

УДК 532.526/ 532.529

Д.И. Попов, А.М. Сагалаков

**Спектр одной граничной задачи
для модели двухскоростной жидкости**

D.I. Popov, A.M. Sagalakov

**The Spectrum of One Boundary Task
for a Two-Speed Liquid Model**

Получены оценки области, содержащей спектр линеаризованного оператора для монодисперсной смеси. Представлена псевдоспектральная схема решения спектральной задачи методом Галеркина с использованием полиномов Чебышева.

Ключевые слова: метод Галеркина, псевдоспектральный метод, параллельные течения, монодисперсная смесь, показатели Ляпунова.

The authors estimate field containing spectra of linearized operator for mono-disperse mixture. They produced pseudo-spectral scheme based on Galerkin's method using Chebyshev's polynomials for spectral problem.

Key words: Galerkin's method, pseudo-spectral method, parallel flow, mono-disperse mixture, Lyapunov's exponents.

Введение. Модель монодисперсной смеси, межфазное взаимодействие в которой определяется силой Стокса [1], представляет собой пример простого, но нетривиального описания двухскоростного гидродинамического движения, которому будут соответствовать различные граничные задачи для системы уравнений смешанного типа. Вообще такие уравнения можно представить в виде

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{u} / \partial t + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} - (\rho / \tau)(\mathbf{v} - \mathbf{u}) &= \mathbf{f}_1, \\ \partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} - (1 / \tau)(\mathbf{u} - \mathbf{v}) &= \mathbf{f}_2, \\ \partial \rho / \partial t + (\mathbf{v} \nabla) \rho + \rho(\nabla \mathbf{v}) &= \mathbf{f}_3. \quad \text{div } \mathbf{u} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь величина $\tau = SR$ ($v = 1 / R$) – безразмерное время стоксовой скоростной релаксации; R – число Рейнольдса; S – параметр, определяющий степень дисперсности примеси; ρ – безразмерная массовая плотность примеси. Разрешимость граничных задач для системы уравнений (1) в общем случае представляет отдельный технически сложный вопрос. Нас прежде всего будут интересовать спектр линеаризованного оператора для (1) и задача устойчивости по Ляпунову некоторой неподвижной точки системы (1). Известно [2, 3], что уравнение Навье-Стокса обладает хотя бы одной неподвижной точкой при всех числах Рейнольдса. Например, легко проверяется, что параллельные течения будут решением уравнений (1), если профиль сдвигового течения совпадает в обеих фазах [1]. Численный эксперимент показывает [1, 4], что достаточные условия устойчивости стационарных решений принимают сложную форму. Нейтральные и критические зависимости могут состоять из нескольких подобластей, окружающих области вязкой генера-

ции, а порог устойчивости в некоторых случаях повышается практически на порядок. Далее в работе объемная концентрация примеси считается постоянной.

Модельная задача. Линеаризуя уравнения (1) в окрестности неподвижной точки $\{U, U, \rho\}$ в виде $y = y(x)e^{\lambda t}$, получим следующий результат:

$$\begin{aligned} \lambda P \mathbf{u} + P(\mathbf{U} \nabla) \mathbf{u} + P(\mathbf{u} \nabla) \mathbf{U} - (\rho / \tau) P(\mathbf{v} - \mathbf{u}) - \nu P \Delta \mathbf{u} &= P \mathbf{f}_1, \\ \lambda \mathbf{v} + (\mathbf{U} \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{U} - (1 / \tau)(\mathbf{u} - \mathbf{v}) &= \mathbf{f}_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\lambda = -i\alpha C$ – характеристические показатели Ляпунова [5], $\rho = \text{const}$. Будем считать, что носитель Ω – открытая, локально звездная, ограниченная подобласть в E^n ($n = 2, 3$) с липшицевой границей $\partial \Omega$. Для определенности здесь и далее будем рассматривать однородные граничные условия $\mathbf{u}|_{\partial \Omega} = 0$, $(\mathbf{s} \mathbf{v})|_{\partial \Omega} = 0$, \mathbf{s} – нормаль к $\partial \Omega$. Отметим, что, вообще говоря, последние два условия надо понимать в том смысле, что искомые функции исчезают на границе в некотором обобщенном смысле. Например, функции принадлежат ядру оператора сужения на $\partial \Omega$. В случае $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_2 = 0$ будем говорить об уравнениях (2) с граничными условиями как о спектральной задаче для оператора

$$A = \begin{bmatrix} (\rho / \tau) P + PK - \nu P \Delta & -(\rho / \tau) P \\ -(1 / \tau) I & K + (1 / \tau) I \end{bmatrix}, \quad (3)$$

заданного на некотором нормированном пространстве $X = X_1 \times X_2$ (P – проектор в X_1) с нормой и скалярным произведением следующего вида:

$$\|u\|_X^2 = \|u_1\|_{X_1}^2 + \|u_2\|_{X_2}^2, \quad \langle u, v \rangle_X = \langle u_1, v_1 \rangle_{X_1} + \langle u_2, v_2 \rangle_{X_2},$$

где $u=\{u_1, u_2\}$, $v=\{v_1, v_2\}$ – пары такие, что $u_i \in X_1$, $u_2 \in X_2$, $v_1 \in X'_1$, $v_2 \in X'_2$.

Здесь X' обозначает топологически сопряженное. Известно, что такому выбору нормировки соответствует равенство $X'=X'_1 \times X'_2$. В дальнейшем нас, как правило, будут интересовать только гильбертовы пространства. Далее будем понимать X в смысле декартова произведения $X_1 \times X_2$.

