УДК 504.064.3:534.83

С.А. Останин

Метод измерения малых значений дисперсии белого шума в смеси с гармоническим сигналом

S.A. Ostanin

Method to Measure Small Values of White Noise Dispersion Mixed with a Harmonious Signal

Описан метод измерения малых значений дисперсии белого шума в смеси с гармоническим сигналом без использования эталонного генератора синусоидальных колебаний.

Ключевые слова: малые значения дисперсии шума, анализ сигналов.

In this paper the method of measuring small values of white noise dispersion mixed with a harmonious signal without using the reference generator of sine wave fluctuations is described.

Key words: small values of dispersion noise, analysis of signals.

Проблема измерения малых значений дисперсии шума в смеси гармоническим сигналом часто связана с необходимостью использования эталонного генератора синусоидальных колебаний, так как способы измерения интенсивности шума основаны на математических операциях над гармоническим сигналом, например, вычитания или умножения. В этом случае качество оценки дисперсии шума будет определяться в том числе качеством эталонного генератора синусоидального сигнала и точностью выполнения операций вычитания или умножения. В работе предложен способ измерения малых значений дисперсии шума, содержащегося в смеси с гармоническим сигналом, реализация которого не требует наличия эталонного генератора.

Рассмотрим задачу измерения малых значений шума в аддитивной смеси $x(t)$ гармонического сигнала $s(t)$ (единичной амплитуды) с известной частотой ω и белого шума $n(t)$ с шириной спектра B:

$$x(t) = s(t) + n(t). \qquad (1)$$

Для упрощения предположим, что $s(t)$ и $n(t)$ независимы и центрированы.

В отсутствие шума ($n(t) = 0$) верно тождество $\ddot{s}(t) + \omega^2 \cdot s(t) = 0$, так как $s(t)$ – гармонический сигнал. В этом случае справедливо:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 \cdot x(t) = 0\,. \qquad (2)$$

Если $n(t) \neq 0$, то $\ddot{x}(t) + \omega^2 \cdot x(t) \neq 0$. Введем обозначение

$$y(t) = \ddot{x}(t) + \omega^2 \cdot x(t) \qquad (3)$$

и величину шума $n(t)$ будем оценивать по дисперсии функции $y(t)$. Подставим $x(t)$ из (1) в (3) и получим:

$$y(t) = \ddot{n}(t) + \omega^2 \cdot n(t) \qquad (4)$$

Оценим дисперсию функции $y(t)$:

$$\sigma_y^2 = \overline{\ddot{n}(t)^2} + \omega^4 \cdot \overline{n(t)^2} = 6 \cdot B^4 \cdot \sigma_n^2 + \omega^4 \cdot \sigma_n^2\,. \qquad (5)$$

Здесь σ_n^2 – дисперсия шума. При вычислении дисперсии σ_y^2 учтена слабая корреляция белого шума $n(t)$ и его второй производной $\ddot{n}(t)$. Для оценки второй производной использована разностная схема. Кроме того, принято, что ширина полосы шума B совпадает с шириной полосы вычислителя дисперсии σ_y^2 и $B = 1/\Delta t$, где Δt – шаг дискретизации сигнала по времени. Для низкочастотных сигналов ($B >> \omega$) выражение (5) принимает вид $\sigma_y^2 = 6 \cdot B^4 \cdot \sigma_n^2$. Если частота сигнала сравнима с шириной полосы спектра, то $\sigma_y^2 = 7 \cdot B^4 \cdot \sigma_n^2$. Как видно из выражения (5), дисперсия функции $y(t)$ выше дисперсии шума $n(t)$ примерно в $6 \cdot B^4$ раз. Таким образом, с помощью функции $y(t)$ можно усиливать величину шума для последующего измерения. Коэффициент «усиления» шума можно увеличить еще, если функцию $y(t)$ задать в виде

$$y(t) = x^{(4)}(t) - \omega^4 \cdot x(t) \equiv z(t)\,. \qquad (6)$$

Дисперсия функции $z(t)$ стремится к нулю при $\sigma_n^2 \to 0$ для гармонических сигналов $s(t)$. Оценка дисперсии функции $z(t)$ дает величину

$$\sigma_z^2 = \overline{n^{(4)}(t)^2} - \omega^8 \cdot \overline{n(t)^2} = 70 \cdot B^8 \cdot \sigma_n^2 - \omega^8 \cdot \sigma_n^2\,. \qquad (7)$$

Для низкочастотных сигналов ($B >> \omega$) $\sigma_z^2 = 70 \cdot B^8 \cdot \sigma_n^2$ (если частота сигнала сравнима с шириной полосы спектра, то $\sigma_z^2 = 69 \cdot B^8 \cdot \sigma_n^2$). Коэффициент «усиления» шума в этом случае составляет величину порядка $70 \cdot B^8$.

Использование вспомогательных функций типа (3) и (6), содержащих производные более высоких порядков приводит к ограничению точности оценки величины дисперсии шума в связи с ростом ошибок оценки значений этих производных (при малых

значениях дисперсии шума погрешность ее оценки сравнима с величиной дисперсии).

Численное моделирование «усилителя» шума было выполнено в среде визуального программирования LabVIEW 8.2. Цель моделирования – установление зависимостей между дисперсией шума $\sigma^2_{n,числ.}$ и дисперсиями $\sigma^2_{y,числ.}$, $\sigma^2_{z,числ.}$ функций $y(t)$ и $z(t)$ в численном эксперименте, а также оценка погрешности измерения дисперсии шума описанным методом. В качестве сигнала использовалась синусоида, частоту которой ω можно было изменять в диапазоне от 100 Гц до 90 кГц. Ширина полосы спектра B шума составляла 100 кГц. Величину среднеквадратичного отклонения шума σ_n можно было изменять программно от 1 до 10^{-14}. В результате моделирования получены уравнения, аналогичные уравнениям (5) и (7):

$$\sigma^2_{y,числ.} = 6,02 \cdot B^4 \cdot \sigma^2_{n,числ.} + \omega^4 \cdot \sigma^2_{n,числ.}, \qquad (8)$$

$$\sigma^2_{z,числ.} = 70,03 \cdot B^8 \cdot \sigma^2_{n,числ.} - \omega^8 \cdot \sigma^2_{n,числ.}. \qquad (9)$$

Случайная погрешность оценки коэффициента при первом слагаемом в уравнении (8) составила величину 0,02, или 0,3%. Случайная погрешность оценки коэффициента при первом слагаемом в уравнении (9) составила величину 0,04, или 0,06%. Значения коэффициентов, полученных численно с точностью до случайной погрешности, совпадают со значениями коэффициентов, полученными аналитически. Оценка относительной погрешности измерения дисперсии шума по дисперсии функции $y(t)$ составила величину 0,3% при изменении величины σ_n от 1 до 10^{-9} ($\sigma_n^2 = 1 \div 10^{-18}$). Оценка относительной погрешности измерения дисперсии шума по дисперсии функции $z(t)$ составила величину 0,06% при изменении величины σ_n от 1 до 10^{-13} ($\sigma_n^2 = 1 \div 10^{-26}$). Таким образом, уравнения (5) и (7) можно использовать для оценки дисперсии шума непрерывных и дискретных сигналов в широком диапазоне значений дисперсии шума.