УДК 519.6

Л.В. Львова

Псевдосферическая конгруэнция эллиптических прямых квазиэллиптического пространства

L.V. Lvova

Pseudo-spherical Congruence of Elliptical Lines in Quasi-elliptic Space

Рассматривается псевдосферическая конгруэнция квазиэллиптического пространства и устанавливается ее связь с отображением двух евклидовых плоскостей.

Ключевые слова: квазиэллиптическое пространство, конгруэнция.

The article deals with pseudo-spherical congruence of elliptical lines in quasi-elliptic space and shows its connection with reflection of two Eucledean planes.

Key words: quasi-elliptic space, congruence.

Квазиэллиптическое пространство S_3^1 впервые рассматривал В. Бляшке. Он показал, что метрикой этого пространства обладает группа движений евклидовой плоскости R_2 и выдвинул идею изображения эллиптических прямых этого пространства парами точек двух евклидовых плоскостей R_2 [1, 2]. В работе [3] квазиэллиптическое пространство определяется как метризованное проективное пространство, абсолют которого состоит из пары мнимо-сопряженных плоскостей (абсолютных плоскостей) и пары мнимо-сопряженных точек (абсолютных точек) на линии пересечения абсолютных плоскостей (абсолютной прямой). Там же построена интерпретация квазиэллиптического пространства на паре евклидовых плоскостей. Всякой эллиптической прямой пространства S_3^1 ставится в соответствие пара точек на двух вполне ортогональных плоскостях R_2^+ и R_2^- евклидова пространства R_4 и находятся соотношения, связывающие метрические инварианты двух эллиптических прямых с расстояниями между точками, изображающими эти прямые на плоскостях R_2^+ и R_2^-.

В пространстве S_3^1 рассмотрим подвижный репер $R = \{A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3\}$ некоторого геометрического образа, при этом точки A_0 и A_1 полярно сопряжены относительно пары абсолютных плоскостей и их координаты нормированы, точки A_2 и A_3 лежат на абсолютной прямой, они полярно сопряжены относительно пары абсолютных точек и их координаты также нормированы. Уравнения инфинитезимальных перемещений репера R имеют вид

$$\begin{aligned} dA_0 &= \ \ \omega_0^1 A_1 + \omega_0^2 A_2 + \omega_0^3 A_3,\\ dA_1 &= -\omega_0^1 A_0 + \omega_1^2 A_2 + \omega_1^3 A_3,\\ dA_2 &= \ \ \omega_2^3 A_3,\\ dA_3 &= -\omega_2^3 A_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Дифференцируя (1) внешним образом, получим уравнения структуры

$$D\omega_0^1 = 0, \quad D\omega_3^2 = 0,$$
$$D\omega_i^j = [\omega_i^k\,\omega_k^j] \text{ (во всех оставшихся случаях)}$$

квазиэллиптического пространства.

В соответствии с построенной интерпретацией квазиэллиптического пространства на паре евклидовых плоскостей реперу R пространства S_3^1 отвечают в пространстве R_4 на плоскостях R_2^+ и R_2^- два репера $\{X^+, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ и $\{X^-, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$, в которых базисы $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ и $\{\vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ ортонормированные.

Уравнения инфинитезимальных перемещений реперов $\{X^+, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ и $\{X^-, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ в плоскостях R_2^+ и R_2^- имеют, как известно, вид:

$$\begin{aligned} dX^+ &= \tilde\omega^1 \vec{e}_1 + \tilde\omega^2 \vec{e}_2, & dX^- &= \tilde\omega^3 \vec{e}_3 + \tilde\omega^4 \vec{e}_4,\\ d\vec{e}_1 &= \ \ \tilde\omega_1^2 \vec{e}_2, & d\vec{e}_3 &= \ \ \tilde\omega_3^4 \vec{e}_4,\\ d\vec{e}_2 &= -\tilde\omega_1^2 \vec{e}_1 & d\vec{e}_4 &= -\tilde\omega_3^4 \vec{e}_3 \end{aligned} \tag{2}$$

с уравнениями структуры:

$$\begin{aligned} D\tilde\omega^1 &= -[\tilde\omega^2\,\tilde\omega_1^2], & D\tilde\omega^2 &= [\tilde\omega^1\,\tilde\omega_1^2], & D\tilde\omega_1^2 &= 0\\ D\tilde\omega^3 &= -[\tilde\omega^4\,\tilde\omega_3^4], & D\tilde\omega^4 &= [\tilde\omega^3\,\tilde\omega_3^4], & D\tilde\omega_3^4 &= 0. \end{aligned}$$

