УДК 514.765

А.А. Папин

О параболической аппроксимации одной модели двухфазной смеси

A.A. Papin

About Parabolic Approximation for the One Model of Two-Phase Mixture

Рассматривается параболическая аппроксимация модели взаимопроникающего движения двух вязких несжимаемых жидкостей. Доказано существование обобщенного решения на любом конечном интервале времени.

The parabolic approximation for the model of interpenetrative motion of two viscous fluids is considered. The existence of the generalized solution for any finite time horizon is proved.

Ключевые слова: двухфазная смесь, параболическая аппроксимация, разрешимость.

Key words: two-phase mixture, parabolic approximation, solvability.

1. Постановка задачи.

В работе изучается следующая квазилинейная система уравнений составного типа:

$$\frac{\partial \rho_i^0 s_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho_i^0 s_i v_i^\varepsilon)-\varepsilon\frac{\partial^2\rho_i^0 s_i}{\partial x^2}=0,\quad i=1,2, \tag{1}$$

$$\rho_i^0 s_i\left(\tfrac{\partial v_i}{\partial t}+v_i\tfrac{\partial v_i}{\partial x}\right)-\tfrac{\partial}{\partial x}\left(\mu_i\ s_i\tfrac{\partial v_i}{\partial x}\right)=-s_i\tfrac{\partial p_i}{\partial x}+ +\varphi_i+\rho_i^0 s_i g, \tag{2}$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^2 s_i=1,\ \varphi_1=K(s_1)(v_2-v_1)=-\varphi_2, \tag{3}$$

$$p_2-p_1=p_c(s_1,\theta),$$

$$\sum_{i=1}^2 c_i\rho_i^0 s_i(\frac{\partial\theta}{\partial t}+v_i\frac{\partial\theta}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial x}(\chi(s_1)\frac{\partial\theta}{\partial x}), \tag{4}$$

решаемая в области $(x,t)\in Q_T=\Omega\times(0,T)$, $\Omega=(0,1)$, $S_T=\partial\Omega\times(0,T)$, при краевых начальных и дополнительном условиях $(i=1,2)$

$$v_i\mid_{S_T}=\tfrac{\partial s_1}{\partial x}\mid_{S_T}=\tfrac{\partial\theta}{\partial x}\mid_{S_T}=\int\limits_0^1 p_1(x,t)dx=0,$$

$$v_i\mid_{t=0}=v_i^0(x),\ s_1\mid_{t=0}=s^0(x),\ \theta\mid_{t=0}=\theta^0(x). \tag{5}$$

Здесь $\varepsilon\in[0,1]$ и при $\varepsilon=0$ данная начально-краевая задача описывает одномерное движение между непроницаемыми теплоизолированными стенками двухфазной смеси вязких жидкостей [1, 2]. В этом движении v_i, s_i, p_i – соответственно скорость, объемная концентрация и давление i-й фазы; θ – абсолютная температура среды ($\theta_1=\theta_2=\theta$); g – внешняя сила; постоянные $\rho_i^0>0$, $\mu_i>0$, $c_i>0$ – соответственно истинная плотность, коэффициент динамической вязкости и теплоемкость i-й фазы при постоянном объеме; коэффициент взаимодействия фаз $K(s_1)$, коэффициент теплопроводности смеси $\chi(s_1)$ и разность давлений $p_c(s_1,\theta)$ – заданные функции. Искомыми являются функции $(s_i(x,t),v_i(x,t),p_i(x,t),\theta(x,t))$.

Решение $(s_i(x,t),\,v_i(x,t),\,p_i(x,t),\,\theta(x,t))$ задачи (1)–(5) при $\varepsilon=0$ получается как предел при $\varepsilon\to+0$ последовательностей $\{s_i^\varepsilon(x,t)\},\{v_i^\varepsilon(x,t)\},\{p_i^\varepsilon(x,t)\},\ \theta^\varepsilon(x,t)\}$.

Разрешимость задачи (1)–(5) при каждом $\varepsilon>0$ в различных функциональных пространствах установлена в [3] и опирается на следующую вспомогательную задачу (в дальнейшем – задача A_ε) для функций $s^\varepsilon(x,t)=s_1^\varepsilon(x,t)$, $u^\varepsilon(x,t)=\beta_1 v_1^\varepsilon(x,t)-\beta_2 v_2^\varepsilon(x,t)$, $(\beta_i=\mu_i/\mu$, $\mu=\mu_1+\mu_2)$, $p_1^\varepsilon(x,t)$, $\theta^\varepsilon(x,t)$:

$$\frac{\partial s^\varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(a(s^\varepsilon)u^\varepsilon)-\varepsilon\frac{\partial^2 s^\varepsilon}{\partial x^2}=0, \tag{6}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке аналитической ведомственной целевой программы "Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)" (код проекта № 2.2.2.4/4278), а также при поддержке федеральной целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 годы.

