УДК 512.54.01

С.А. Шахова

О существовании решетки доминионов в квазимногообразиях абелевых групп

S.A. Shakhova

The Existence of Dominion Lattice in Quasi-varieties of Abelian Groups

Доказано, что для любой группы A, ее подгруппы H и произвольного квазимногообразия абелевых групп $\mathcal{M}$ множество доминионов подгруппы H группы A, каждый из которых рассматривается в некотором подквазимногообразии $\mathcal{N}$ из $\mathcal{M}$, образует решетку относительно теоретико-множественного включения.

Ключевые слова: квазимногообразие, решетка, доминион, группа.

The author proves that for any group A, its subgroup H and arbitrary quasi-variety of Abelian groups M, the set of dominions of the subgroup H in the group A forms the lattice relative to theoretical-plural intersection. Each dominion is considered in some subquasi-variety N from M.

Key words: quasi-variety, lattice, dominion, group.

Введение. Понятие доминиона возникло в [1] для изучения эпиморфизмов. Согласно [1], доминионом подалгебры H универсальной алгебры A в полной категории $\mathcal{M}(A \in \mathcal{M})$, обозначаемым $dom_A^{\mathcal{M}}(H)$, называется множество элементов $a \in A$ таких, что $\varphi(a) = \psi(a)$ для любых двух морфизмов $\varphi, \psi : A \to M \in \mathcal{M}$, совпадающих на H. Ясно, что $\varphi : A \to B$ $(A, B \in \mathcal{M})$ является эпиморфизмом в $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда $dom_B^{\mathcal{M}}(\varphi(A)) = B$.

Доминионы изучались в различных классах универсальных алгебр [2–4].

В работе [5], где доминионы впервые исследовались в квазимногообразиях универсальных алгебр, было дано расширение понятия доминиона на случай, когда $A \notin \mathcal{M}$. Появилась возможность ввести в рассмотрение множество $L(A, H, \mathcal{M}) = \{dom_A^{\mathcal{N}}(H) \mid \mathcal{N} \in L_q(\mathcal{M})\}$ доминионов, где $L_q(\mathcal{M})$ — решетка подквазимногообразий квазимногообразия $\mathcal{M}$.

В [5] были найдены условия, при выполнении которых множество $L(A, H, \mathcal{M})$ образует решетку относительно теоретико-множественного включения, и поставлен вопрос: существует ли квазимногообразие $\mathcal{M}$ универсальных алгебр такое, что множество $L(A, H, \mathcal{M})$ не образует решетку относительно теоретико-множественного включения?

В настоящей работе доказано, что для произвольного квазимногообразия $\mathcal{M}$ абелевых групп множество $L(A, H, \mathcal{M})$ образует решетку относительно теоретико-множественного включения.

Предварительные замечания. Определим, следуя [5], доминион подгруппы H группы A в квазимногообразии групп $\mathcal{M}$ следующим образом:

$$dom_A^{\mathcal{M}}(H) = \{a \in A \mid \forall M \in \mathcal{M}\ \forall \varphi, \psi : A \to M,$$
$$\text{если } \varphi|_H = \psi|_H, \text{ то } \varphi(a) = \psi(a)\},$$

где $\varphi, \psi : A \to M$ — гомоморфизмы группы A в группу M; $\varphi|_H$, $\psi|_H$ — сужение гомоморфизмов φ, ψ на H; $\varphi(a)$, $\psi(a)$ — образы элемента a при гомоморфизмах φ, ψ.

Из определения доминиона сразу получаем, что он является подгруппой группы A, содержащей H. Нетрудно заметить также, что включение квазимногообразий $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ влечет включение доминионов $dom_A^{\mathcal{M}}(H) \subseteq dom_A^{\mathcal{N}}(H)$. Кроме того, если $\mathcal{M}$ — произвольное квазимногообразие абелевых групп, то $dom_A^{\mathcal{M}}(H)$ содержит коммутант группы A.

В работе неоднократно используются следующие факты.

