УДК 519.6

Д.А. Турсунов

Применение сплайн-вейвлетов для решения интегро-дифференциальных уравнений

D.A. Tursunov

Application of Spline Wavelets to Solve the Integro-Differential Equations

В данной работе используется новый тип эрмитовых кубических сплайн-вейвлетов для построения приближенного решения интегро-дифференциальных уравнений. Вейвлеты построены в базисе эрмитовых кубических сплайнов. Численные результаты демонстрируют эффективность построенных базисных вейвлетов.

Ключевые слова: вейвлет, эрмитовый кубический сплайн, интегро-дифференциальное уравнение.

In this paper, the author brings into use the wavelet bases of Hermite cubic splines to solve the integro-differential equations. The wavelets are constructed on the basis of Hermite cubic splines. The computational results demonstrate the advantage of the wavelet basis.

Key words: wavelet, Hermit cubic spline, integro-differential equation.

Введение. Недостатками построенных ранее вейвлетов является то, что они либо не имеют аналитического представления, либо расположены на достаточно широком носителе. И то, и другое бывает чрезвычайно важно при их использовании для приближенного решения интегро-дифференциальных уравнений. Все обозначения те же, что и в работе [1].

Пусть ϕ_1 и ϕ_2 – кубические сплайны вида: $\phi_1(x) = (x+1)^2(1 - 2x)\,\chi_{[-1,0]}(x) + (1-x)^2(1 + 2x)\chi_{[0,1]}(x)$ и $\phi_2(x) = (x + 1)^2x\chi_{[-1,0]}(x) + (1 - x)^2x\chi_{[0,1]}(x)$, где $\chi_{[a,b]}(x)$ – характеристическая функция, $\chi_{[a,b]}(x) = 1$, при $x \in [a,b]$ и $\chi_{[a,b]}(x) = 0$, при $x \notin [a,b]$.

В работе [2] Дамен и соавторы построили биортогональные мультивейвлеты в базисе эрмитовых кубических сплайнов ϕ_1 и ϕ_2. Отметим, что их конструкция базисных вейвлетов выглядит слишком сложно [3].

В [1] предложен новый подход к построению базисных вейвлетов на пространстве эрмитовых кубических сплайнов, т.е. наши вейвлеты ортогональны со скалярным произведением $\langle u', v'\rangle$, а не $\langle u, v\rangle$. Это требование ортогональности лучше подходит для применения вейвлетов к численному решению интегро-дифференциальных уравнений второго порядка. Вдобавок эти вейвлеты имеют меньший носитель.

Нетрудно заметить, что множество

$$\Phi_n := \{\phi_1(2^n - j): j = 1,\dots,2^n - 1\} \cup \cup\{\phi_2(2^n - j)|_{(0,1)}: j = 0,\dots,2^n\} \qquad (1)$$

является базисом для V_n (V_n – пространство кубических сплайнов, удовлетворяющих условиям: $n > 0$, $v \in C[0,1] \cap C'[0,1]$; $v(0) = v(1) = 0$). Элементы Φ_n обозначим через $\{v_1,\dots, v_{2^{n+1}}\}$.

Пусть Ψ_n множества вейвлетов, которые пока не конкретизируются:

$$\Psi_n : = \{\psi_1(2^n - j): j = 1,\dots,2^n - 1\} \cup \cup\{\psi_2(2^n - j)|_{(0,1)}: j = 0,\dots,2^n\}, \qquad (2)$$

и W_n – линейное пространство, натянутое на Ψ_n, очевидно, что $\dim(W_n) = 2^{n+1}$. В работе [1] доказано равенство:

$$\int_0^1 w'(x)v'(x)\,dx = 0,\ \forall w \in \Psi_n,\ \forall v \in \Phi_n. \qquad (3)$$

Из этого следует, что $V_n \cap W_n = \{0\}$. Кроме того, ниже будет показано, что $V_{n+1} \supseteq V_n + W_n$ и $\dim(V_{n+1}) = \dim(V_n) + \dim(W_n)$. Это означает, что $V_{n+1} = V_n \oplus W_n$. Следовательно, мы получим разложение $H_0^1(0,1)$:

$$H_0^1(0,1) = V_1 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \dots .$$

Элементы Ψ_n обозначим через $\{w_{2^{n+1}+1},\dots,w_{2^{n+2}}\}$, $n \in N$.