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \nu \frac{\partial}{\partial x}(b_0(s^\varepsilon)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}) +$$
$$+\nu_1 \frac{b_0(s^\varepsilon)}{a_\mu^3(s^\varepsilon)a(s^\varepsilon)} u^\varepsilon (\frac{\partial s^\varepsilon}{\partial x})^2 + \frac{a_0(s^\varepsilon)}{a^{1+\beta}(s^\varepsilon)} u^\varepsilon =$$
$$= -a_2(s^\varepsilon)u^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} + \varepsilon \frac{b_0'(s^\varepsilon)}{b_0(s^\varepsilon)} u^\varepsilon \frac{\partial^2 s^\varepsilon}{\partial^2 x} +$$
$$+\nu(b_0(s^\varepsilon)\frac{a'(s^\varepsilon)}{a(s^\varepsilon)} - b_0'(s^\varepsilon))\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}\frac{\partial s^\varepsilon}{\partial x} - \tag{7}$$
$$-a_3(s^\varepsilon)(u^\varepsilon)^2 \frac{\partial s^\varepsilon}{\partial x} + b_0(s^\varepsilon) g_0 +$$
$$+ \frac{b_0(s^\varepsilon)}{\rho^0}\frac{\partial p_c(s^\varepsilon, \theta^\varepsilon)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial p_1^\varepsilon}{\partial x} = \sum_{i=1}^2 \{ \frac{\partial}{\partial x}(\mu_i s_i^\varepsilon \frac{\partial v_i^\varepsilon}{\partial x} - \rho_i^0 s_i^\varepsilon (v_i^\varepsilon)^2 +$$
$$+\varepsilon \rho_i^0 v_i^\varepsilon \frac{\partial s^\varepsilon}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial t}(\rho_i^0 s_i^\varepsilon v_i^\varepsilon) - \tag{8}$$
$$-\varepsilon \frac{\partial v_i^\varepsilon}{\partial x}\frac{\partial s_i^\varepsilon}{\partial x} + \rho_i^0 s_i^\varepsilon g\} - (1-s^\varepsilon)\frac{\partial p_c(s^\varepsilon,\theta^\varepsilon)}{\partial x},$$

$$\sum_{i=1}^2 c_i \rho_i^0 s_i^\varepsilon (\frac{\partial \theta^\varepsilon}{\partial t} + v_i^\varepsilon \frac{\partial \theta^\varepsilon}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(\chi(s^\varepsilon)\frac{\partial \theta^\varepsilon}{\partial x}), \tag{9}$$
$$v_i^\varepsilon = v_i^\varepsilon(s^\varepsilon, u^\varepsilon),$$

$$u^\varepsilon \mid_{S_T} = \frac{\partial s^\varepsilon}{\partial x} \mid_{S_T} = \frac{\partial \theta^\varepsilon}{\partial x} \mid_{S_T} = \int\limits_0^1 p_1^\varepsilon(x,t)dx = 0,$$
$$u^\varepsilon(x,0) = u^0(x), s^\varepsilon(x,0) = s^0(x),$$
$$\theta^\varepsilon(x,0) = \theta^0(x). \tag{10}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$a(s) = \frac{s(1-s)}{a_\mu}, \quad a_\mu(s) = \beta_1(1-s) + \beta_2 s,$$
$$\nu = \frac{\mu}{\rho^0}, \rho^0 = \rho_1^0 + \rho_2^0, \nu_1 = \nu\beta_1\beta_2, b_0(s) = \frac{a_\mu(s)}{a_\rho(s)},$$
$$a_\rho(s) = \alpha_1(1-s) + \alpha_2 s, \quad \alpha_i = \frac{\rho_i^0}{\rho^0}, \quad i = 1,2;$$
$$a_1(s) = \frac{\alpha_1(1-s)^2 - \alpha_2 s^2}{a_\mu^2}, \quad a_1'(s) \equiv \frac{da_1}{ds},$$
$$a_2(s) = b_0(s)a_1(s) + a(s)\frac{b_0'(s)}{b_0(s)},$$
$$a_3(s) = \frac{1}{2}a_1'(s)b_0(s) + a'(s)\frac{b_0'(s)}{b_0(s)}, \quad g_0 \equiv (\alpha_1 - \alpha_2)g,$$
$$\chi_0(s) = c_1\rho_1^0 s + c_2\rho_2^0(1-s), \quad c_0 = c_1\rho_1^0 - c_2\rho_2^0.$$