Лемма 1 [5, лемма 4.2]. *Пусть $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ — произвольные квазимногообразия универсальных алгебр, A — алгебра, H — подалгебра алгебры A. Тогда $dom_A^{\mathcal{M}}(H) \cap dom_A^{\mathcal{N}}(H) = dom_A^{\mathcal{M} \vee \mathcal{N}}(H)$.*

Теорема 1 [6, теорема 1]. *Доминион подгруппы H группы A в произвольном квазимногообразии абелевых групп $\mathcal{M}$ совпадает с наименьшей нормальной подгруппой из A, содержащей H, фактор-группа по которой из $\mathcal{M}$.*

Из теоремы 1 вытекает, что для произвольного квазимногообразия $\mathcal{M}$ абелевых групп $dom_A^{\mathcal{M}}(H) = \{a \in A \mid \forall M \in \mathcal{M}\ \forall \varphi : A \to M,$ если $H \subseteq \ker\varphi$, то $\varphi(a) = e\}$, где $\ker\varphi$ — ядро гомоморфизма φ группы A в группу M.

Далее потребуется описание квазимногообразий абелевых групп, данное в [7]. Согласно

[7], два квазимногообразия абелевых групп совпадают тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые пересечения с множеством групп Q, состоящим из бесконечной циклической группы Z, единичной группы $E = \{e\}$ и циклических p-групп Z_{p^n}, где p пробегает множество всех простых чисел $\mathbf{P}$, а n — множество всех натуральных чисел $\mathbf{N}$. Из [7] вытекает, что произвольное квазимногообразие $\mathcal{M}$ абелевых групп порождается некоторым множеством групп $S \subseteq Q$. Будем обозначать этот факт записью $\mathcal{M} = q(S)$ либо $\mathcal{M} = qS$, если S состоит из одной группы. Циклическая p-группа принадлежит квазимногообразию $q(S)$ в том и только в том случае, когда она изоморфна подходящей подгруппе некоторой группы из S. Отметим также, что если группа Z не принадлежит квазимногообразию $\mathcal{M} = q(S)$, то множество S состоит из конечного числа неизоморфных циклических p-групп, а квазимногообразие $\mathcal{M}$ является многообразием.

Используемые в работе сведения из теории групп содержатся в [8], из теории квазимногообразий — в [9–11], а из теории решеток — в [12].

Приведем список обозначений и определений, применяемых в работе.

$H \leq A$ — H является подгруппой группы A.

$gr(H)$ — подгруппа группы A, порожденная элементами множества H.

$A^n = gr(a^n \mid a \in A)$.

A/H — фактор-группа группы A по нормальной подгруппе H.

$\tau(A)$ — периодическая часть абелевой группы A.

$\mid a \mid$ — порядок элемента a.

(n, r) — наибольший общий делитель чисел $n, r \in \mathbf{N}$.

Z_{p^∞} – квазициклическая группа типа p^∞, $p \in \mathbf{P}$.

Пусть A – абелева группа, $a \in A$, $p \in \mathbf{P}$. Наибольшее неотрицательное целое число n, для которого уравнение $x^{p^n} = a$ имеет решение $x \in A$, называется p-высотой элемента a. Если уравнение $x^{p^n} = a$ разрешимо при любом n, то a называется элементом бесконечной p-высоты.

Основной результат.

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{M}$ — произвольное квазимногообразие абелевых групп, A — группа, $H \leq A$, $\mathcal{N} \in L_q(\mathcal{M})$, $\mathcal{N}$ задано тождеством $(\forall x)(x^n = 1)$. Тогда $dom_A^{\mathcal{N}}(H) = A^n dom_A^{\mathcal{M}}(H)$.*

Доказательство. Нетрудно заметить, что $A/A^n dom_A^{\mathcal{M}}(H) \in \mathcal{N}$. Тогда по теореме 1 $dom_A^{\mathcal{N}}(H) \subseteq A^n dom_A^{\mathcal{M}}(H)$.