Пусть $g_k := v_k/\|v'_k\|_2$ при $k = 1, 2, 3, 4$ и $g_k := w_k/\|w'_k\|_2$ при $k > 4$. Тогда $\|g'_k\|_2 = 1$ при $n \in \mathbf{N}$.

Сплайн-вейвлеты. Нетрудно показать, что ϕ_1 и ϕ_2 – кубические сплайны, определенные во введении, удовлетворяют условиям: $\phi_1, \phi_2 \in C^1$, $\phi_1(0) = 1$, $\phi'_1(0) = 0$, $\phi_2(0) = 0$ $\phi'_2(0) = 1$.

Следовательно, эрмитова интерполяция для функции $h \in C^1(\mathbf{R})$, имеет следующий вид:

$$u = \sum_{j\in Z} h(j)\phi_1(\cdot - j) + h'(j)\phi_2(\cdot - j),$$

$$\forall j \in Z:\ u(j) = h(j),\ u'(j) = h'(j).$$

Пусть S представляет собой инвариантное пространство сдвигов, порожденное ϕ_1 и ϕ_2. Функция g принадлежит пространству S тогда и только тогда, когда существуют две последовательности b_1, b_2 на **Z**, для которых выполняется равенство:

$$g = \sum_{j\in\mathbf{Z}} \left[b_1(j)\,\phi_1(\cdot - j) + b_2(j)\,\phi_2(\cdot - j) \right].$$

Пусть $S_1 = \{g(2\cdot): g \in S\}$, тогда $S \subset S_1$. Мы ищем пространство вейвлетов W, для которого $S_1 = S \oplus W$. При этом хотим найти два вейвлета ψ_1, ψ_2, так что их сдвиги порождают W. Кроме того, потребуем выполнения равенств

$$\langle \psi'_1, \phi'_m(\cdot - j)\rangle = \langle \psi'_2, \phi'_m(\cdot - j)\rangle = 0,\ m = 1,2,\ \forall j \in \mathbf{Z}. \quad (4)$$

Отсюда имеем два материнских вейвлета ψ_1, ψ_2:

$$\psi_1(x) = -2\phi_1(2x+1) + 4\phi_1(2x) - 2\phi_1(2x-1) - 21\phi_2(2x+1) + 21\phi_2(2x-1),$$

$$\psi_2(x) = \phi_1(2x+1) - \phi_1(2x-1) + 9\phi_2(2x+1) + 12\phi_2(2x) + 9\phi_2(2x-1).$$

Носителями построенных вейвлетов ψ_1, ψ_2 является отрезок $[-1, 1]$, они удовлетворяют условию (4), и их сдвиги генерируют пространство вейвлетов W, так что S_1 является прямой суммой S и W. Кроме того, ψ_1 – симметричен, а ψ_2 – антисимметричен.

Вейвлеты на отрезке. В данном разделе мы используем сплайн-вейвлеты из предыдущего раздела для построения вейвлет-базиса в пространстве $H_0^1(0,1)$. Пусть Φ_n, Ψ_n будут множествами, определенными в (1) и (2) соответственно. Тогда Φ_n – базис для V_n, а W_n пусть будет линейным пространством, натянутым на Ψ_n. Нетрудно доказать, что $\forall n \in \mathbf{N}$: $\langle v', w'_n\rangle = 0$, $\langle w'_m, w'_n\rangle = 0$, $m \neq n$ (доказательство можно найти в [1]). Отсюда

$$\left\| v' + \sum_{n=1}^{\infty} w'_n \right\|^2_{L_2(0,1)} = \|v'\|^2_{L_2(0,1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \|w'_n\|^2_{L_2(0,1)}. \quad (5)$$

Пусть $\psi_{n,j}(x) = \frac{1}{\sqrt{729.6}} 2^{-n/2} \psi_1\left(2^n x - \frac{j}{2}\right)$,