Дифференциальные формы инфинитезимальных перемещений подвижного репера про-

странства S_3^1 и подвижных реперов плоскостей R_2^+ и R_2^- связаны соотношениями:

$$\begin{array}{ll} \tilde\omega^1 = -\omega_1^2 + \omega_0^3, & \tilde\omega^2 = \omega_0^2 + \omega_1^3 \\ \tilde\omega^3 = -\omega_1^2 - \omega_0^3, & \tilde\omega^4 = \omega_0^2 - \omega_1^3; \\ \tilde\omega_1^2 = \omega_0^1 - \omega_2^3, & \tilde\omega_3^4 = \omega_0^1 + \omega_2^3. \end{array} \qquad (3)$$

Будем называть двупараметрическое семейство $L = L(u^1, u^2)$ эллиптических прямых L *конгруэнцией эллиптических прямых*, прямые $L(u^1, u^2)$ – *лучами* конгруэнции.

Присоединим к каждому лучу конгруэнции репер $R = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ так, что точки A_0 и A_1 принадлежат лучу, а точки A_2 и A_3 – абсолютной прямой. Выбирая формы ω_0^2 и ω_0^3 за базисные, запишем:

$$\omega_1^2 = a\omega_0^2 + b\omega_0^3, \quad \omega_1^3 = b'\omega_0^2 + c\omega_0^3. \qquad (4)$$

Внешнее дифференцирование их дает

$$\begin{array}{l} \delta a = -(a^2 + bb' + 1)\pi_0^1 + (b + b')\pi_2^3, \\ \delta b = -b(a + c)\pi_0^1 - (a - c)\pi_2^3, \\ \delta b' = -b'(a + c)\pi_0^1 - (a - c)\pi_2^3, \\ \delta c = -(1 + bb' + c^2)\pi_0^1 - (b + b')\pi_2^3. \end{array}$$

Полученные дифференциальные уравнения допускают следующую фиксацию R_0 репера:

$$a = 0, \quad \pi_2^3 = 0, \quad b + b' \neq 0. \qquad (5)$$

Тогда имеем

$$\omega_1^2 = b\omega_0^3, \quad \omega_1^3 = b'\omega_0^2. \qquad (6)$$

Дифференциальные формы ω_0^1 и ω_2^3, зависящие в этом случае только от первичных параметров, представим в виде

$$\omega_0^1 = p\omega_0^2 + q\omega_0^3, \quad \omega_2^3 = h\omega_0^2 + k\omega_0^3 \qquad (7)$$

и тогда найдем основную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{array}{l} db = (q(1 + bb') - k(b + b'))\,\omega_0^2, \\ db' = (p(1 + bb') + h(b + b'))\,\omega_0^3. \end{array} \qquad (8)$$

Функции p, q, h, k и b, b' составляют полную систему инвариантов конгруэнции, т.е. определяют конгруэнцию эллиптических прямых $L = L(t)$ с точностью до положения в пространстве.

Подвижному реперу R конгруэнции эллиптических прямых $L = L(t)$ отвечают на плоскостях R_2^+, R_2^- два репера $\{L^+, \vec e_1, \vec e_2\}$ и $\{L^-, \vec e_3, \vec e_4\}$, деривационные уравнения которых имеют вид (2). Так как дифференциальные формы $\tilde\omega^1$, $\tilde\omega^2$, $\tilde\omega^3$, $\tilde\omega^4$ — главные, то, приняв первые две из них за базисные, положим

$$\begin{array}{l} \tilde\omega^3 = \alpha\tilde\omega^1 + \beta\tilde\omega^2, \\ \tilde\omega^4 = \beta'\tilde\omega^1 + \gamma\tilde\omega^2. \end{array} \qquad (9)$$

Воспользовавшись равенствами (3), связывающими дифференциальные формы ω_i^j $(i, j = 0, 1, 2, 3)$ репера R с дифференциальными формами $\tilde\omega^k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$, $\tilde\omega_1^2$, $\tilde\omega_3^4$ соответствующих реперов на плоскостях R_2^+, R_2^-, а также разложениями (4), (9), получим

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta' & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -1-b \\ 1-b' & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & 1-b \\ 1+b' & c \end{pmatrix}^{-1}$$

и

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b' & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \beta \\ -\beta' & 1+\gamma \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\beta & -1-\alpha \\ 1-\gamma & -\beta' \end{pmatrix}.$$

Эти формулы (выражают связь между операторами $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta' & \gamma \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a & b \\ b' & c \end{pmatrix}$ соответственно Якоби и Куммера.