Рассмотрим теперь произвольный гомоморфизм $\varphi : A \to N \in \mathcal{N}$, удовлетворяющий условию $H \subseteq \ker\varphi$. Ясно, что $A^n \subseteq \ker\varphi$. Согласно теореме 1 $dom_A^{\mathcal{M}}(H) \subseteq \ker\varphi$. Таким образом, $dom_A^{\mathcal{N}}(H) = A^n dom_A^{\mathcal{M}}(H)$. Лемма доказана.

Лемма 2 обобщает аналогичный результат из [13], доказанный в предположении, что $A/dom_A^{\mathcal{M}}(H)$ – конечно-порожденная группа.

Лемма 3. *Пусть $\mathcal{M}$ – произвольное квазимногообразие абелевых групп, $\mathcal{N}, \mathcal{R} \in L_q(\mathcal{M})$, A – группа, $H \leq A$. Если выполнено одно из условий*

(1) $\mathcal{N}, \mathcal{R}$ – многообразия;

(2) $\overline{A} = A/dom_A^{\mathcal{M}}(H)$ – периодическая группа;

(3) $Z \in \mathcal{N}, Z \in \mathcal{R}$,

то имеет место равенство

$dom_A^{\mathcal{N}\wedge\mathcal{R}}(H) = dom_A^{\mathcal{N}}(H) dom_A^{\mathcal{R}}(H)$.

Доказательство. Доказательства требует включение $dom_A^{\mathcal{N}\wedge\mathcal{R}}(H) \subseteq dom_A^{\mathcal{N}}(H) dom_A^{\mathcal{R}}(H)$.

Пусть $x \in dom_A^{\mathcal{N}\wedge\mathcal{R}}(H)$. В каждом из перечисленных в условии леммы случаев можно выбрать наименьшие числа $n, r \in \mathbf{N}$, удовлетворяющие условиям $x^n \in dom_A^{\mathcal{N}}(H)$, $x^r \in dom_A^{\mathcal{R}}(H)$.

Действительно, в случае (1) возможность этого выбора вытекает из леммы 2, а в случае (2) – из периодичности группы $\overline{A}$. Для того чтобы разобраться с (3), рассмотрим цепочку гомоморфизмов $\varphi : A \to \overline{A} \to \overline{A}/\tau(\overline{A}) \in \mathcal{N} \wedge \mathcal{R}$. Через $\overline{x}$ обозначим образ элемента x при естественном гомоморфизме $A \to \overline{A}$. Если $\mid \overline{x} \mid = \infty$, то $\varphi(x) \neq e$ и $x \notin dom_A^{\mathcal{N}\wedge\mathcal{R}}(H)$, что противоречит выбору x. Значит, $\mid \overline{x} \mid < \infty$ и этим обусловлена возможность выбора чисел n, r.

Если $(n, r) = 1$, то $x \in dom_A^{\mathcal{N}}(H) dom_A^{\mathcal{R}}(H)$.

Предположим, что $(n, r) \neq 1$. Сначала рассмотрим случаи (1), (2) одновременно. Запишем числа n, r в виде $n = p^s n_1$, $r = p^t r_1$, где $p \in \mathbf{P}$, $(p, n_1) = 1$, $(p, r_1) = 1$. Так как $x^{n_1} \notin dom_A^{\mathcal{N}}(H)$, $x^{r_1} \notin dom_A^{\mathcal{R}}(H)$, то, по определению доминиона, найдутся гомоморфизмы $\varphi : A \to N \in \mathcal{N}$, $\psi : A \to R \in \mathcal{R}$ такие, что $H \subseteq \ker\varphi \cap \ker\psi$, $\varphi(x^{n_1}) \neq e$, $\psi(x^{r_1}) \neq e$.

Из равенств $\varphi(x^n) = \varphi(x^{p^s n_1}) = \varphi(x^{n_1})^{p^s} = e$, $\psi(x^r) = \psi(x^{p^t r_1}) = \psi(x^{r_1})^{p^t} = e$ вытекает, что $\varphi(x^{n_1})$, $\psi(x^{r_1})$ – элементы порядка p.