Функциональные пространства. Рассмотрим следующие обозначения:

$$H_\omega^s(\Omega) = \{D^k v \in L_{2,\omega}(\Omega), k = 0, \dots, s\},$$

$$H_{0,\omega}^1(\Omega) = \{v \in H_\omega^1(\Omega), v|_{\partial\Omega} = 0\},$$

оснащенные соответствующей нормой

$$\|v\|_{s,\omega} = \left(\int_\Omega \sum_{k=0}^s \sum_{(k)} |D^k v|^2 \omega dx \right)^{1/2}.$$

Если весовая функция $\omega = 1$, то соответствующий индекс не указывается. Рассмотрим декартовы произведения

$$L_2(\Omega) = (L_2(\Omega))^n, \quad H_\omega^s(\Omega) = (H_\omega^s(\Omega))^n,$$

$$H_{0,\omega}^1(\Omega) = (H_{0,\omega}^1(\Omega))^n$$

соответствующих пространств, оснащенных надлежащими нормами и скалярными произведениями. Носитель в обозначениях пространств не указан там, где это не вызывает недоразумений. Обозначим через S_2 замыкание в L_2 множества векторов

$$V = \{u : u \in C_0^\infty(\Omega), \operatorname{div} u = 0\},$$

а через G_2 – ортогональное дополнение S_2 в L_2 . Детальное обсуждение указанных подпространств и краевых условий для различных классов границ можно найти в работах [6–8]. Здесь примем тот факт, что пространство L_2 допускает разложение на ортогональную сумму $L_2 = S_2 \oplus G_2$. Решение отыскивается на классах функций следующего вида:

$$S_2(\Omega) = \{u : u \in L_2(\Omega), \operatorname{div} u = 0, u \cdot n|_{\partial\Omega} = 0\},$$

$$G_2(\Omega) = \{u : u \in L_2(\Omega), u = \operatorname{grad} p, p \in W_2^{(1)}(\Omega)\}.$$

Обозначим через P оператор проектирования из L_2 на S_2 такой, что $S_2 = PL_2$. Известно, что оператор P ограничен и справедлива оценка (см.: [6, 7, 9]) $\|P\|_{L_2 \rightarrow S_2} \leq 4c(\partial\Omega)$. Таким образом, решения для несущей жидкости должны быть элементами S_2 , тогда как, вообще говоря, решение для дисперсной фазы является элементом из L_2 , поскольку физически не является необходимым несжимаемость примеси. Причем в линеаризованном случае уравнение сплошности для второй фазы, очевидно, отщепляется и не определяет спектр. Однако в работе будет рассмотрен и случай несжимаемой дисперсной фазы – практически это возможно, когда размеры включений и концентрация примеси достаточно малы. Обозначим через $u \in S_2$ решение для несущей жидкости и $v \in L_2$ – для примеси. Таким обра-

зом, в дальнейшем примем $X_1 = S_2$, $X_2 = L_2$, которые можно отождествлять с соответствующими сопряженными пространствами. Снабдим пространство $X_2 = L_2$ скалярным произведением $(\xi, \zeta)_{X_2} = \rho(\xi, \zeta)_{L_2}$.

Все операторы в (3) понимаются в смысле расширений T таких, что PT замкнут на S_2 с плотной в S_2 областью определения $D^{(S)}(T) = S_2 \cap D(T)$, т.е. $PT = (PT)''$ для каждого T (см. [8]). Без ограничения общности можно считать, что операторы T определены и действуют в L_2 , а PT в S_2 для $u \in D^{(S)}(T)$.

Спектр. В первую очередь установим множество точек $\sigma \in Z$ комплексной плоскости, для которых разрешима задача $\sigma u - Au = f$ для $u \in X$, $f \in X$.

Определим числовой образ оператора A через $\langle Au, y \rangle_X = (Au, u)_{X_1} + (Av, v)_{X_2}$

$$\begin{aligned} \langle Au, y \rangle_X &= -v(\tilde{\Delta}u, u)_{S_2} + (Ku, u)_{S_2} + \tau_1(u, u)_{S_2} - \\ &\tau_1(Pv, u)_{S_2} - \tau_1(u, v)_{L_2} + \rho(Kv, v)_{L_2} + \tau_1(v, v)_{L_2}, \end{aligned} \quad (4)$$

$u \in S_2, v \in L_2$

Оператор $\tilde{\Delta} = P\Delta$, заданный на S_2 , детально исследован в работах [6–8]. Известно, что для элементов $u \in H_0^1(\Omega)$ оператору $\tilde{\Delta} = P\Delta$ на S_2 соответствует коэрцитивная квадратичная форма $-v(\tilde{\Delta}u, u)_{S_2} = v[u, u] \geq c\|u\|_{S_2}^2$, где $[u, u]$ – интеграл Дирихле. Для слагаемых вида $(Pv, u)_{S_2}$, учитывая свойство идемпотентности оператора P , можно непосредственно установить $(Pv, u)_{S_2} = (Pv, P'u)_{L_2} = (v, (P')^2 u)_{L_2} = (v, P'u)_{L_2} = (v, u)_{S_2}$, $u \in S_2, v \in L_2$.

Аналогичные рассуждения приводят к следующей цепочке:

$$(u, v)_{L_2} = (Pu, v)_{L_2} = (P^2 u, v)_{L_2} = (Pu, P'v)_{L_2} = \overline{(v, u)}_{S_2},$$

$u \in S_2, v \in L_2$.