при $j = 2, 4, \ldots, 2^{n+1} - 2$,

$$\psi_{n,j}(x) = \frac{1}{\sqrt{153.6}} 2^{-n/2} \psi_2\left(2^n x - \frac{j-1}{2}\right),$$

при $j = 3, 5, \ldots, 2^{n+1} - 1$,

$$\psi_{n,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{76.8}} 2^{-n/2} \psi_2\left(2^n x\right),$$

$$\psi_{n,2^{n+1}}(x) = \frac{1}{\sqrt{76.8}} 2^{-n/2} \psi_2\left(2^n x - 2^n\right).$$

$$\phi_{1,1}(x) = \sqrt{\frac{5}{24}} \phi_1(2x-1), \quad \phi_{1,2}(x) = \sqrt{\frac{15}{4}} \phi_2(2x),$$

$$\phi_{1,3}(x) = \sqrt{\frac{15}{8}} \phi_2(2x-1), \quad \phi_{1,4}(x) = \sqrt{\frac{15}{4}} \phi_2(2x-2).$$

при $n\in\mathbf{N}$ и $x\in(0,1)$.

Ясно, что V_1 разлагается на $\phi_{1,j}$, $j = 1, 2, 3, 4$. Следовательно, $H_0^1(0,1)$ разлагается на g_j, $j = 1, \ldots, 2^{n+1}$, где $g_j = \phi_{1,j}$, при $j = 1, \ldots, 4$, и $g_{2^{n+1}+j} = \psi_{n,j}$, $n \in \mathbf{N}$, $j = 1, \ldots, 2^{n+1}$.

В работе [1] доказано, что $\left(\psi'_{n,j}\right)_{n\in N, 1\le j\le 2^{n+1}}$ является базисом Рисса в $L_2(0,1)$.

Аналогично доказывается, что $(g'_{k,j})_{k,j\in\mathbf{N}}$ – базис Рисса в $L_2(0,1)$.

Применение. В этом разделе мы используем построенные вейвлеты для решения интегро-дифференциальных уравнений вида:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + p(x)\frac{du}{dx} + q(x)u(x) + \int_0^x K(x,s)u(s)\,ds = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (6)$$

с граничными условиями

$$u(0) = u(1) = 0, \quad (7)$$

где $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$, $K(x,s)$ – заданные непрерывные функции.

Коэффициенты и ядро $K(x,s)$ уравнения (6) удовлетворяют условиям:

$$0 \le p(x) \le c_3,\ 0 \le q(x) \le c_4,\ 0 \le K(x, s) \le c_5,\quad x \in [0, 1],\ s \in [0, 1]. \quad (8)$$

Отметим, что если граничные условия являются неоднородными т.е. $u(0) = \alpha$ $u(1) = \beta$, то с помощью преобразования $u(x) = U(x) + \alpha + x(\beta - \alpha)$ можно привести их к однородным $U(0) = U(1) = 0$.

Пусть $a(u,v)$ обозначает билинейную форму, $u, v \in H_0^1(0,1)$:

$$a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx + \int_0^1 p(x)u'(x)v(x)\,dx + \int_0^1 q(x)u(x)v(x)\,dx + \int_0^1\int_0^x K(x,s)u(s)v(x)\,ds\,dx.$$

Тогда вариационная запись (6)–(7) имеет следующий вид:

$$a(u,v) = \langle f, v\rangle,\ \forall v \in H_0^1(0,1).$$

Соответствующая задача аппроксимации Галеркина: найти $u_n \in V_n$, при котором

$$a(u_n, v) = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in V_n. \quad (9)$$

По лемме Лакса-Милграмма (см. [4, с. 60]) задача (9) имеет единственное решение. Мы предлагаем использовать найденное выше множество вейвлетов $G = \{g_1, \ldots, g_{2^{n+1}}\}$ как базис для V_n. С этим базисом для V_n задача (9) может быть дискретизирована следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} a(g_j, g_k)\,c_k = \langle g_j, f\rangle, \qquad j = 1, \ldots, 2^{n+1}.$$

Число обусловленности матрицы A_n равномерно ограничено, $A_n = (a(g_j, g_k))_{1\le j,k\le 2^{n+1}}$.