Поскольку $\varphi(A)$, $\psi(A)$ – периодические абелевы группы, то, согласно [8], каждая из них разлагается в прямое произведение своих примарных компонент. Пусть π_1, π_2 – проектирования групп $\varphi(A)$, $\psi(A)$ на свои p-компоненты. Ввиду $\varphi(x^{n_1}) \neq e$, $\psi(x^{r_1}) \neq e$ имеем: $\pi_1(\varphi(x^{n_1})) \neq e$, $\pi_2(\psi(x^{r_1})) \neq e$. Так как $\pi_1(\varphi(A)) \in \mathcal{N} \wedge \mathcal{R}$, или $\pi_2(\psi(A)) \in \mathcal{N} \wedge \mathcal{R}$, то $x \notin dom_A^{\mathcal{N}\wedge\mathcal{R}}(H)$. Полученное противоречие означает, что в случаях (1), (2) утверждение леммы доказано.

Осталось рассмотреть случай (3). Пусть p делит (n, r). Поскольку n, r делят $|\ \overline{x}\ |$, то (n, r) делит $|\ \overline{x}\ |$ и $|\ \overline{x}\ |= p^s t$, где $(p, t) = 1$.

Для начала будем считать, что $\overline{x}^t$ – элемент бесконечной p-высоты. Если $Z_{p^\infty} \notin \mathcal{N}$, то для любого гомоморфизма $\varphi : A \to N \in \mathcal{N}$ такого, что $H \subseteq ker\varphi$, выполнено $\varphi(x^t) = e$. Следовательно, $x^t \in dom_A^{\mathcal{N}}(H)$. Это противоречит тому, что n – наименьшее натуральное число с этим свойством.

Значит, $Z_{p^\infty} \in \mathcal{N} \wedge \mathcal{R}$. Введем обозначение $T = gr(\overline{a} \in \overline{A} \mid (|\ \overline{a}\ |, p) = 1)$. В цепочке гомоморфизмов $\varphi : A \to \overline{A} \to \overline{A}/T \in q(Z_{p^\infty}) \subseteq \mathcal{N} \wedge \mathcal{R}$ имеем $\varphi(x^t) \neq e$. Значит, $x \notin dom_A^{\mathcal{N}\wedge\mathcal{R}}(H)$. Противоречие. Итак, $\overline{x}^t$ не является элементом бесконечной p-высоты.

Пусть k – наименьшее натуральное число со свойством $\overline{x}^t \notin \overline{A}^{p^k}$. Тогда $Z_{p^k} \in \mathcal{N} \wedge \mathcal{R}$. Действительно, если $Z_{p^k} \notin \mathcal{N}$, то для любого гомоморфизма $\varphi : A \to N \in \mathcal{N}$ выполнено $\varphi(x^t) = e$ и $x^t \in dom_A^{\mathcal{N}}(H)$, что неверно.

Вновь рассмотрим цепочку гомоморфизмов $\varphi : A \to \overline{A} \to \overline{A}/\overline{A}^{p^k} \in \mathcal{N} \wedge \mathcal{R}$. Ясно, что $\varphi(x^t) \neq e$. Значит, $x \notin dom_A^{\mathcal{N}\wedge\mathcal{R}}(H)$. Полученное противоречие означает, что $(n, r) = 1$ и $x \in dom_A^{\mathcal{N}}(H) dom_A^{\mathcal{R}}(H)$. Лемма доказана.

Лемма 3 является обобщением результата из [6], доказанного в предположении, что $A/dom_A^{\mathcal{M}}(H)$ – конечно-порожденная группа.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{M}$ – произвольное квазимногообразие абелевых групп, A – группа, $H \leq A$. Тогда множество $L(A, H, \mathcal{M}) = \{dom_A^{\mathcal{N}}(H) \mid \mathcal{N} \in L_q(\mathcal{M})\}$ образует решетку относительно теоретико-множественного включения.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{N}, \mathcal{R} \in L_q(\mathcal{M})$. По лемме 1 имеет место следующее равенство: $dom_A^{\mathcal{N}\vee\mathcal{R}}(H) = dom_A^{\mathcal{N}}(H) \cap dom_A^{\mathcal{R}}(H)$. Покажем, что точная верхняя грань $dom_A^{\mathcal{N}}(H) \vee dom_A^{\mathcal{R}}(H)$ существует.