Откуда получим следующее выражение для суммы слагаемых:

$$(Pv, u)_{S_2} + (u, v)_{L_2} = (v, u)_{S_2} + \overline{(v, u)}_{S_2} = 2 \operatorname{Re}\{(v, u)_{S_2}\}.$$

Собирая все слагаемые в (4) с множителем τ_1 , получим величину $\|u - v\|_{L_2}^2 \geq 0$.

Оператор K определен для элементов $u \in H_0^1(\Omega)$, для того чтобы оценить величины $(Ku, u)_{S_2}$ и $(Kv, v)_{L_2}$, получим предварительные неравенства, полагая, что компоненты вектора U являются функциями класса C^2 ,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |(U_i D_i u_k, u_k)_{L_2}| &\leq \max_\Omega |U| \sum_{i=1}^n |(D_i u_k, u_k)_{L_2}| \leq \\ &\leq \max_\Omega |U| \sum_{i=1}^n \|u_k\|_{L_2} \|D_i u_k\|_{L_2} \leq \end{aligned}$$

$$\leq (1/2) \max_{\Omega} |U| \left(n \|u_k\|_{L_2}^2 + \sum_{i=1}^n \|D_i u_k\|_{L_2}^2 \right),$$

$$\sum_{i=1}^n |(U_i D_i u_k, u_k)_{L_2}| \leq (1/2) \max_{\Omega} |U| \left(\|u_k\|_{H^1}^2 + (n-1) \|u_k\|_{L_2}^2 \right).$$

Просуммировав по k , получим

$$\sum_{i=1}^n |(U_i D_i u, u)_{L_2}| \leq (1/2) \max_{\Omega} |U| \left(\|u\|_{H^1}^2 + (n-1) \|u\|_{L_2}^2 \right).$$

Для k -й компоненты вектора $(u \nabla)U$ аналогичные рассуждения приводят к следующему отношению

$$\sum_{i=1}^n |(u_i D_i U_k, u_k)_{L_2}| \leq \max_{j,k,\Omega} |D_j U_k| \sum_{i=1}^n |(u_i, u_k)_{L_2}| \leq$$

$$\leq \max_{j,k,\Omega} |D_j U_k| \sum_{i=1}^n \|u_i\|_{L_2} \|u_k\|_{L_2} \leq$$

$$\leq (1/2) \max_{j,k,\Omega} |D_j U_k| \sum_{i=1}^n \left(\|u_i\|_{L_2}^2 + \|u_k\|_{L_2}^2 \right),$$

$$\sum_{i=1}^n |(u_i D_i U_k, u_k)_{L_2}| \leq$$

$$\leq (1/2) \max_{\Omega} \left(\sum_{j,k=1}^n (D_j U_k)^2 \right)^{1/2} \left(\|u\|_{L_2}^2 + n \|u_k\|_{L_2}^2 \right).$$

Откуда окончательно выводим

$$\sum_{i=1}^n |(u_i D_i U_k, u_k)_{L_2}| \leq n \max_{\Omega} \left(\sum_{j,k=1}^n (D_j U_k)^2 \right)^{1/2} \|u\|_{L_2}^2.$$

Таким образом, величину $(Ku, v)_{L_2}$ можно оценить следующим образом:

$$|(Ku, v)_{L_2}| \leq \tilde{\alpha} \|v\|_{L_2}^2 + \beta \|v\|_{H^1}^2, \quad \tilde{\alpha} = n\alpha + (n-1)\beta,$$

$$\alpha = \max_{\Omega} \left(\sum_{j,k=1}^n (D_j U_k)^2 \right)^{1/2}, \quad \beta \leq (1/2) \max_{\Omega} |U|. \quad (5)$$

Оценку величины $(Ku, u)_{S_2}$ несколько упрощают свойства функций $u \in S_2$. В этом случае для элементов $u \in H_0^1 \cap S_2$ можно записать

$$(Ku, u)_{S_2} = -([U \times \text{rot} u + u \times \text{rot} U], u)_{S_2}.$$

Отсюда легко получить следующую оценку:

$$|(Ku, u)_{S_2}| = \beta \|u\|_{H^1}^2 + \gamma \|u\|_{S_2}^2, \quad \gamma = \max_{\Omega} |\text{rot} U|.$$

Таким образом, можно записать оценки действительной и мнимой части (4) следующим образом:

$$\text{Re} \{ \langle Ay, y \rangle_x \} \leq \nu [u, u] + \tau_1 \|u-v\|_{L_2}^2 + |(Ku, u)_{S_2}| + \rho |(Ku, v)_{L_2}|,$$

$$\text{Re} \{ \langle Ay, y \rangle_x \} \leq \nu [u, u] + \tau_1 \|u-v\|_{L_2}^2 +$$

$$+ \beta \left(\|u\|_{S_2 \cap H^1}^2 + \rho \|v\|_{H^1}^2 \right) + \gamma \|u\|_{S_2}^2 + \rho \tilde{\alpha} \|v\|_{L_2}^2,$$

$$\text{Re} \{ \langle Ay, y \rangle_x \} \leq \nu [u, u] + \tau_1 \|u-v\|_{L_2}^2 + \beta \left(\|u\|_{S_2 \cap H^1}^2 + \rho \|v\|_{H^1}^2 \right) +$$

$$+ \max(\gamma, \tilde{\alpha}) \left(\|u\|_{S_2}^2 + \rho \|v\|_{L_2}^2 \right).$$

