. Основным инструментом поиска периодических компонент является спектральный анализ.

Настоящая работа посвящена выявлению границ применимости спектрального анализа к детектированию периодических сигналов в нормальном шуме.

Рассмотрим сигнал вида:

$$x(t) = \begin{cases} x_p(t) = x_0 \sin(\omega_0 t), & 0 \leq t \leq \alpha T \\ x_{ш}(t), & \alpha T < t \leq T, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\alpha \ll 1$  – относительная длительность периодического фрагмента;  $x_{ш}(t)$  – случайный сигнал (шум), имеющий несмещенную статистическую плотность распределения  $p(x)$  (нормированную на единицу) со средним квадратическим отклонением  $\sigma_{ш}$ .

Оценим значение  $\alpha_{cp}$  (т.е. диапазон значений  $\alpha \geq \alpha_{cp}$ ), при котором еще возможно обнаружить регулярную компоненту в сигнале типа (1), с помощью анализа спектра мощности исходного сигнала. При этом будем считать, что для анализа доступен только дискретный набор значений одной реализации сигнала, т.е. временной ряд  $x_n$ .

Фурье-образ сигнала (1) можно представить в виде:

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\alpha T} x_p(t) e^{-i\omega t} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha T}^T x_{ш}(t) e^{-i\omega t} dt = A_p(\omega) + A_{ш}(\omega), \quad (2)$$

где  $A_p(\omega)$  и  $A_{ш}(\omega)$  – Фурье-образы регулярной и случайной составляющих соответственно. В дискретном случае (для временного ряда  $x_n$ )

$$A(\omega_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^N x_n e^{-i\omega_k t_n}, \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{T}. \quad (3)$$

Односторонняя спектральная плотность мощности сигнала:

$$S(\omega) = \begin{cases} 2|A(\omega)|^2, & \omega \geq 0 \\ 0, & \omega < 0. \end{cases} \quad (4)$$

В соответствии с теоремой Парсеваля для регулярного сигнала:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x_p(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |A_p(\omega)|^2 d\omega = 2 \int_0^{\infty} |A_p(\omega)|^2 d\omega, \\ \langle x_p^2 \rangle \alpha T \approx \langle |A_p|^2 \rangle \Delta\omega \approx \langle |A_p|^2 \rangle \frac{2\pi}{\alpha T}. \quad (5)$$

Здесь  $\langle x_p^2 \rangle$  и  $\langle |A_p|^2 \rangle$  – средние квадраты (интенсивности) регулярной составляющей сигнала и ее Фурье-образа соответственно.

В оценке (5) использовалось соотношение неопределенностей  $\Delta\omega \alpha T \geq 2\pi$ .

Применяя теорему Парсеваля, аналогично для  $x_{ш}(t)$  в случае дискретного преобразования Фурье:

$$\langle x_{ш}^2 \rangle (1-\alpha) T \approx \langle |A_{ш}|^2 \rangle \Delta\Omega_{ш} \approx \langle |A_{ш}|^2 \rangle \frac{2\pi N}{T}, \quad (6)$$

где величина частотной полосы шума

$$\Delta\Omega_{ш} = \frac{2\pi N}{T}. \quad (7)$$

Из соотношений (5), (6) получаем уравнение для оценки величины  $\alpha_{ep}$ :

$$\frac{\alpha_{ep}^2 \langle x_p^2 \rangle}{1 - \alpha_{ep} \langle x_{ш}^2 \rangle} = \frac{\langle |A_p|^2 \rangle}{\langle |A_{ш}|^2 \rangle} \frac{1}{N}, \quad (8)$$

Обозначим относительную интенсивность регулярной составляющей сигнала:

$$\sqrt{\frac{\langle x_p^2 \rangle}{\langle x_{ш}^2 \rangle}} = \eta, \quad (9)$$