Следует отметить, что при $s \in [0,1]$ все эти функции являются ограниченными. В дальнейшем возникают различные комбинации функций, зависящих от s. Часть из них обладает указанными свойствами, а часть может иметь особенности при $s = 0$ и $s = 1$ (например, функции $p_c(s,\theta)$, $\chi(s)$ и их производные). Все эти свойства функций уточняются по ходу изложения.

Определение 1. Сильным решением задачи A_ε называется совокупность функций $(s^\varepsilon(x,t), u^\varepsilon(x,t), p_1^\varepsilon(x,t), \theta^\varepsilon(x,t))$ из пространств

$$(s^\varepsilon, u^\varepsilon, \theta^\varepsilon) \in L_\infty(0,T; W_2^1(\Omega)) \cap L_2(0,T; W_2^2(\Omega)),$$
$$(\frac{\partial s^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial \theta^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial p_1^\varepsilon}{\partial x}) \in L_2(Q_T),$$
$$p_1^\varepsilon \in L_\infty(0,T; L_2(\Omega)),$$

удовлетворяющих уравнениям (6)–(9) почти всюду в $Q_T = \Omega \times (0,T)$ и принимающих заданные граничные и начальные значения в смысле следов функций из указанных классов.

Определение 2. Классическим решением задачи A_ε называется совокупность функций $(s^\varepsilon(x,t), u^\varepsilon(x,t), p_1^\varepsilon(x,t), \theta^\varepsilon(x,t))$, если они обладают непрерывными производными, входящими в уравнения (6)–(9), и удовлетворяют уравнениям, начальным и граничным условиям как непрерывные в $\overline{Q}_T$ функции.

Теорема 1 [3]. Пусть данные задачи A_ε удовлетворяют следующим условиям гладкости:

$$(s^0, u^0, \theta^0) \in W_2^1(\Omega), \quad g \in L_2(0,T; L_2(\Omega)),$$
$$0 < m_0 \le s^0(x) \le M_0 < 1,$$
$$0 < k_1^{-1} \le \theta^0(x) \le k_1 < \infty,$$

и условиям согласования $u^0(0) = u^0(1) = 0$. Кроме того $K(s)$, $p_c(s,\theta)$, $\chi(s)$ – непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов, причем

$$K(s) = K_0(s)(s(1-s))^{-\beta}, \quad \beta \ge 1,$$
$$K_0(s) \in [k_0^{-1}, k_0],$$
$$0 < k_0 = const < \infty, \quad K_0(s) \in C^1[0,1];$$
$$|\frac{\partial p_c(s,\theta)}{\partial s}| \le \frac{k_1}{s(1-s)}, \quad (\frac{\partial p_c(s,\theta)}{\partial \theta})^2 \le \frac{k_1\chi(s)}{s(1-s)},$$
$$p_c^2(s,\theta) \le k_1(\frac{1}{s(1-s)})^\beta,$$
$$k_1^{-1}(s(1-s))^n \le \chi(s) \le k_1(s(1-s))^n,$$
$$n = const, \quad k_1 = const > 0.$$

Тогда при каждом $\varepsilon > 0$ существует единственное сильное решение $(s^\varepsilon(x,t), \ u^\varepsilon(x,t), \ p_1^\varepsilon(x,t), \ \theta^\varepsilon(x,t))$ задачи A_ε, которое обладает свойствами:

$$(s^\varepsilon, u^\varepsilon, \theta^\varepsilon) \in L_\infty(0,T; W_2^1(\Omega)) \cap L_2(0,T; W_2^2(\Omega)),$$

$$(\frac{\partial s^\varepsilon}{\partial t},\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t},\frac{\partial \theta^\varepsilon}{\partial t},\frac{\partial p_1^\varepsilon}{\partial x})\in L_2(Q_T),$$
$$p_1^\varepsilon\in L_\infty(0,T;L_2(\Omega)),$$