Используем медианное тождество и тот факт, что всегда $\rho < 1$, добавляя нужные слагаемые, получим оценку в виде

$$\text{Re} \{ \langle Ay, y \rangle_x \} \leq (\tau_2 + \max(\gamma, \tilde{\alpha})) \|y\|_X^2 +$$

$$+ (\nu + \beta) \left(\|u\|_{S_2 \cap H^1}^2 + \rho \|v\|_{H^1}^2 \right).$$

Действуя аналогичным образом, для мнимой части получим оценку в виде

$$|\text{Im} \{ \langle Ay, y \rangle_x \}| \leq \beta \left(\|u\|_{S_2 \cap H^1}^2 + \rho \|v\|_{H^1}^2 \right) +$$

$$+ \max(\gamma, \tilde{\alpha}) \left(\|u\|_{S_2}^2 + \rho \|v\|_{L_2}^2 \right).$$

Итак, установлено, что числовой образ оператора A целиком содержится в замыкании некоторой полуполосы $Z(A)$ комплексной плоскости. Напомним, что спектр $\Sigma(A)$ содержится или совпадает с числовым образом оператора. Таким образом, дополнение $Z(A)$ входит в резольвентное множество $P(A)$ оператора A , в точках которого уравнение $\sigma y - Ay = f$ однозначно разрешимо. Очевидно, что множество $\Sigma(A)$ не пусто.

Спектральная задача представляет интерес при исследовании устойчивости решения первым методом Ляпунова [5, 9]. Например, в случае $n = 2$ исследование устойчивости двумерных параллельных внутренних течений U монодисперсной смеси можно производить с помощью метода нормальных мод и принять $\Omega = I \times (0, 2\pi/\alpha)$, где $I = (-1, +1)$, α – волновое число возмущения. Тогда периодические граничные условия по однородной координате позволяют применить к уравнениям (2) преобразование Фурье. Для этого случая можно получить следующую оценку:

$$|\text{Im} \{ \langle Ay, y \rangle_x \}| \leq \left(2\alpha\beta + (1/2) \max_{\Omega} |U| \right) \left(\|u\|_{S_2}^2 + \rho \|v\|_{L_2}^2 \right).$$

Схема численного решения спектральной задачи. Здесь примем за неподвижную точку стационарное движение жидкости между двумя пластинами с параболическим профилем сдвига

$$U(y) = U(y) e_x = (a_0 y^2 + a_1 y + a_2) e_x.$$

В данной работе для задачи (1) применялся метод Галеркина. Элементы пробного и поверочного базисов для несущей жидкости должны удовлетворять условию соленидальности, т.е. $u = \{\psi', -i\alpha\psi\}^T$. Обозначим через \bar{u}, \bar{v} элементы пространства, сопряженного к пространству пробных решений. Тогда в вариационной форме правая часть системы (1) переписывается в виде

$$\begin{bmatrix} \langle A\bar{\Phi}, \varphi \rangle \\ \langle A\bar{\Phi}_2, \varphi \rangle \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (Ku, \bar{u}) + \nu(\Delta u, \bar{u}) - (f/\tau)(u, \bar{u}) & (f/\tau)(v, \bar{u}) \\ (1/\tau)(u, \bar{v}) & (Ku, \bar{v}) - (1/\tau)(v, \bar{v}) \end{bmatrix}.$$

Компоненты пробного и поверочного базисов должны быть функциями класса $W_2^{(h)}(I) \cap W_{2,0}^{(1)}(I)$, где $h \geq 2$ [7]. Решения для дисперсной фазы являются элементами класса $W_{2,0}^{(1)}(I)$. Обозначим через $S_N = \text{span}\{T_0, \dots, T_N\}$ линейную оболочку ортогональных с весом $\omega(y)$ многочленов с рациональными коэффициентами, а через $V_N = \{v \in S_N, v(\pm 1) = 0\}$.

Рассмотрим пространства Соболева следующего вида:

$$H_{\omega}^s(I) = \{v^{(k)} \in L_{2,\omega}(I), k = 0, \dots, s\},$$

$$H_{0,\omega}^1(I) = \{v \in H_{\omega}^1(I), v(\pm 1) = 0\},$$

оснащенные соответствующей нормой

$$\|v\|_{s,\omega} = \left(\sum_{k=0}^s \int_I |v^{(k)}|^2 \omega dy \right)^{1/2}.$$

Далее следуя работе [10], определим ортогональные проекторы следующего вида:

$$P_N : L_{2,\omega}(I) \rightarrow S_N, \quad P_N : H_{0,\omega}^1(I) \rightarrow V_N,$$

$$P_N^2 : H_{0,\omega}^1(I) \cap H_{\omega}^2(I) \rightarrow V_N.$$

Тогда справедливы оценки

$$\|u - P_N u\|_{\omega} \leq CN^{-s} \|u\|_{s,\omega} \text{ для } \forall u \in H_{\omega}^s(I), s \geq 0,$$

$$\|u - P_N u\|_{v,\omega} \leq CN^{v-s} \|u\|_{s,\omega}$$

$$\text{для } \forall u \in H_{\omega}^s(I) \cap H_{0,\omega}^1(I), s \geq 1, 0 \leq v \leq 1,$$

$$\|u - P_N^2 u\|_{v,\omega} \leq CN^{v-s} \|u\|_{s,\omega}$$

$$\text{для } \forall u \in H_{\omega}^s(I) \cap H_{0,\omega}^1(I), s \geq 2, 0 \leq v \leq 2.$$