относительную оценку спектральной плотности регулярной компоненты –

$$\frac{\langle |A_p|^2 \rangle}{\langle |A_{ш}|^2 \rangle} = \frac{\langle S_p \rangle}{\langle S_{ш} \rangle} = \beta^2. \quad (10)$$

Разрешая (8) относительно  $\alpha_{ep} > 0$  в обозначениях (9)–(10) получаем:

$$\alpha_{ep} = \frac{\beta}{\eta\sqrt{N}} \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{4\eta^2 N} - \frac{\beta^2}{2\eta^2 N}}. \quad (11)$$

Если вид регулярной компоненты сигнала известен, величину  $\beta^2$  можно заменить отношением спектральной плотности мощности регулярной составляющей сигнала к спектральной плотности мощности шума на частоте  $\omega_0$ , соответствующей главной гармонике регулярной компоненты, так как на практике в алгоритме поиска периодичности используется не усредненное значение  $\langle S_p \rangle$ , а максимальное значение  $^{Max}S_p$  массива спектральной плотности исходного сигнала, на которое накладывается условие (12), легшее в основу алгоритма детектирования периодичности дискретного сигнала  $x_n$  (Шайдук А.М., Останин С.А., Семенов Г.А. Об улучшении чувствительности спектрального анализа // Лазеры. Измерения. Информация. СПб., 2010. С. 45):

$$S_0 > \sigma(S_{ш}) \ln\left(\frac{N}{2}\right). \quad (12)$$

Для получения результата в общем виде перепишем выражение для  $\beta^2$ , входящего в (11), используя условие (12), с учетом  $\langle S_{ш} \rangle = \sigma(S_{ш})$ :

$$\tilde{\beta}^2 = \frac{^{Max}S_p}{\langle S_{ш} \rangle} = \frac{\sigma(S_{ш}) \ln\left(\frac{N}{2}\right)}{\sigma(S_{ш})} = \ln\left(\frac{N}{2}\right), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{ep} &= \frac{\tilde{\beta}}{\eta\sqrt{N}} \sqrt{1 + \frac{\tilde{\beta}^2}{4N\eta^2} - \frac{\tilde{\beta}^2}{2N\eta^2}} = \\ &+ \frac{\sqrt{\ln\left(\frac{N}{2}\right)}}{\eta\sqrt{N}} \sqrt{1 + \frac{\ln\left(\frac{N}{2}\right)}{4N\eta^2} - \frac{\ln\left(\frac{N}{2}\right)}{2N\eta^2}}. \end{aligned} \quad (14)$$

В силу того, что для  $N \gg 1$  верно

$$\frac{\ln\left(\frac{N}{2}\right)}{N} \ll 1, \quad (15)$$

граничное значение (14), пренебрегая слагаемыми высоких порядков малости, можно переписать в виде:

$$\tilde{\alpha}_{ep} = \frac{1}{\eta} \sqrt{\frac{\ln\left(\frac{N}{2}\right)}{N}}. \quad (16)$$

Таким образом, мы получили общее выражение для граничного значения относительной длительности периодического фрагмента, при котором еще возможно его обнаружение классическим спектральным методом анализа. Видно, что величина  $\tilde{\alpha}_{ep}$  зависит только от объема исследуемой выборки и относительной оценки спектральной плотности мощности регулярной компоненты, т.е. отношения спектральной плотности мощности регулярной компоненты к спектральной плотности мощности шума на частоте, соответствующей главной гармонике регулярного сигнала.

Границы применимости классического спектрального метода анализа для детектирования периодического фрагмента также были установлены посредством численного моделирования с применением алгоритма, основанного на использовании соотношения (12).