Для канонического репера R_0 выполняются соотношения (5) и поэтому

$$\alpha = \frac{b+1}{b-1}, \; \gamma = \frac{1-b'}{1+b'}, \; \beta = \beta' = 0. \qquad (10)$$

Разложим дифференциальные формы $\tilde\omega_1^2$ и $\tilde\omega_3^4$ по базисным формам $\tilde\omega^1$ и $\tilde\omega^2$

$$\begin{array}{l} \tilde\omega_1^2 = \lambda\,\tilde\omega^1 + \mu\,\tilde\omega^2 \\ \tilde\omega_3^4 = \nu\,\tilde\omega^1 + \rho\,\tilde\omega^2. \end{array} \qquad (11)$$

Тогда имеют место соотношения

$$\begin{array}{ll} \lambda = \dfrac{q-k}{1-b}, & \mu = \dfrac{p-h}{1+b'}, \\ \nu = \dfrac{q+k}{1-b}, & \rho = \dfrac{p+h}{1+b'}. \end{array} \qquad (12)$$

В работе [4] найдены основные формулы конгруэнции эллиптических прямых. Отнесем конгруэнцию эллиптических прямых к каноническому реперу R_0 (a=c=0). Тогда выведенные формулы и уравнения примут следующий вид.

Параметр распределения p:

$$\frac{2p}{1+p^2} = \frac{2(b'(\omega_0^2)^2 - b(\omega_0^3)^2)}{(1+b'^2)(\omega_0^2)^2 + (1+b^2)(\omega_0^3)^2},$$

Главные параметры $\lambda_{1,2} = \mathrm{th}2\theta_{1,2}$:

$$\lambda_1 = \frac{2b}{1+b^2}, \quad \lambda_2 = -\frac{2b'}{1+b'^2}.$$

Абсцисса v центра (горловой точки)

$$\mathrm{tg}2v = \frac{2(b+b')\omega_0^2\,\omega_0^3}{(1-b'^2)(\omega_0^2)^2 + (1-b^2)(\omega_0^3)^2}.$$

Если $\omega_0^2 = 0$ или $\omega_0^3 = 0$, то $\mathrm{tg}2v = 0$. Значит, вершина A_0 канонического репера находится в горловой точке луча конгруэнции.

Абсциссы v_1 и v_2 граничных точек:

$$\mathrm{tg}2v_{1,2} = \pm\frac{b+b'}{\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-b'^2}}.$$

Абсциссы f_1 и f_2 фокусов:

$$\mathrm{tg}f_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{bb'}}.$$

Расстояние между δ фокусами:

$$\cos\delta = \frac{bb'-1}{bb'+1}.$$

Угол φ между фокальными плоскостями:

$$\cos\varphi = \frac{-b+b'}{b+b'}.$$

Уравнения главных линейчатых поверхностей:

$$(1-b'^2)(\omega_0^2)^2 - (1-b^2)(\omega_0^3)^2 = 0.$$

Уравнения распределительных линейчатых поверхностей:

$$\omega_0^2\omega_0^3 = 0$$

Уравнения торсов:

$$b'(\omega_0^2)^2 - b(\omega_0^3)^2 = 0.$$

В соответствии с установленной интерпретацией *конгруэнция эллиптических прямых пространства S_3^1 изображается в евклидовом пространстве R_4 двумерной поверхностью $L^* = L^*(u^1,u^2)$ и определяет отображение некоторой области плоскости R_2^+ на некоторую область плоскости R_2^-.*

В работах [4, 5] рассмотрены конгруэнции эллиптических прямых, выделены такие специальные классы конгруэнций, как нормальная, псевдонормальная, изотропная по параметру распределения и изотропная по центру конгруэнции, и установлена их связь с отображениями двух евклидовых плоскостей. В работе [6] наряду с указанными выше классами конгруэнций определены псевдосферические конгруэнции.

Псевдосферической конгруэнцией эллиптических прямых называется конгруэнция, у которой фокальное расстояние и угол между фокальными плоскостями постоянны.