Будем рассматривать аппроксимацию пространства $S_2 \times L_2$, используя следующие наборы функций:

$$\psi_k(y) = (1-y^2)^2 T_k(y) \text{ для } S_2,$$

$$\varphi_k(y) = (1-y^2) T_k(y) \text{ для } L_2, k = 0, 1, \dots, N.$$

Тогда пробное решение будет представлено парой $\{u_N, v_N\}$, где $u_N \in S_2$ и $v_N \in L_2$, в виде ряда

$$u_N = \sum_{k=0}^N a_k^{(1)} (\psi_k' e_x - i\alpha \psi_k e_y),$$

$$v_N = \sum_{k=0}^N (a_k^{(2)} \varphi_k e_x + a_k^{(3)} \varphi_k e_y). \quad (6)$$

Здесь $T_k(t)$ – полином Чебышева порядка k . Таким образом, получим следующую обобщен-

ную алгебраическую задачу на собственные значения:

$$Lz = \lambda Bz. \quad (7)$$

Коэффициенты матрицы L записываются следующим образом:

$$L_{ij}^{(11)} = \nu I_{ij}^{(0)} + I_{ij}^{(1)} - \tau_1 I_{ij}^{(2)}, \quad L_{ij}^{(12)} = \tau_1 I_{ij}^{(3)}, \quad L_{ij}^{(13)} = \alpha_1 \tau_1 I_{ij}^{(4)},$$

$$L_{ij}^{(21)} = \tau_2 I_{ij}^{(5)}, \quad L_{ij}^{(22)} = I_{ij}^{(6)} - \tau_2 I_{ij}^{(7)}, \quad L_{ij}^{(23)} = I_{ij}^{(8)},$$

$$L_{ij}^{(31)} = -\alpha_1 \tau_2 I_{ij}^{(9)}, \quad L_{ij}^{(32)} = 0, \quad L_{ij}^{(33)} = I_{ij}^{(6)} - \tau_2 I_{ij}^{(7)}.$$

Здесь, учитывая формулу (6), $I_{ij}^{(k)}$ обозначают

$$I_{ij}^{(0)} = -(\psi_j'', \psi_i'') + \alpha_1^2 [2(\psi_j', \psi_i') - \alpha_1^2 (\psi_j, \psi_i)],$$

$$I_{ij}^{(1)} = -\alpha_1 [(U' \psi_j', \psi_i) + (U'' \psi_j, \psi_i) + (U \psi_j', \psi_i') - \alpha_1^2 (U \psi_j, \psi_i)],$$

$$I_{ij}^{(2)} = (\psi_j', \psi_i') - \alpha_1^2 (\psi_j, \psi_i), \quad I_{ij}^{(3)} = -(\varphi_j', \varphi_i),$$

$$I_{ij}^{(4)} = (\varphi_j, \varphi_i), \quad I_{ij}^{(5)} = I_{ji}^{(3)}, \quad I_{ij}^{(6)} = -\alpha_1 (U \varphi_j, \varphi_i),$$

$$I_{ij}^{(7)} = (\varphi_j, \varphi_i), \quad I_{ij}^{(8)} = -(U' \varphi_j, \varphi_i), \quad I_{ij}^{(9)} = I_{ji}^{(4)},$$

$$\text{где } \alpha_1 = i\alpha, \quad \tau_1 = f/\tau, \quad \tau_2 = 1/\tau,$$

$$\psi_k' = -2y\varphi_k + (1-y^2)\varphi_k', \quad \psi_k'' = -2\varphi_k - 4y\varphi_k' + (1-y^2)\varphi_k''.$$

Результат тестирования для профиля течения Пуазейля $U(y) = 1 - y^2$ в точке Томаса $\alpha = 1, R = 10^4$ приведен в таблице 1. Для сравнения в таблице даны классические и новые результаты [11, 12]. Результаты при $\alpha = 1, R = 10^4$ для случаев присутствия примеси ($S = 10^{-5}, f = 0, 1$) и профиля течения Куэтта-Пуазейля $U(y) = (1-A)(1-y^2) + Ay$ ($A = 0,02$) отражены соответственно в таблице 2. Видно, что разложение (3) дает приемлемую точность при относительно малом числе полиномов даже в случае плотно заполненной матрицы, соответствующей левой части уравнения (4). Для сравнения использовались результаты, полученные методом дифференциальной прогонки.

Таблица 1

Наиболее опасная мода

$\lambda = 0,23752649$	$+0,00373967i$	Orszag [11]
$\lambda = 0,23752708$	$+0,00373980i$	Dongarra [11]
$\lambda = 0,2375264888204$	$+0,0037396706229i$	Pop ($N = 96$) [12]
$\lambda = 0,2375264888206$	$+0,0037396706230i$	$N = 64$

Таблица 2

Наиболее опасная мода

$\lambda = 0,233887554181$	$+0,002661357275i$	– дифференциальная прогонка
$\lambda = 0,233887554177$	$+0,002661357296i$	– $N = 64$
$\lambda = 0,2314841658415$	$+0,0011000890122i$	– дифференциальная прогонка
$\lambda = 0,2314841658415$	$+0,0011000890123i$	– $N = 64$

Заметим, что величина чисел обусловленности результирующих матриц в левой части уравнения (4) накладывает определенные ограничения на количество значащих цифр собственного числа. Матрицы оказываются чувствительными к возмущению по величине, сравнимой даже с порядком ошиб-

ки представления числа с плавающей точкой. Иллюстрацией служит результат работы [12] (см. третью строку табл. 1), в которой методом Петрова-Галеркина получены точные значения коэффициентов матриц в уравнении (4) для задачи Орра-Зоммерфельда. Однако количество «стабильных»

знаков, найденных при разрешении $N = 96$, не увеличилось с ростом числа полиномов до $N = 1024$.