причем найдутся числа $0<m^{(1)}<M^{(1)}<1$, $0<m^{(2)}<M^{(2)}<\infty$ такие, что

$$0<m^{(1)}\le s^\varepsilon(x,t)\le M^{(1)}<1,$$
$$0<m^{(2)}\le \theta^\varepsilon(x,t)\le M^{(2)}<\infty,\quad (x,t)\in\overline{Q}_T.$$

Если дополнительно

$$(s^0,u^0,\theta^0)\in C^{2+\alpha}(\Omega),\quad g\in C^{\alpha,\alpha/2}(Q_T),$$

$p_c(s,\theta)$ и $\chi(s)$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов, выполнены условия согласования первого порядка данных задачи, то в Q_T существует единственное классическое решение задачи A_ε, удовлетворяющее условиям

$$(s^\varepsilon,u^\varepsilon,\theta^\varepsilon)\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T),\quad p_1^\varepsilon\in C^{1+\alpha,\alpha/2}(Q_T),$$

причем найдутся числа $0<m^{(3)}<M^{(3)}<1$, $0<m^{(4)}<M^{(4)}<\infty$ такие, что

$$0<m^{(3)}\le s^\varepsilon(x,t)\le M^{(3)}<1,$$
$$0<m^{(4)}\le \theta^\varepsilon(x,t)\le M^{(4)}<\infty,\quad (x,t)\in\overline{Q}_T.$$

Существование сильного и классического решений задачи A_ε при каждом $\varepsilon>0$ и на достаточно малом промежутке времени доказывается с помощью теоремы Банаха о сжимающем операторе. Затем устанавливаются априорные оценки решений задачи A_ε, зависящие только от параметра $\varepsilon>0$, данных задачи и величины T интервала времени, но не зависящие от промежутка существования локального решения. После этого локальное решение продолжается на весь промежуток $[0,T]$.

Ввиду сильной нелинейности уравнений системы (6)–(9) возникает необходимость использования дополнительного уравнения для производной концентрации s_x^ε. Удобным оказалось использование функции $R^\varepsilon(x,t)=(\mu/a(s^\varepsilon))s_x^\varepsilon+b(s^\varepsilon)u^\varepsilon$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial R^\varepsilon}{\partial t}+U^\varepsilon\frac{\partial R^\varepsilon}{\partial x}=-\frac{1}{2}a''(s^\varepsilon)u^\varepsilon R^\varepsilon\frac{\partial s^\varepsilon}{\partial x}+ +\varepsilon\frac{\partial B^\varepsilon}{\partial x}+g_1^\varepsilon, \qquad (11)$$

где

$$U^\varepsilon=a'(s^\varepsilon)u^\varepsilon,\quad b(s^\varepsilon)=\rho^0\frac{a_\rho(s^\varepsilon)}{a_\mu(s^\varepsilon)},\ B^\varepsilon=\frac{\mu}{a(s^\varepsilon)}\frac{\partial^2 s^\varepsilon}{\partial x^2},$$

$$g_1^\varepsilon=-(\beta_2\rho_1^0-\beta_1\rho_2^0)\frac{a(s^\varepsilon)}{a_\mu(s^\varepsilon)}u^\varepsilon(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}+$$
$$+\frac{\beta_1(1-s^\varepsilon)-\beta_2 s^\varepsilon}{a_\mu(s^\varepsilon)}u^\varepsilon\frac{\partial s^\varepsilon}{\partial x})+\rho^0 g_0-$$
$$-\frac{K(s^\varepsilon)}{a(s^\varepsilon)a_\mu^2(s^\varepsilon)}u^\varepsilon+\frac{\partial p_c^\varepsilon(s^\varepsilon,\theta^\varepsilon)}{\partial x}.$$

Следствием (11) является уравнение $(\rho^\varepsilon(x,t)=a(s^\varepsilon)(R^\varepsilon)^2)$

$$\frac{\partial\rho^\varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(U^\varepsilon\rho^\varepsilon)=2a(s^\varepsilon)R^\varepsilon g_1^\varepsilon+\varepsilon D^\varepsilon, \qquad (12)$$

$$D^\varepsilon=a'(s^\varepsilon)(R^\varepsilon)^2\frac{\partial^2 s^\varepsilon}{\partial x^2}+2a(s^\varepsilon)R^\varepsilon\frac{\partial B^\varepsilon}{\partial x}.$$

В настоящей работе изучаются свойства решений задачи A_ε.

2. Априорные оценки. Компактность.