Ввиду леммы 3 достаточно рассмотреть случай, когда $Z \notin \mathcal{N}, Z \in \mathcal{R}$ и группа $\overline{A}$ не является периодической. Зафиксируем элемент $x \in A$ такой, что $|\ \overline{x}\ |= \infty$. Рассмотрим произвольное квазимногообразие $\mathcal{F} \in L_q(\mathcal{M})$, удовлетворяющее условию $dom_A^{\mathcal{F}}(H) \supseteq dom_A^{\mathcal{N}}(H) dom_A^{\mathcal{R}}(H)$.

Пусть многообразие $\mathcal{N}$ задается тождеством $x^n = 1$. По лемме 2 $dom_A^{\mathcal{N}}(H) = A^n dom_A^{\mathcal{M}}(H)$. Значит, $x^n \in dom_A^{\mathcal{F}}(H)$.

Если $Z \in \mathcal{F}$, то, рассмотрев цепочку гомоморфизмов $\varphi : A \to \overline{A} \to \overline{A}/\tau(\overline{A}) \in qZ \subseteq \mathcal{R}$, получим $\varphi(x^n) \neq e$ и $x^n \notin dom_A^{\mathcal{F}}(H)$.

Итак, $Z \notin \mathcal{F}$. Значит, $\mathcal{F}$ – многообразие, заданное тождеством $x^k = 1$ для некоторого $k \in \mathbf{N}$. По лемме 2 $dom_A^{\mathcal{F}}(H) = A^k dom_A^{\mathcal{M}}(H)$.

Отсюда $A^{(n,k)} \subseteq A^k dom_A^{\mathcal{M}}(H)$. В силу включения $A^{(n,k)} \supseteq A^k$ имеем равенство $A^{(n,k)} dom_A^{\mathcal{M}}(H) = dom_A^{\mathcal{F}}(H)$, из которого вытекает конечность множества

$$\left\{dom_A^{\mathcal{F}}(H) \mid dom_A^{\mathcal{F}}(H) \supseteq dom_A^{\mathcal{N}}(H) dom_A^{\mathcal{R}}(H)\right\}.$$

Обозначим его элементы $dom_A^{\mathcal{F}_i}(H), i \in I$, где I — конечное множество. Согласно лемме 1 $\bigcap_{i\in I} dom_A^{\mathcal{F}_i}(H) = dom_A^{\vee_{i\in I}\mathcal{F}_i}(H)$, что влечет равенство $dom_A^{\mathcal{N}}(H) \vee dom_A^{\mathcal{R}}(H) = dom_A^{\vee_{i\in I}\mathcal{F}_i}(H)$.

Библиографический список

1. Isbell J.R. Epimorphisms and Dominions // Proceedings of the Conference on Categorical Algebra. — New York, 1965.

2. Magidin A. Dominions in Varieties of Nilpotent Groups // Comm. Algebra. — 2000. — №3(28).

3. Wasserman D. Epimorphisms and Dominions in Varieties of Lattices. — Ph.D. Thesis, 2001.

4. Bergman G.M. Ordering Coproducts of Groups and Semigroups // J. Algebra. — 1990. — №2(133).

5. Budkin A. Dominions in Quasivarieties of Universal Algebras // Studia Logica. — 2004. — №1–2(78).

6. Шахова С.А. О решетках доминионов в квазимногообразиях абелевых групп // Алгебра и логика. — 2005. — №2(44).

7. Виноградов А.А. Квазимногообразия абелевых групп // Алгебра и логика. — 1965. — №6(4).

8. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. — М., 1982.

9. Мальцев А.И. Алгебраические системы. — М., 1970.

10. Будкин А.И. Квазимногообразия групп. — Барнаул, 2002.

11. Горбунов В.А. Алгебраическая теория квазимногообразий. — Новосибирск, 1999.

12. Биркгоф Г. Теория решеток. — М., 1984.

13. Шахова С.А. Условия дистрибутивности решеток доминионов в квазимногообразиях абелевых групп // Алгебра и логика. — 2006. — №4(45).