К задачам типа (6)–(7) сводятся задачи для различных уравнений, например, дифференциальное уравнение третьего порядка:

$$- y''' + p(x)y'' + q(x)y' + h(x)y = f(x), \qquad (10)$$

с начально-граничными условиями:

$$y(0) = y'(0) = y'(1) = 0. \qquad (11)$$

Введем обозначение $y'(x) = u(x)$, тогда из (10) имеем (6), при $K(x, s) = h(x)$, а из (11) получим (9). Решение задачи (10)–(11):

$$y(x) = \int_0^x u(s)\,ds .$$

Рассмотрим примеры.

1. $-u'' + \cos(t)\int_0^t u(s)\,ds =$

$= \pi^2 \sin(\pi t) - \dfrac{\cos t}{\pi}(\cos(\pi t) - 1), \quad u(0) = u(1) = 0.$

Точное решение $u(t) = sin(\pi t)$.
$\|u(t) - u_4(t)\|_2 = 2{,}389 \times 10^{-3}$, $\|u(t) - u_8(t)\|_2 =$
$= 2{,}092 \times 10^{-4}$, $\|u(t) - u_{16}(t)\|_2 = 1{,}291 \times 10^{-5}$,
$C(A_4) = 1{,}667$; $C(A_8) = 2{,}342$, $C(A_{16}) = 3{,}205$.

2. $-u'' + \int_0^t (t+s)u(s)\,ds = \dfrac{9}{20}t^5 - \dfrac{7}{6}t^4 + \dfrac{5}{6}t^3 - 6t + 4,$

$u(0) = u(1) = 0.$

Точное решение $u(t) = t^3 - 2t^2 + t$,
$\|u(t) - u_4(t)\|_2 = 3{,}908 \times 10^{-8}$, $\|u(t) - u_8(t)\|_2 =$
$= 3{,}894 \times 10^{-8}$,
$C(A_4) = 1{,}672$; $C(A_8) = 2{,}342$.

3. $y''' + 2y'' + xy' + 3y = 4x - 5x^2/2$,
$y(0) = y'(0) = y'(1) = 0$.

Точное решение $y(x) = x^2(2x - 3)/6$, $u(x) = x^2 - x$.
$\|u(t) - u_4(t)\|_2 = 4{,}209 \times 10^{-8}$, $\|u(t) - u_8(t)\|_2 =$
$= 1{,}02 \times 10^{-8}$,
$C(A_4) = 1{,}667$; $C(A_8) = 2{,}342$.

4. $y''' + x\pi^2 y'' - \pi^2 xy' + \pi^4 xy = 2\pi\cos(\pi x)$,
$y(0) = y'(0) = y'(1) = 0$.

Точное решение $y(x) = \sin(\pi x)/\pi^2 - x\cos(\pi x)/\pi$, $u(x) = x\sin(\pi x)$.
$\|u(t) - u_4(t)\|_2 = 1{,}309 \times 10^{-3}$, $\|u(t) - u_8(t)\|_2 =$
$= 1{,}202 \times 10^{-4}$, $\|u(t) - u_{16}(t)\|_2 = 1{,}101 \times 10^{-5}$,
$C(A_4) = 1{,}867$; $C(A_8) = 2{,}342$, $C(A_{16}) = 3{,}205$.

В примерах $\|u(t) - u_n(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (u(t) - u_n(t))^2\,dt}$ – норма разностей; $C(A_n)$ – число обусловленности матрицы A_n.

Библиографический список

1. Турсунов Д.А., Губская М.М. Построение новых типов эрмитовых кубических сплайн вейвлетов // Молодежная научная конференция. – Томск, 2009.

2. Dahmen W., Han R.Q. Jia and A. Kunoth. Biorthogonal multiwavelets on the interval: Cubic Hermite splines, Constr. Approx. – 2000. – V. 16.

3. Heil C., Strang G., Strela V. Approximation by translates of refinable function // Numer. Math. – 1996. – V. 73.

4. Brenner S.C., Scott L.R. The Mathematical Theory of Finite Element Methods. – New York, 1994.