Лемма 1. Для решений задачи A_ε справедливы следующие оценки:

$$0<m\le s^\varepsilon(x,t)\le M<1,\quad x\in\overline{\Omega},$$
$$0<m^{(1)}\le\theta^\varepsilon(x,t)\le M^{(1)}<\infty,\quad x\in\overline{\Omega}.$$
$$||\rho^\varepsilon(t)||^2+||\frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial x}(t)||^2+\int\limits_0^t(\max_{x\in[0,1]}|\frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial x}(x,\tau)|+$$
$$+||\frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial\tau}(\tau)||^2+||\frac{\partial^2\theta^\varepsilon}{\partial x^2}(\tau)||^2)d\tau+$$
$$+\|\frac{\partial s^\varepsilon}{\partial x}(t)u(t)\|^2+\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}(t)\|^2+\int\limits_0^t(\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial\tau}(\tau)\|^2+$$
$$+(\int\limits_0^1|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x^2}(x,\tau)|dx)^2)d\tau\le C.$$

Постоянные C, m, M, $m^{(1)}$, $M^{(1)}$ зависят от данных задачи и не зависят от ε; $||u(t)||$ – норма $u(x,t)$ в $L_2(\Omega)$.

Доказательство. Оценки для s^ε, u^ε, θ^ε получены в [3]. Для оценки ρ^ε уравнение (12) представим в виде

$$\frac{\partial\rho^\varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(U^\varepsilon\rho^\varepsilon)+\varepsilon A^2-\varepsilon\frac{\partial^2\rho^\varepsilon}{\partial x^2}=F^\varepsilon, \qquad (13)$$

где

$$A^2=2a(s^\varepsilon)\left(\frac{\partial R^\varepsilon}{\partial x}\right)^2+|a''(s^\varepsilon)|\frac{a^2(s^\varepsilon)}{\mu^2}(R^\varepsilon)^4,$$

$$F^\varepsilon=2a(s^\varepsilon)g_1^\varepsilon R^\varepsilon+\varepsilon F_0^\varepsilon,$$

$$F_0^\varepsilon=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu}a'(s^\varepsilon)b(s^\varepsilon)u^\varepsilon(R^\varepsilon)^2\right)-$$
$$-''\frac{a^2}{\mu^2}(R^\varepsilon)^3b(s^\varepsilon)u^\varepsilon-2R^\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x^2}(a(s^\varepsilon)b(s^\varepsilon)u^\varepsilon)+$$

$$+\frac{2}{\mu}a'(s^\varepsilon)b(s^\varepsilon)u^\varepsilon R^\varepsilon(\frac{a(s^\varepsilon)}{\mu}\frac{\partial R^\varepsilon}{\partial x}+a'(s^\varepsilon)R^\varepsilon\frac{\partial s^\varepsilon}{\partial x})-$$

$$\frac{2}{\mu}a'(s^\varepsilon)b(s^\varepsilon)u^\varepsilon R^\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}(a(s^\varepsilon)b(s^\varepsilon)u^\varepsilon)+$$

$$+\frac{1}{\mu}a'(s^\varepsilon)(R^\varepsilon)^2\frac{\partial}{\partial x}(a(s^\varepsilon)b(s^\varepsilon)u^\varepsilon u^\varepsilon).$$

Используя равномерную по ε ограниченность $u^\varepsilon(x,t)$ и $s^\varepsilon(x,t)$, получим

$$|F_0^\varepsilon|\le C(|R^\varepsilon\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}|+|R^\varepsilon\frac{\partial R^\varepsilon}{\partial x}|+|R^\varepsilon|^3+(R^\varepsilon)^2|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}|+$$

$$+(R^\varepsilon)^2+|R^\varepsilon g_0|+|R^\varepsilon\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}|),$$

$$2a(s^\varepsilon)|g_1^\varepsilon R^\varepsilon|\le C(\rho^\varepsilon+|R^\varepsilon\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}|+|R^\varepsilon|+|g_0R^\varepsilon|),$$

где постоянная C не зависит от ε.

Следовательно, $F^\varepsilon\in L_1(Q_T)$.