Численный спектр. Несложно установить тот факт, что точечный спектр (1) состоит из дискретных собственных чисел и в основном обусловлен сужением оператора (1) на \mathcal{S}_2 . В этом случае спектр определяется голоморфным пучком операторов, которые можно рассматривать в качестве возмущенной спектральной задачи для уравнений Навье-Стокса несжимаемой жидкости. Поэтому применение

метода нормальных мод на \mathcal{S}_2 оправдано, а ляпуновские экспоненты описывают асимптотическую устойчивость. Однако доказательство этого факта выходит за рамки данной работы. В аналитической теории возмущений линейных операторов известно [13], что любая конечная система собственных значений непрерывно зависит от возмущения (в нашем случае спектр невозмущенного оператора есть спектр задачи Орра-Зоммерфельда; см. кружки на рисунках 1–3).

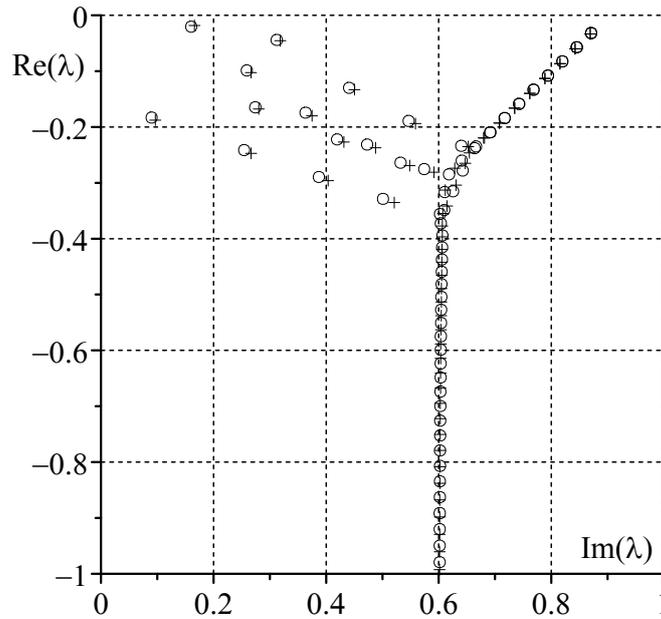


Рис. 1. Спектр течения Куэтта-Пуазейля смеси при $A = 0,1$, $\alpha = 1$, $R = 10^4$, $S = 10^{-5}$ и $f = 0,1$

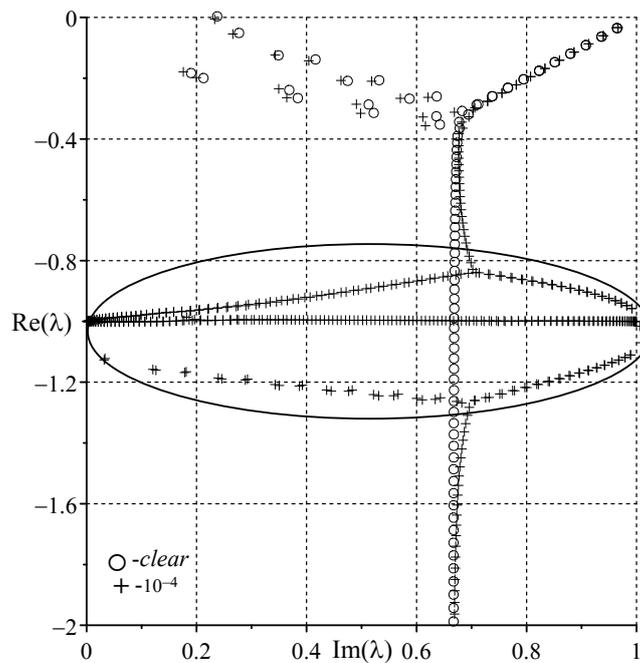


Рис. 2. Спектр течения Пуазейля смеси при $\alpha = 1$, $R = 10^4$, $S = 10^{-4}$ и $f = 0,1$

