УДК 53.087/.088

Г.А. Семенов

Поиск сигнала в нормальном шуме методом анализа статистики спектра

G.A. Semenov

Signal Search in Gaussian Noise by Spectrum's Statistics Analysis

Рассмотрен статистический метод детектирования периодических компонент сигналов в нормальном шуме. Разработан алгоритм для автоматического детектирования сигналов спектральным методом анализа.

Ключевые слова: выделение сигнала на фоне шума, спектральный анализ.

In this paper the statistic method of periodical signal detection in Gaussian noise is described. The spectral analysis algorithm for automatic signal detection is created.

Key words: signal detection in noise, spectral analysis.

Задачи обнаружения периодических сигналов в шуме решаются при приеме и обработке сигналов различной природы во всевозможных технических устройствах. Спектральный анализ применяется для обнаружения периодических сигналов малой длительности в различных областях, таких как радио- и эхолокация, лазерная доплеровская анемометрия, пассивное зондирование, лидарные измерения. Периодические сигналы малой длительности в шуме также могут быть сгенерированы разного рода открытыми динамическими системами, эволюционирующими в режиме перемежаемости (например, генерация лазера).

Настоящая работа посвящена статистической формализации детектирования периодической компоненты сигнала классическим спектральным методом.

Пусть существует некоторая реализация квазислучайного центрированного сигнала $x(t)$ на отрезке времени $0 \le \mathbf{t} \le T$. Разобьем отрезок $[0, T]$ на одинаковые интервалы $\Delta t = \frac{T}{N}$, т.е. $t_n = \frac{Tn}{N}$. Сигнал $x(t)$, измеренный в этих точках, порождает числовую последовательность (временной ряд) $x_n = x(t_n)$. Будем считать число N элементов этой последовательности достаточно большим, т.е. $N >> 1$.

Рассмотрим сигнал вида:

$$x(t) = \begin{cases} x_P(t) = x_0 \sin(\omega_0 t), & 0 \le t \le \alpha T \\ x_Ш(t), & \alpha T < t \le T, \end{cases} \tag{1}$$

где $\alpha << 1$ – относительная длительность периодического фрагмента; $x_Ш(t)$ – случайный сигнал (шум), имеющий несмещенную статистическую плотность распределения $p(x)$ (нормированную на единицу) со средним квадратическим отклонением $\sigma_Ш$.

Вероятность $dW(x)$ получить в некоторый произвольный момент времени значение сигнала x в интервале dx при этом равна:

$$dW(x) = p(x)dx, \tag{2}$$

доля значений x, не превосходящих некоторое $x_0 \in [0; \infty)$,

$$W(x \le x_0) = \int_0^{x_0} p(x)dx \, . \tag{3}$$

Естественным обобщением выражения (2) на дискретный сигнал x_n является соотношение:

$$\frac{\Delta N(x)}{N} = p(x)\Delta x \, . \tag{4}$$

По известной статистической плотности распределения сигнала получим выражение для плотности распределения значений его спектральной плотности. Это позволит сформулировать критерий выброса, позволяющий выявить значения спектра, не принадлежащие статистике нормального шума. При этом будем считать, что для анализа доступен только дискретный набор значений одной реализации сигнала, т.е. временной ряд x_n.

Фурье-образ сигнала (1) можно представить в виде:

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\alpha T} x_P(t) e^{-i\omega t} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha T}^{T} x_Ш(t) e^{-i\omega t} dt =$$

$$= A_P(\omega) + A_Ш(\omega) \tag{5}$$

где $A_P(\omega)$ и $A_Ш(\omega)$ – Фурье образы регулярной и случайной составляющих соответственно.

В дискретном случае (для временного ряда x_n)

$$A(\omega_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{N} x_n e^{-i\omega_k t_n} \, , \; \omega_k = \frac{2\pi k}{T} \, . \tag{6}$$

Односторонняя спектральная плотность мощности сигнала (односторонний спектр):

$$S(\omega)=\begin{cases}2\left|A(\omega)\right|^2, & \omega\ge 0\\ 0, & \omega<0.\end{cases} \tag{7}$$

Ясно, что в дискретном случае объем массива односторонней спектральной плотности мощности $S(\omega_k)$, соответствующей временному ряду x_n объемом N, равен $\frac{N}{2}$. Для сигнала (1) односторонний спектр ($\omega \ge 0$) представится в виде:

$$S(\omega)=2\left|A(\omega)\right|^2=2\Big(\left|A_P(\omega)\right|^2+\left|A_Ш(\omega)\right|^2+ +A_P^*(\omega)A_Ш(\omega)+A_P(\omega)A_Ш^*(\omega)\Big). \tag{8}$$

Пренебрегая в выражении (8) малыми слагаемыми, можно записать:

$$S(\omega)\approx S_P(\omega)+S_Ш(\omega). \tag{9}$$

Дальнейшие преобразования будем проводить в приближения (9).