Покажем, что справедливы равномерные по ε оценки вида

$$\int_0^1|\rho^\varepsilon|^{1+\sqrt{\varepsilon}}dx+\varepsilon\int_0^t\int_0^1|\rho^\varepsilon|^{\sqrt{\varepsilon}}(\sqrt{\varepsilon}(\frac{\partial R^\varepsilon}{\partial x})^2+$$

$$+(\rho^\varepsilon)^2)dxdt\le C(1+\int_o^1(\rho^\varepsilon|_{t=0})^{1+\sqrt{\varepsilon}}dx).$$

Из (13) имеем (верхний индекс ε опускается):

$$\frac{1}{1+\delta}\frac{\partial\rho^{1+\delta}}{\partial t}+\frac{1}{1+\delta}\frac{\partial}{\partial x}(U\rho^{1+\delta})+\frac{\delta}{1+\delta}\rho^\delta\frac{\partial U}{\partial x}+$$

$$+\varepsilon\rho\delta A^2-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}(\rho^\delta\rho_x)++\varepsilon\delta(\frac{\partial\rho}{\partial x})^2\rho^{\delta-1}=F\rho^\delta,$$

где δ – положительный параметр.

После интегрирования по $x\in[0,1]$ для третьего слагаемого левой части имеем

$$\frac{\delta}{1+\delta}\int_0^1\rho^{1+\delta}|\frac{\partial U}{\partial x}|dx\le\delta(\max_x(|a'\frac{\partial u}{\partial x}|)+$$

$$+\frac{1}{\mu}\max_x|a''abu^2|)\int_0^1\rho^{1+\delta}dx+$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\int_o^1\frac{|a''|}{\mu}\rho^2dx+2\frac{\delta^2}{\varepsilon\mu}\max_{0\le x\le 1}(|a''|au^2)\int_0^1\rho^{1+\delta}dx.$$

Выбирая $\delta^2=\varepsilon$ и учитывая оценки правой части (13), приходим к неравенству Гронуолла для функции $\int_0^1\rho^{1+\delta}dx$ и тем самым к утверждению леммы.

Полученные в лемме 1 равномерные оценки позволяют выделить подпоследовательности $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, $\{s^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, $\{\theta^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, $\{p_1^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, $\{v_i^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, i = 1, 2 такие, что

$$u^\varepsilon\to u,\quad s^\varepsilon\to s,\quad \theta^\varepsilon\to\theta,\quad v_i^\varepsilon\to v_i$$

в норме $L_2(0,T;L_2(\Omega))$;

$$p_1^\varepsilon\to p_1,\ \frac{\partial s^\varepsilon}{\partial x}\to\frac{\partial s}{\partial x},\ \frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial x}\to\frac{\partial\theta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}\to\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial v_i^\varepsilon}{\partial x}\to\frac{\partial v_i}{\partial x}$$

слабо в $C(0,T;L_2(\Omega))$;

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\to\frac{\partial u}{\partial t},\ \frac{\partial v_i^\varepsilon}{\partial t}\to\frac{\partial v_i}{\partial t},\ \frac{\partial s^\varepsilon}{\partial t}\to\frac{\partial s}{\partial t},$$

$$\frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial t}\to\frac{\partial\theta}{\partial t},\ \frac{\partial^2\theta^\varepsilon}{\partial x^2}\to\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$$

слабо в $L_2(0,T;L_2(\Omega))$.

Предельные функции u, s, p_1 принадлежат пространствам, указанным в определении 1. Используя уравнения (7) и (9), дополнительно получаем [3]:

$$s^\varepsilon\to s,\quad u^\varepsilon\to u,\quad \theta^\varepsilon\to\theta$$

в норме $C(0,T;C(\Omega))$,

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}\to\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial x}\to\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

в норме $L_2(0,T;L_2(\Omega))$.

Полученные оценки на данном этапе позволяют перейти обычным образом (после умножения на пробную функцию и интегрирования по Q_T) к пределу в уравнениях (6), (8), (9) (соответственно для s^ε, p_1^ε и θ^ε). В уравнении (7) (для u^ε) предельный переход во всех слагаемых, кроме $c(s^\varepsilon)(u^\varepsilon\frac{\partial s^\varepsilon}{\partial x})^2$, $c(s^\varepsilon)=\frac{b_0(s^\varepsilon)}{a_\mu^3(s^\varepsilon)a(s^\varepsilon)}$, проводится стандартно ввиду сильной сходимости s^ε, u^ε, θ^ε, и $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}$, $\frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial x}$ соответственно в $C(0,T;C(\Omega))$, $L_2(0,T;L_2(\Omega))$ и непрерывности $\frac{\partial p_c^\varepsilon}{\partial s}(s^\varepsilon,\theta^\varepsilon)$, $\frac{\partial p_c^\varepsilon}{\partial\theta}(s^\varepsilon,\theta^\varepsilon)$. Для указанного слагаемого в силу свойств слабых пределов имеем, что при $\varepsilon\to+0$

$$\int_{Q_T}c(s^\varepsilon)(u^\varepsilon\frac{\partial s^\varepsilon}{\partial x})^2\psi dxdt\ge\int_{Q_T}c(s)(u\frac{\partial s}{\partial x})^2\psi dxdt.$$