Численный эксперимент проводился для временных рядов, соответствующих сигналам вида (1), для выборок объемами  $N = 10^4$  и  $N = 10^5$  элементов. Изменяемыми параметрами временных рядов являлись относительная длительность периодического фрагмента  $\alpha$ , относительная интенсивность периодического фрагмента  $\eta$ . Контрольный параметр – двоичный результат проверки условия (12) для массива спектральной плотности мощности исследуемых временных рядов (при этом дополнительно проверялось соответствие найденного значения частоты периодического фрагмента, для которой условие было выполнено, – с истинным моделируемым значением частоты периодического фрагмента). Для каждого конкретного набора параметров ( $N$ ,  $\alpha$ ,  $\eta$ ) проверка условия (12) проводилась  $10^4$  раз. Количество положительных исходов, отнесенное к общему количеству испытаний, определяло вероятности успешного детектирования периодического фрагмента при заданном наборе контрольных параметров:

$$P(N, \alpha, \eta) = \frac{m}{10000}, \quad (17)$$

где  $m$  – количество положительных исходов испытания (проверки условия (12) для всех значений массива  $S(\omega_k)$ ).

Построение зависимости  $P(N, \alpha)$  для фиксированных значений  $\eta$  сделало возможным определение связи граничных значений данных параметров  $\alpha_{сп}$  и  $\eta_{сп}$ , для которых еще возможно проведение успешного детектирования, и сравнить полученные результаты с аналогичными теоретическими результатами (соотношение (16)).

При проведении эксперимента результат детектирования считался успешным, если количество отрицательных исходов не превышало 10%, т.е. значение эмпирически определенной вероятности

$$P(N, \alpha, \eta) \geq 0,9, \quad (18)$$

$$m \geq 9 \cdot 10^3. \quad (19)$$

На рисунке 1 приведена зависимость  $P(\alpha)$  вероятности обнаружения периодического фрагмента от его относительной длительности для разных значений относительной интенсивности периодического фрагмента  $\eta$  для выборок объемом  $N = 10^4$  элементов.

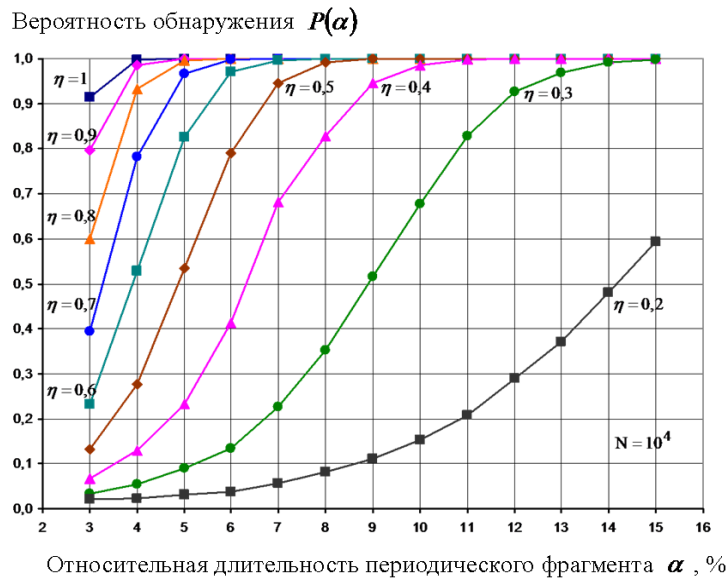


Рис. 1. Зависимость вероятности обнаружения периодического фрагмента от его относительной длительности при разных относительных интенсивностях

Линии, соединяющие экспериментальные точки на рисунке 1 (и последующем рисунке 3), проведены для наглядности, смысловой нагрузки не несут; подписи рядом с каждой кривой на рисунке соответствуют значениям параметров, для которых данная кривая была построена, также приведены для большей наглядности.

Анализ рисунка 1 позволил установить, что успешное детектирование (с вероятностью  $\geq 0,9$ ) периодического фрагмента с единичной относительной интенсивностью ( $\eta = 1$ ) возможно при относительной длительности периодического фрагмента  $\alpha \geq 3\%$ , а, например, для периодического фрагмента с половинной относительной интенсивностью ( $\eta = 0,5$ ) – при  $\alpha \geq 7\%$ .