Рассмотрим компоненту спектра $S_Ш(\omega)$, соответствующую случайной составляющей $x_Ш(t)$ в предположении, что ее функция распределения $p(x)$ является нормальной.

В работе Р. Фано «Передача информации. Статистическая теория связи (М., 1965, с. 188) показано, что для случайного центрированного сигнала $x_Ш(t)$, имеющего плотность распределения Гаусса:

$$p\left(x_Ш\right)=\frac{1}{\sigma_Ш\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_Ш^2}{2\sigma_Ш^2}}, \tag{10}$$

действительная и мнимая части Фурье-образа $A_Ш(\omega)$ имеют гауссовские (нормальные) плотности распределения с одинаковыми дисперсиями $\sigma_A^2\equiv\sigma_{\operatorname{Re}A_Ш}^2=\sigma_{\operatorname{Im}A_Ш}^2$ и нулевыми средними, т.е.

$$p\left(\operatorname{Re}A_Ш\right)=\frac{1}{\sigma_A\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\operatorname{Re}A_Ш\right)^2}{2\sigma_A^2}},$$

$$p\left(\operatorname{Im}A_Ш\right)=\frac{1}{\sigma_A\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\operatorname{Im}A_Ш\right)^2}{2\sigma_A^2}}. \tag{11}$$

С учетом независимости действительной и мнимой частей Фурье-образа сигнала $x_Ш$ запишем выражение для вероятности $dW\left(A_Ш\right)$ попадания комплексного значения $A_Ш$ в элемент площади $d\left(\operatorname{Re}A_Ш\right)d\left(\operatorname{Im}A_Ш\right)$ на плоскости комплексных чисел:

$$dW\left(A_Ш\right)=p\left(\operatorname{Re}A_Ш\right)p\left(\operatorname{Im}A_Ш\right)d\left(\operatorname{Re}A_Ш\right)d\left(\operatorname{Im}A_Ш\right)=$$

$$=\frac{1}{\sigma_A\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\operatorname{Re}A_Ш\right)^2}{2\sigma_A^2}}\frac{1}{\sigma_A\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\operatorname{Im}A_Ш\right)^2}{2\sigma_A^2}}d\left(\operatorname{Re}A_Ш\right)d\left(\operatorname{Im}A_Ш\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_A^2}e^{-\frac{\left(\operatorname{Re}A_Ш\right)^2+\left(\operatorname{Im}A_Ш\right)^2}{2\sigma_A^2}}d\left(\operatorname{Re}A_Ш\right)d\left(\operatorname{Im}A_Ш\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_A^2}e^{-\frac{\left|A_Ш\right|^2}{2\sigma_A^2}}d\left(\operatorname{Re}A_Ш\right)d\left(\operatorname{Im}A_Ш\right). \tag{12}$$

Используя (12), запишем выражение для вероятности попадания значения модуля Фурье-образа $\left|A_Ш\right|$ в элементарное кольцо $d\left(\left|A_Ш\right|\right)$ на комплексной плоскости:

$$dW\left(\left|A_Ш\right|\right)=2\pi\left|A_Ш\right|d\left(\left|A_Ш\right|\right)\frac{1}{2\pi\sigma_A^2}e^{-\frac{\left|A_Ш\right|^2}{2\sigma_A^2}}=$$

$$\frac{\left|A_Ш\right|}{\sigma_A^2}e^{-\frac{\left|A_Ш\right|^2}{2\sigma_A^2}}d\left(\left|A_Ш\right|\right)=\frac{1}{2\sigma_A^2}e^{-\frac{\left|A_Ш\right|^2}{2\sigma_A^2}}d\left(\left|A_Ш\right|^2\right)=$$

$$=\frac{1}{4\sigma_A^2}e^{-\frac{2\left|A_Ш\right|^2}{4\sigma_A^2}}d\left(2\left|A_Ш\right|^2\right), \tag{13}$$