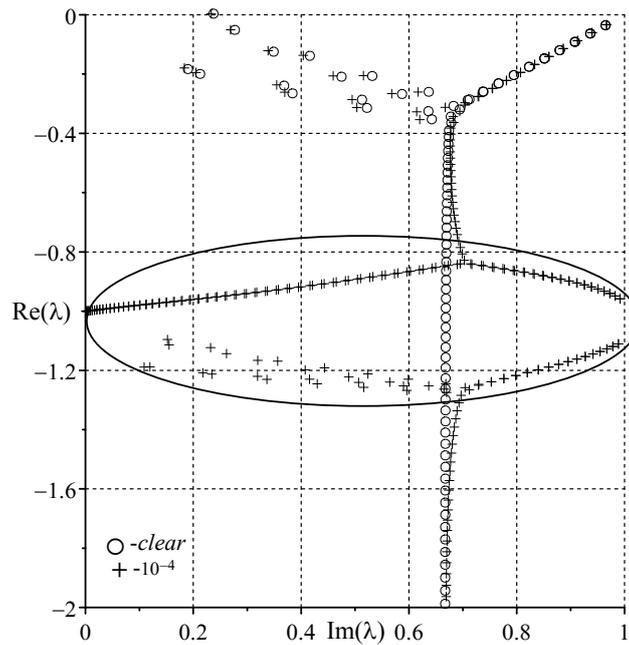


Рис. 3. То же. Континуум частиц несжимаемый

Расчеты показывают, что наряду с ожидаемыми трансляциями в спектре (например, см. рис. 1) наличие примеси также обуславливает эффекты, проиллюстрированные рисунком 2. В первую очередь, здесь обращает на себя внимание часть спектра, заключенная внутри области, выделенной овалом. Сразу отметим, что внутри выделенной области на рисунке представлены не все точки численного спектра, количество которых для такой области нерегулярным образом зависит от разрешения дискретизации. Эффект «раздвоения хвостика», который можно наблюдать в верхней и нижней частях овала является характерной особенностью конечномерного приближения спектра бесконечномерной динамической системы. Данный эффект обусловлен расходимостью решения алгебраической задачи на собственные значения при конечной аппроксимации бесконечного спектра. Увеличением значения N можно добиться лишь того, что точка «раздвоения хвостика» приближается к прямой $\text{Re}(\lambda) = -1/\tau$. Таким образом, последовательность точек спектра, ответвляющихся от части спектра, характерной для случая чистой жидкости (кружки на рис. 2), имеет в качестве предельной не менее одной конечной точки комплексной плоскости, расположенной в малой окрестности подобласти

$$M = \{\lambda: \text{Re}(\lambda) = -1/\tau, 0 \leq \text{Im}(\lambda) \leq \alpha\}.$$

Части спектра, расположенные в полуплоскостях $\text{Re}(\lambda)$ больше $-0,4$ и $\text{Re}(\lambda)$ меньше $-1,6$, вполне согласуются с результатами теорем об изменении спектра при относительно ограниченном возмущении оператора.

Распределение энергии пульсаций в сечении канала. Рассмотрим соотношение, выражающее собою один из законов сохранения для задачи (1),

$$\begin{aligned} (\alpha/4\pi)\dot{E} &= \tau_1 + D + \tau_2 + D_S = -\text{Re}\{v'_{1x}v'_{1y}\}U' - \\ &- (1/R)[\alpha^2|v_1|^2 + |v'_{1x}|^2 + |v'_{1y}|^2] - \rho \text{Re}\{v'_{2x}v'_{2y}\}U' - \\ &- (\rho/SR)[|v_1|^2 + |v_2|^2] + 2(\rho/SR)\text{Re}\{v'^*_{1x}v'_{2x} + v'^*_{1y}v'_{2y}\}. \end{aligned}$$

Здесь τ_k характеризуют обмен энергией между основным профилем и возмущениями; D – диссипация; $D_S = D_1 + D_2$ – работа силы Стокса; $F = \tau_1 + D$ – локальный избыток генерации энергии над диссипацией для первой компоненты смеси. Видно, что к диссипативному механизму демпфирования энергии пульсаций присоединилась работа силы межфазного трения.

Запишем в общем случае соотношения для давления и концентрации примеси

$$\begin{aligned} \Delta p &= (1/\tau)\text{div} \rho \mathbf{v} - u_{j,i}u_{i,j} - (1/\tau)u_j \rho_{,j} + \text{div} \mathbf{F}, \\ \partial \rho / \partial t &= -\text{div} \rho \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Здесь принято обозначение $\partial \varphi / \partial x_i = \varphi_{,i}$, \mathbf{F} – объемные силы. В линейном случае для возмущения концентрации получим неоднородное уравнение

$$\lambda \rho = -f \text{div} \mathbf{v}^{(s)} - U_i \rho_{,i}.$$

Учитывая уравнение для давления, можно записать $\lambda \rho = -\tau \Delta p - i\tau \text{div} K \mathbf{u} + U_i \rho_{,i}$ или $\lambda \rho + iK_0 \rho = -\tau \Delta p - 2i\tau \text{div} K_1 \mathbf{u}$. Очевидно, что задача разрешима для всех $\lambda \notin \Sigma(-iK_0)$. В противном случае $\Delta p = -2i \text{div} K_1 \mathbf{u} = -2U'u_2$, что возможно только в случае нейтрально

устойчивых возмущений, т.е. $\text{Real}\{\lambda\}=0$. Беря точку $\lambda \notin \Sigma(-iK_0)$, получим следующее соотношение:

$$(1/\tau)\rho = \tau\Delta p + 2i\tau \text{div} K_1 \mathbf{u},$$

описывающее связь между пульсациями массовой концентрации примеси и давления в несущей жидкости. Видно, что как в линейном, так и нелинейном случаях изменение концентрации примеси обусловлено пространственным распределением давления и поля скоростей в несущей жидкости.

На рисунке 4 представлены кривые нормированных распределений энергии в пуазейлевом потоке

при $R = 5788,125$ ($R_c = 84554,40$), $f = 0,15$ (a) и $R = 25000$ ($R_c = 33340,58$), $f = 0,1$ (b) для $S = 10^{-4}$. Видно, что производство энергии пульсаций осуществляется лишь в достаточно малой окрестности критического слоя, а передача энергии пульсаций основному потоку происходит как в узкой пристенной области (за счет вязкой диссипации), так и в основной толще канала (см. кривую 0 на рис. 4a). При $y \rightarrow y_c$ значение локальной разности фаз колебаний стремится к нулю.