Отнесем конгруэнцию к каноническому реперу R_0 $(a = c = 0)$. Тогда из формул для нахождения расстояния δ между фокусами и угла φ между фокальными плоскостями, дифференцируя их, получим, что для псевдосферической конгруэнции

$$b = \mathrm{const}, \quad b' = \mathrm{const}. \tag{13}$$

Выясним, каким свойством обладает отображение плоскости R_2^+ на плоскость R_2^-, соответствующее псевдосферической конгруэнции. Так как оператор Якоби $I = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta' & \gamma\end{pmatrix}$ удовлетворяет соотношениям (5) и при этом $b = \mathrm{const}$, $b' = \mathrm{const}$, то приходим к выводу: *отображение плоскости R_2^+ на плоскость R_2^-, соответствующее псевдосферической конгруэнции, изменяет площади областей в постоянном отношении.*

Отметим еще одно свойство псевдосферической конгруэнции: *отношения кривизн k^+ и k^- линий плоскостей R_2^+ и R_2^-, соответствующих распределительным линейчатым поверхностям псевдосферической конгруэнции, постоянны.* Докажем это.

Распределительные линейчатые поверхности псевдосферической конгруэнции определяются дифференциальными уравнениями $\omega_0^2 = 0$, $\omega_0^3 = 0$. Из формул (6) и (9), а также (3) найдем дифференциальные уравнения линий на плоскостях R_2^+ и R_2^-, соответствующих распределительным линейчатым поверхностям

$$\tilde\omega^1 = 0, \quad \tilde\omega^2 = 0. \tag{14}$$

Кривизны k^+ и k^- этих линий, определяемые в общем случае формулами

$$k^+ = \frac{\tilde\omega_1^2}{\sqrt{(\tilde\omega^1)^2+(\tilde\omega^2)^2}}, \quad k^- = \frac{\tilde\omega_3^4}{\sqrt{(\tilde\omega^3)^2+(\tilde\omega^4)^2}},$$

будут равны

$$\text{при } \tilde\omega^1 = 0: \quad k^+ = \frac{\tilde\omega_1^2}{\tilde\omega^2} = \mu, \quad k^- = \frac{\tilde\omega_3^4}{\tilde\omega^4} = \frac{\rho}{\gamma};$$

$$\text{при } \tilde\omega^2 = 0: \quad k^+ = \frac{\tilde\omega_1^2}{\tilde\omega^2} = \lambda, \quad k^- = \frac{\tilde\omega_3^4}{\tilde\omega^3} = \frac{\nu}{\alpha}.$$

Воспользовавшись (14), найдем, что

$$\text{при} \quad \tilde\omega^1 = 0: \quad k^+ = \frac{p-h}{1+b'}, \quad k^- = \frac{p+h}{1-b'};$$

$$\text{при} \quad \tilde\omega^2 = 0: \quad k^+ = \frac{q-k}{1-b}, \quad k^- = \frac{q+k}{1+b}.$$

Так как $db = 0$, $db' = 0$, то из уравнений (8) имеем

$$иq(1+bb') - k(b+b') = 0$$
$$p(1+bb') + h(b+b') = 0$$

и поэтому

$$q = Mk, \quad p = Mh,$$

где $M = \dfrac{b+b'}{1+bb'}$.

Далее найдем

$$\left(\frac{k^+}{k^-}\right)_{\tilde{\omega}^1=0} = \frac{M-1}{M+1} \cdot \frac{1-b'}{1+b'};$$

$$\left(\frac{k^+}{k^-}\right)_{\tilde{\omega}^2=0} = \frac{M-1}{M+1} \cdot \frac{1+b}{1-b}.$$

и тогда получим

$$\left(\frac{k^+}{k^-}\right)_{\tilde{\omega}^1=0} = \frac{b+1}{b-1}, \quad \left(\frac{k^+}{k^-}\right)_{\tilde{\omega}^2=0} = \frac{b'-1}{b'+1}.$$

Утверждение доказано.

Библиографический список

1. Бляшке В. (Blaschke W.) Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometry, Zeitschrift, Math. Phys. – 1911. – Т. 60.

2. Бляшке В., Мюллер Г.Р. (Blaschke W., Muller H.R.) Ebene Kinematik. – Munchen, 1956.

3. Львова Л.В. Линейчатая геометрия трехмерного квазиэллиптического пространства. Проективные метрики // Уч. зап. Коломенского пед. ин-та. – 1964. – Т. 8.

4. Львова Л.В. Связь конгруэнций эллиптических прямых пространства S_3^1 с отображениями евклидовых плоскостей // Геометрия многомерных пространств. – Барнаул, 1991.

5. Розенфельд Б.А., Львова Л.В., Семенова Т.А. Конгруэнции плоскостей эллиптического и квазиэллиптического пространств // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1967. – №8(63).

6. Цыренова В.Б. К теории конгруэнций в S_3^1. – Томск, 1977.