откуда, можно выделить плотность распределения квадрата модуля Фурье-образа сигнала $\left|A_Ш\right|^2$:

$$p\left(\left|A_Ш\right|^2\right)=\frac{1}{2\sigma_A^2}e^{-\frac{\left|A_Ш\right|^2}{2\sigma_A^2}}. \tag{14}$$

Таким образом, из выражений (13)–(14) следует, что функция распределения односторонней спектральной плотности мощности $S_Ш(\omega)$ имеет вид экспоненциального распределения:

$$p\left(S_Ш\right)=\frac{1}{\sigma\left(S_Ш\right)}e^{-\frac{S_Ш}{\sigma\left(S_Ш\right)}},\ S_Ш>0, \tag{15}$$

где $\sigma\left(S_Ш\right)=4\sigma_A^2$ – среднее квадратическое отклонение значений спектральной плотности случайной составляющей сигнала. Среднее значение $\left\langle S_Ш\right\rangle$ массива $S_Ш(\omega_k)$ при этом равно:

$$\left\langle S_Ш\right\rangle=\int_0^\infty S_Ш\,p\left(S_Ш\right)d\left(S_Ш\right)=$$

$$=\sigma\left(S_Ш\right)\int_0^\infty\frac{S_Ш}{\sigma\left(S_Ш\right)}e^{-\frac{S_Ш}{\sigma\left(S_Ш\right)}}d\left(\frac{S_Ш}{\sigma\left(S_Ш\right)}\right)=\sigma\left(S_Ш\right). \tag{16}$$

Используя соотношение (3) для одностороннего дискретного спектра $S_Ш(\omega_k)$, получим выражение для количества элементов массива $\tilde{N}$, удовлетворяющих условию $S_Ш(\omega_i)\le S_0$ для произвольного S_0:

$$\tilde{N}\left(S_0\right)=\frac{N}{2}\int_0^{S_0}p\left(S'\right)dS'=$$

$$=\frac{N}{2}\int_0^{S_0}\frac{1}{\sigma\left(S_Ш\right)}e^{-\frac{S'}{\sigma\left(S_Ш\right)}}dS'=\frac{N}{2}\left(1-e^{-\frac{S_0}{\sigma\left(S_Ш\right)}}\right) \tag{17}$$

Ясно, что $\tilde{N}\left({}^{Max}S_Ш\right)=\frac{N}{2}$, где ${}^{Max}S_Ш$ – максимальный элемент массива $S_Ш(\omega_k)$.

Найдем S_0 такое, что $\tilde{N}\left(S_0\right)>\frac{N}{2}-1$:

$$\frac{N}{2}\left(1-e^{-\frac{S_0}{\sigma\left(S_Ш\right)}}\right)>\frac{N}{2}-1\ \Rightarrow\ \frac{N}{2}e^{-\frac{S_0}{\sigma\left(S_Ш\right)}}<1,$$

откуда

$$S_0>\sigma\left(S_Ш\right)\ln\left(\frac{N}{2}\right). \tag{18}$$

Выразим значение $\sigma(S_Ш)$ через параметры исходного сигнала. Для этого запишем теорему Парсеваля для случайной составляющей сигнала $x_Ш(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_Ш^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|A_Ш(\omega)\right|^2 d\omega \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_0^{(1-\alpha)T} x_Ш^2(t)\,dt = \int_{-\frac{\Delta\Omega_Ш}{2}}^{\frac{\Delta\Omega_Ш}{2}} \left|A_Ш(\omega)\right|^2 d\omega = \tag{19}$$
$$= 2\int_0^{\frac{\Delta\Omega_Ш}{2}} \left|A_Ш(\omega)\right|^2 d\omega.$$

где $(1-\alpha)T$ – длительность случайной составляющей сигнала (1); $\Delta\Omega_Ш$ – ширина частотной полосы шума.