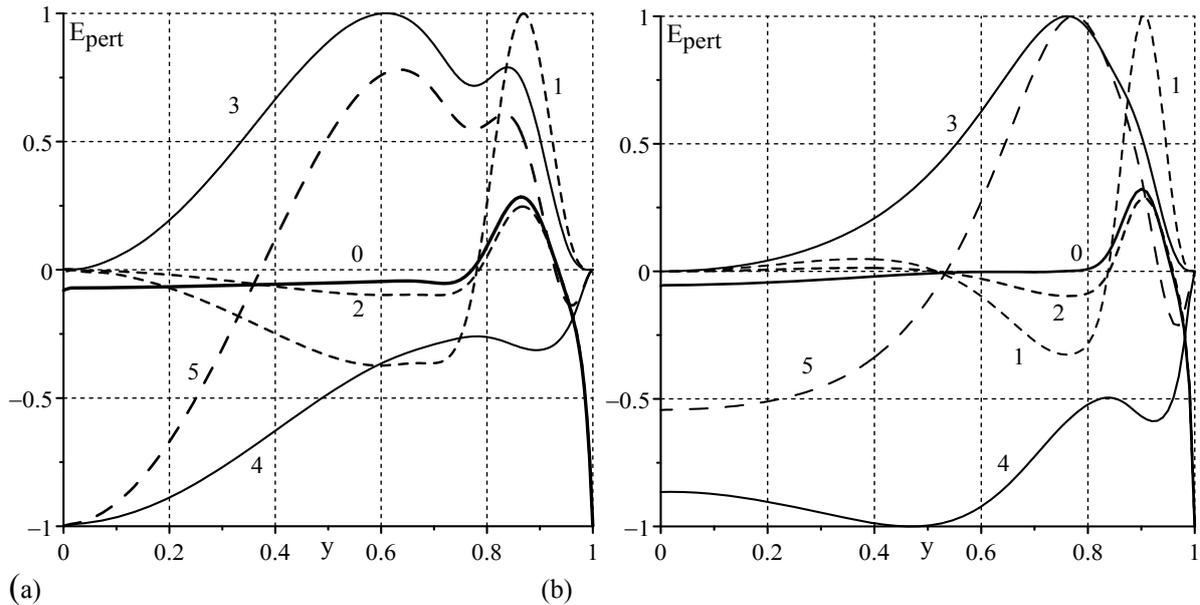


Рис. 4. Распределение энергии пульсаций по сечению канала при $f = 0,15$ и $R = 5788,125$ (a), $f = 0,1$ и $R = 25000$ (b), $S = 10^{-4}$ для профиля Пуазейля. 0 – суммарная энергия; 1 – $\tau_1(y)$; 2 – $F(y)$; 3 – $\tau_2(y)$; 4 – $D_s(y)$; 5 – $D_s(y) + \tau_2(y)$

Кривая 5 является суммой кривых 3, 4 и определяет результирующий вклад, обусловленный второй компонентой смеси, в баланс энергии. Поведение кривых 0, 2, 5 в интервале $(0, 0.7)$ указывает на взаимную компенсацию производства и диссипации пульсационной энергии для компонентов смеси. Поведение функции $\tau_2(y)$ непосредственно может быть охарактеризовано функцией $\tau_1(y)$ и распределением величины $SRU'^2 |v_{1y}|^2(y)$. Причем последняя функция имеет локальный максимум вблизи критического слоя и отвечает лишь за генерацию пульсационной энергии. Поведение же функции $\tau_1(y)$ не так тривиально (например, именно вид кривой 1 обуславливает связку экстремумов у кривой 3

на рисунке 4a. Однако это справедливо лишь при малых отклонениях функции $|J|^2(y)$ от единицы, т.е. при малых значениях SR . Эффект модуляции, описанный выше, скрадывает локальные изменения, определяемые функцией $\tau_1(y)$, а вклад величины $SRU'^2 |v_{1y}|^2(y)$ в значения $\tau_2(y)$ становится более существенным и значительно определяет поведение функции $\tau_2(y)$.

Заключение. Устойчивость движения определяется показателями ляпуновских экспонент, представленных дискретной частью численного спектра [5, 9]. Источник дополнительной диссипации, которая и обеспечивает повышение порога устойчивости, представлен силою межфазного трения.

Библиографический список

1. Соу С.Л. Гидродинамика многофазных систем. – М., 1971.
2. Ladyzhenskaya O.A. Attractors for Semigroups and Evolution Equations. – Cambridge, 1991.
3. Temam R. Infinite dimensional dynamical systems. – New York, 1993.
4. Kozhukhovskaya T.A., Sagalakov A.M., Popov D.I. The Stability of Couette-Poiseuille Flow of Two-Phase Liquid

// Transport Phenomena in two-phase Flow: 8th workshop. – Varna, 2003.

5. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М., 1970.

6. Ladyzhenskaya O.A. The mathematical theory of viscous incompressible flow. – New York, 1963.

7. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М., 1971.

8. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. – М., 1981.

9. Drazin P.G. & Reid W.R. Hydrodynamic stability. – Cambridge, 1981.

10. Shen J. and Temam R. Nonlinear Galerkin method using Chebyshev and Legendre Polynomials I. The One-Dimensional Case // SIAM J. Numer. Anal. – 1995. – Vol. 32, №1.

11. Dongarra J.J. Dongarra & B. Straughan & D.W. Walker, Chebyshev tau-QZ algorithm methods for calculating spectra of hydrodynamic stability problems // Appl. Numer. Math. – 1996. – V.22.

12. Pop I.S. & Gheorghiu C.I. A Chebyshev-Galerkin method for fourth order problems, in Approximation and Optimization, Proceedings of the International Conference on Approximation and Optimization, D.D. Stancu et al. (eds.). – Cluj-Napoca, 1997. – Vol. II.

13. Като Т. Теория возмущения линейных операторов. – М., 1972.