Тем самым для предельных функций можно получить неравенство [3]

$$\int_{Q_T}(u\frac{\partial u}{\partial t}\psi+\nu b_0(s)(\frac{\partial u}{\partial x})^2\psi+\nu b_0(s)u\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+$$

$$+\psi(\nu_1\frac{b_0(s)}{a^3_\mu(s)a(s)}(u\frac{\partial s}{\partial x})^2+$$

$$+\frac{a_0(s)}{a^{1+\beta}(s)}u^2+ua_2(s)u\frac{\partial u}{\partial x}-\nu(b_0(s)\frac{a'(s)}{a(s)}+$$

$$+b_0'(s))\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial x}+a_3(s)u^2\frac{\partial s}{\partial x}-b_0(s)g_0-$$

$$-\frac{b_0(s)}{\rho^0}\frac{\partial p_c(s,\theta)}{\partial x})dxdt\le 0,$$

справедливое для любой неотрицательной функции $\psi\in C(0,T;W^1_2(\Omega))$.

Уравнение для R^ε представим в дивергентном виде

$$(R^\varepsilon)_t+(U^\varepsilon R^\varepsilon)_x=\frac{1}{2\mu}a''(s^\varepsilon)u^\varepsilon\rho^\varepsilon-$$

$$-\frac{1}{2\mu}a''(s^\varepsilon)a(s^\varepsilon)b(s^\varepsilon)(u^\varepsilon)^2R^\varepsilon+$$

$$+a'(s^\varepsilon)u^\varepsilon_xR^\varepsilon+\varepsilon B^\varepsilon_x+g^\varepsilon_1.$$

Это уравнение умножим на функцию ψ, удовлетворяющую условиям: $\psi|_{S_T}=0$, $\psi|_{t=T}=0$, $\psi_x,\psi_t\in L_2(Q_T)$. После интегрирования по $x\in[0,1]$ и $t\in[0,T]$ приходим к равенству

$$\int\limits_\Omega R^\varepsilon\psi|_0^Tdx-\int\limits_{Q_T}(R^\varepsilon\psi_t+U^\varepsilon R^\varepsilon\psi_x+ +\tfrac{1}{2\mu}a''(s^\varepsilon)u^\varepsilon\rho^\varepsilon\psi- -\tfrac{1}{2\mu}a''(s^\varepsilon)a(s^\varepsilon)b(s^\varepsilon)(u^\varepsilon)^2R^\varepsilon\psi+ +a'(s^\varepsilon)u^\varepsilon_xR^\varepsilon\psi+g^\varepsilon_1\psi-\varepsilon B^\varepsilon\psi_x)dxdt. \tag{14}$$

Пусть s_x, $R=\frac{\mu}{a(s)}s_x+b(s)u$ – слабые пределы s^ε_x и R^ε в $L_2(Q_T)$. После предельного перехода при $\varepsilon\to+0$ из (14) получим

$$\int\limits_\Omega R\psi|_0^Tdx-\int\limits_{Q_T}(R\psi_t+UR\psi_x+ +\tfrac{1}{2\mu}a''(s)u\overline{\rho}\psi-\tfrac{1}{2\mu}a''(s)a(s)b(s)u^2R\psi+ +a'(s)u_xR\psi+g_1\psi)dxdt, \tag{15}$$

где $\overline{\rho}$ означает слабый предел ρ^ε в $[C(\overline{Q_T})]^*$ – пространство мер Бореля на Q_T [4, с. 52, 373] (если Q – ограниченное множество из R^M, то пространство мер Бореля $M(\overline{Q})$ отождествляется с двойственным к банахову пространству непрерывных функций $C(\overline{Q})$; пространство $M(\overline{Q})$ компактно вкладывается в негативное пространство $W^{-k,p'}(Q)$, $kp>M$, $1/p+1/p'=1$).