С учетом того, что компоненты $\operatorname{Re} A_Ш$ и $\operatorname{Im} A_Ш$ имеют идентичные плотности распределения, исходя из определения односторонней спектральной плотности (7), выражение (19) можно переписать в виде:

$$\int_0^{(1-\alpha)T} x_Ш^2(t)\,dt = 2\int_0^{\frac{\Delta\Omega_Ш}{2}} \left|A_Ш(\omega)\right|^2 d\omega =$$
$$= 2\int_0^{\frac{\Delta\Omega_Ш}{2}} \left(\left(\operatorname{Re} A_Ш(\omega)\right)^2 + \left(\operatorname{Im} A_Ш(\omega)\right)^2\right) d\omega =$$
$$= 2\int_0^{\frac{\Delta\Omega_Ш}{2}} \left(\left(\operatorname{Re} A_Ш(\omega)\right)^2 + \left(\operatorname{Re} A_Ш(\omega)\right)^2\right) d\omega, \text{ т.е.}$$
$$\int_0^{(1-\alpha)T} x_Ш^2(t)\,dt = 4\int_0^{\frac{\Delta\Omega_Ш}{2}} \left(\operatorname{Re} A_Ш(\omega)\right)^2 d\omega. \tag{20}$$

Домножим обе части соотношения (20) на $\frac{1}{(1-\alpha)T}$, числитель и знаменатель правой части (20) – на $\frac{\Delta\Omega_Ш}{2}$:

$$\left(\frac{1}{(1-\alpha)T}\int_0^{(1-\alpha)T} x_Ш^2(t)\,dt\right) =$$
$$= \frac{4}{(1-\alpha)T}\frac{\Delta\Omega_Ш}{2}\left(\frac{1}{\frac{\Delta\Omega_Ш}{2}}\int_0^{\frac{\Delta\Omega_Ш}{2}} \left(\operatorname{Re} A_Ш(\omega)\right)^2 d\omega\right). \tag{21}$$

Поскольку $x_Ш$ и $\operatorname{Re} A_Ш$ – нормально распределенные случайные величины с нулевыми средними, после интегрирования выражение (21) примет вид:

$$\sigma_Ш^2 = \frac{2\Delta\Omega_Ш}{(1-\alpha)T}\sigma_A^2. \tag{22}$$

В дискретном случае ширина частотной полосы определяется как

$$\Delta\Omega_Ш = \frac{2\pi N}{T}, \tag{23}$$

где N – количество элементов временного ряда x_n.

Выражая из (22) с учетом (23) величину $4\sigma_A^2$, равную искомому среднему квадратическому отклонению односторонней спектральной плотности $\sigma(S_Ш)$, получаем:

$$\sigma(S_Ш) = 4\sigma_A^2 = \frac{(1-\alpha)T^2}{\pi N}\sigma_Ш^2. \tag{24}$$

Таким образом, условие (18) примет вид:

$$S_0 > \frac{(1-\alpha)T^2}{\pi N}\sigma_Ш^2 \ln\left(\frac{N}{2}\right). \tag{25}$$

Выражение (25) будем считать критерием выброса (промаха) для массива значений $S_Ш(\omega_k)$, позволяющим выявить элементы, принадлежащие другой статистике (в нашем случае соответствующей регулярной компоненте сигнала). То есть в случае если существует $S_0 \in S(\omega_k)$, удовлетворяющее условию (25), возможно обнаружение регулярной составляющей в сигнале типа (1) с помощью анализа спектра мощности исходного сигнала.

Таким образом, алгоритм детектирования периодичности дискретного сигнала x_n можно представить следующим образом:

1. Вычисление одностороннего спектра мощности $S(\omega_k)$ временного ряда x_n (используя выражения (6), (7));
2. Поиск максимального значения ${}^{Max}S(\omega_j)$ массива $S(\omega_k)$;
3. Проверка условия (25) для значения ${}^{Max}S(\omega_j)$:

$${}^{Max}S(\omega_j) > \frac{(1-\alpha)T^2}{\pi N}\sigma_Ш^2 \ln\left(\frac{N}{2}\right).$$

В случае положительного результата делается вывод о наличии в сигнале регулярной составляющей с частотой $\omega_0 \approx \omega_j$ для некоторого j.

Отметим, что условия (18) и (25) являются эквивалентными, однако вычисление правой части (25) требует меньшего количества математических операций.

Созданный алгоритм позволяет осуществлять техническую реализацию детектирования периодических сигналов в нормальном белом шуме классическим спектральным методом. Формализацию данного алгоритма для шумовых сигналов, имеющих иную статистику, следует проводить аналогичным образом, подставляя в исходные соотношения соответствующие плотности распределения сигнала.