На рисунке 2 представлены зависимости граничного значения относительной длительности периодического фрагмента, достаточной для его успешного детектирования (в случае выполнения условий (18)–(19)) от относительной интенсивности периодического фрагмента, полученные экспери-

ментально и теоретически в диапазоне  $0,3 \leq \eta \leq 1,0$  для выборок объемом  $N = 10^4$  элементов.

Из рисунка 2 видно, что теоретические граничные значения параметров периодического фрагмента, при которых еще возможно его успешное детектирование в шуме, несколько ниже значений, полученных экспериментально (все отличия лежат в пределах 20%), однако сами зависимости при этом имеют аналогичный вид.

Таким образом, с учетом того, что полученные значения параметров, необходимые для детектирования, во-первых, являются граничными, а во-вторых, задаются исходя из требований точности (т.е. в некоторой степени произвольно), можно сделать вывод, что эксперимент адекватно подтвердил результаты, полученные теоретически для данных наборов параметров.

На рисунке 3 приведены результаты численного эксперимента по выявлению границ применимости классического спектрального метода анализа, проведенного для выборок объемом  $N = 10^3$  элементов.

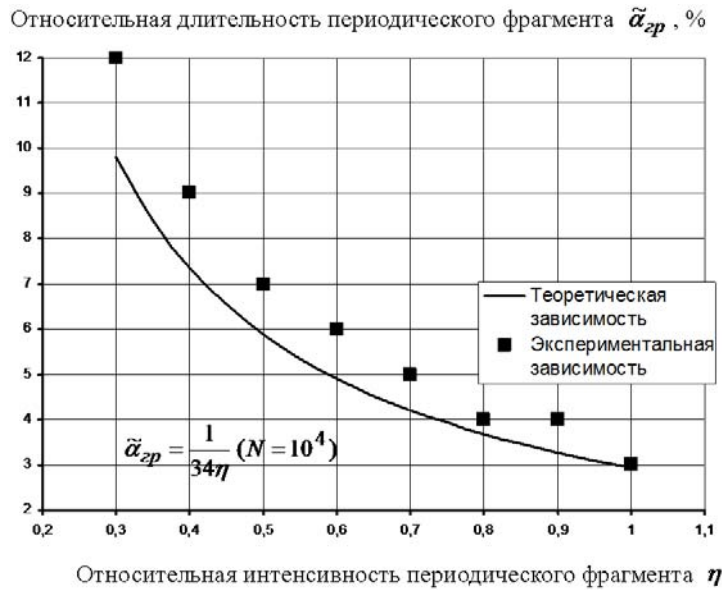


Рис. 2. Зависимость граничного значения относительной длительности периодического фрагмента от его относительной интенсивности при успешном детектировании

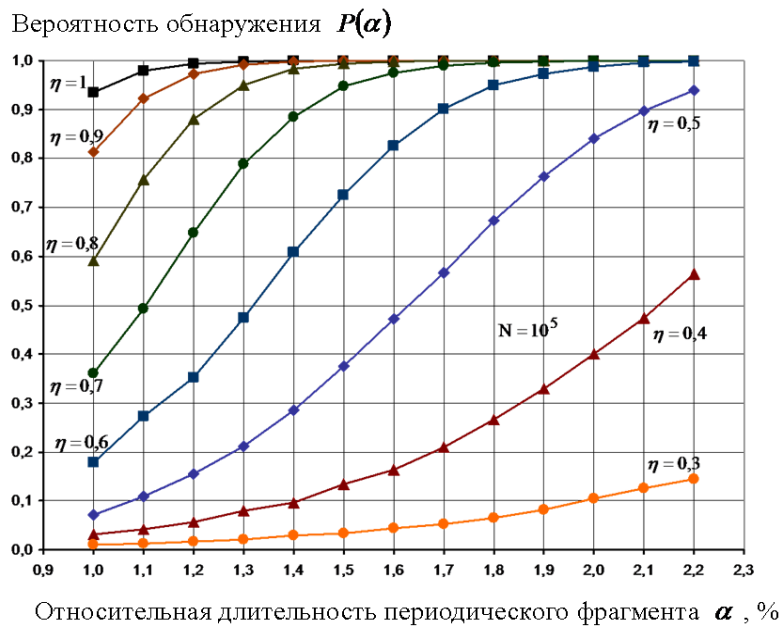


Рис. 3. Зависимость вероятности обнаружения периодического фрагмента от его относительной длительности при разных относительных интенсивностях