Пусть $w_\alpha(x)=\alpha^{-N}w(\frac{|x|}{\alpha})$ – ядро усреднений по пространственным переменным $x\in\Omega\subset R^N$, $w(r)\in D(\Omega)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций, $w(r)\ge 0$, $supp w\subset(-1,1)$, $\int\limits_R w(r)dr=1$, $w(-r)=w(r)$ для всех $r\in R$. Пусть $w_h(t)=h^{-1}w(\frac{|t|}{h})$ – ядро усреднений по времени. Тогда усреднения функции $u(x,t)$, продолженной нулем вне цилиндра $Q_T=\Omega\times(0,T)$, по времени и пространственным переменным имеют вид

$$u_h(x,t)=\int\limits_0^T u(x,\tau)w_h(\tau-t)d\tau,$$

$$u_\alpha(x,t)=\int\limits_\Omega u(y,t)w_\alpha(y-x)dy,$$

Положим $\psi=a(s)R_{h\alpha}\psi_1(x,t)$, $\psi_1|_{S_T}=0$, $\psi_1(x,T)=0$, $\psi_1\ge 0$. После стандартных преобразований и предельных переходов при $h\to+0$ и $\alpha\to+0$ из (15) выводим

$$\int\limits_\Omega R^2a(s)\psi_1|_0^Tdx-\int\limits_{Q_T}(\rho\psi_{1t}+U\rho\psi_{1x}+ +\tfrac{1}{1\mu}a''(s)aRu(\overline{\rho}-\rho)\psi_1+ +2g_1a(s)R\psi_1)dxdt, \tag{16}$$

где

$$2g_1a(s)R\psi_1=(A_1+A_2\rho)\psi_1,$$

$$A_1=2a(s)(\beta_2\rho^0_1-\beta_1\rho^0_2)u\frac{a}{\mu}(u_x+\frac{a}{\mu}bu^2)+$$

$$+2a(s)\rho^0g_0-\frac{2Ku}{a^2_\mu}+2a(s)p_{c\theta}\theta_x,$$

$$A_2=2a(s)\frac{a}{\mu}(p'_{cs}-(\beta_2\rho^0_1-\beta_1\rho^0_2)u^2\frac{a}{\mu}\frac{\beta_1(1-s)-\beta_2s}{a^2_\mu}).$$

Обратимся к уравнению (12) для ρ^ε. Используя равномерную по ε ограниченность $u^\varepsilon(x,t)$ и $s^\varepsilon(x,t)$, для правой части (12) выводим

$$|F^\varepsilon_0|\le C(|R^\varepsilon u^\varepsilon_t|+|R^\varepsilon R^\varepsilon_x|+|R^\varepsilon|^3+$$

$$+(R^\varepsilon)^2|u^\varepsilon_x|+(R^\varepsilon)^2+|R^\varepsilon u^\varepsilon_x|),$$

где постоянная C не зависит от ε и, следовательно, $F^\varepsilon\in L_1(Q_T)$.

Уравнение (12) умножим на ψ_1 и проинтегрируем по Q_T. После предельного перехода при $\varepsilon\to+0$ получим

$$\int\limits_\Omega R^2a(s)\psi_1|_0^Tdx+\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{Q_T}A^2_\varepsilon\psi_1dxdt= =\int\limits_{Q_T}(\overline{\rho}\psi_{1t}+U\overline{\rho}\psi_{1x}+ +(A_1+A_2\overline{\rho})\psi_1)dxdt. \tag{17}$$

Сравнивая (16) и (18), имеем

$$0 \leq \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{Q_T} A_\varepsilon^2 dxdt =$$

$$= \int_{Q_T} (\overline{\rho} - \rho)(\psi_{1t} + U\psi_{1x} +$$

$$+(A_2 - \frac{1}{2}a''aRu)\psi_1)dxdt.$$

В силу произвольности ψ_1 и свойства $\overline{\rho} \geq \rho$ слабых пределов выпуклых функций из последнего равенства следует, что $\overline{\rho} = \rho$ п.в. в Q_T. Следовательно, $R^\varepsilon \to R$ сильно в $L_2(Q_T)$ [4–5], т.е. уравнение (7) выполняется в слабом смысле.

Библиографический список

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. – М., 1987.
2. Rajagopal K.L., Tao L. Mechanics of mixtures. – London, 1995.
3. Papin A.A. Global solvabilility of the equations of one-dimensional nonisothermic motion of a two-phase mixture.2. Results on solvability // Journal of Applied and Industrial Mathematics.– 2008. – Vol. 2, №3.
4. Novotny A., Straskraba I. Introduction to the mathematical theory of compressible flow. – Oxford, 2004.
5. Lions P.L. Mathematical Topics in Fluid Mechanics. Compressible Models. – Oxford, 1998. – Vol. 2.