Диапазон изменения относительной интенсивности периодического фрагмента сигнала при этом оставался прежним –  $0,3 \leq \eta \leq 1,0$ ; диапазон изменения значений относительной длительности периодического фрагмента, в котором происходили характерные изменения зависимости  $P(N, \alpha)$ , был выявлен эмпирически в ходе эксперимента:  $1,0\% \leq \alpha \leq 2,2\%$ .

Из рисунка 3 видно, что успешное детектирование (с вероятностью  $\geq 0,9$ ) периодического фрагмен-

та с единичной относительной интенсивностью ( $\eta = 1$ ) возможно при относительной длительности периодического фрагмента  $\alpha \geq 1\%$ , для фрагмента с половинной относительной интенсивностью ( $\eta = 0,5$ ) – при  $\alpha \geq 2,2\%$ .

Рисунок 4 иллюстрирует зависимости, аналогичные приведенным на рисунке 2, для выборок объемом  $10^5$  элементов в диапазоне относительной интенсивности периодического фрагмента сигнала  $0,5 \leq \eta \leq 1,0$ .

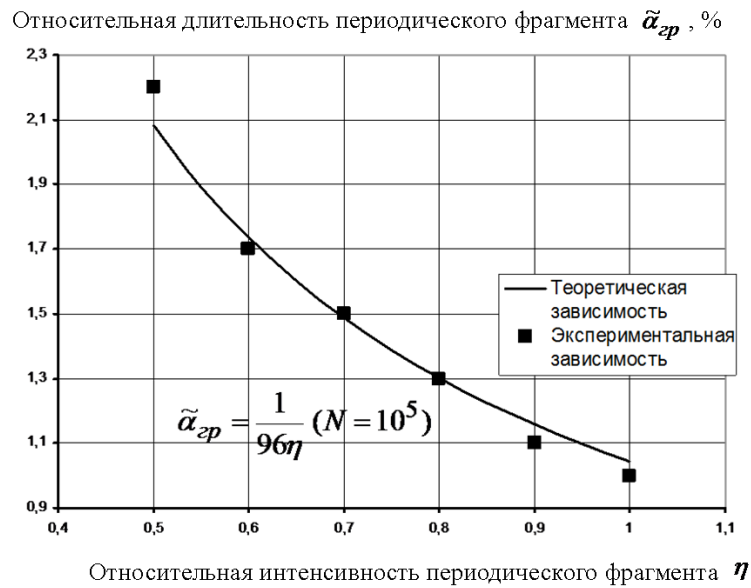


Рис. 4. Зависимость граничного значения относительной длительности периодического фрагмента от его относительной интенсивности при успешном детектировании

Анализ рисунка 4 позволяет сделать вывод, что, как и в случае для выборок объемом  $N = 10^4$  элементов, характер теоретической и экспериментальной зависимостей полностью аналогичен, причем в данном случае отличие экспериментальных и теоретических значений не превосходит 5,5%.

Таким образом, в ходе проведенного эксперимента было установлено, что в случае выборок объемом  $N = 10^5$  элементов экспериментальные

результаты также адекватно согласуются с теоретическими результатами, причем с лучшей точностью.

На основе соотнесения теоретических и экспериментальных результатов можно сделать вывод, что полученное выражение (16) позволяет адекватно находить граничные значения чувствительности спектрального метода к детектированию периодических сигналов в нормальном шуме.