УДК 517.765

*С.В. Дронов*

# О лемме Гейне-Бореля на гипердействительных структурах

*S.V. Dronov*

# The Heine-Borel Lemma on Hyper-real Structures

Работа выполнена в рамках в альтернативной теории множеств. Каждая гипердействительная структура в нашей аксиоматике основана на некотором сегменте класса N натуральных чисел. В работе доказано, что необходимым и достаточным условием для справедливости классической леммы Гейне-Бореля на структуре является мультипликативность ее основного сегмента.

*Ключевые слова*: лемма Гейне-Бореля, мультипликативный сегмент, гипердействительная структура.

The work is carried out in alternative set theory. Every hyper-real structure in the axiomatics is based on some cut of the class N natural numbers. The author proves that necessary and sufficient condition for the classical Heine-Borel lemma's validity on a structure is the multiplicativity of its main cut.

*Key words*: Heine-Borel lemma, multiplicative cut, hyper-real structure.

**1. Общие положения**. Работа выполнена в аксиоматике альтернативной теории множеств [1] и продолжает цикл статей автора по обоснованию основ математического анализа в рамках этой теории.

Базой, на которой строятся все гипердействительные структуры, служит класс рациональных чисел $\mathbf{Q}$. Пусть $\mathbf{N} \subset \mathbf{Q}$ – класс натуральных чисел. Непустой подкласс $A \subset \mathbf{N}$ мы называем сегментом, если $(\forall a \in A)\ a \subset A$, что означает, что он является начальным отрезком класса $\mathbf{N}$.

Сегмент $A$ назовем замкнутым относительно операции $\circ$, заданной на $\mathbf{N}$, если для произвольных $a, b \in A$ справедливо $a \circ b \in A$. В частности, если эта операция – сложение, то сегмент называется аддитивным, если умножение – мультипликативным. По введенному сегменту определим класс

$$\mathbf{BQ}(A) \ = \ \{x \in \mathbf{Q} |\ (\exists a \in A)\ |x| < a\}$$

и построим на нем отношение, которое мы называем $A$-отождествлением:

$$(x \sim_A y) \iff ((\forall a \in A)\ |x - y| < \frac{1}{a}).$$

Если сегмент $A$ аддитивен, то построенное отношение является отношением эквивалентности. Фактор-класс

$$^*_A\mathbf{R} \ = \ \mathbf{BQ}(A) \,/ \sim_A$$

назовем гипердействительной структурой, порожденной сегментом $A$. Основным предметом нашего исследования является изучение вопроса о том, какие требования нужно наложить на сегмент, чтобы порожденная им гипердействительная структура была максимально похожа на класс действительных чисел. В настоящей работе будет продемонстрировано, что если сегмент мультипликативен, то на $^*_A\mathbf{R}$ можно считать справедливой лемму Гейне-Бореля, т.е. из любого открытого покрытия ограниченного ее отрезка можно выбрать конечное (в определенном смысле) подпокрытие.

Зафиксируем сегмент $A$ и всюду ниже будем считать его аддитивным, если не оговорено противное. Условимся набор объектов $B$ называть $A$-конечным, если $(\exists a \in A)\ B = \{x_1, ..., x_a\}$. Если для любого $a \in A$ могут быть указаны различные элементы $x_1, ..., x_a \in B$, то $B$ назовем $A$-бесконечным.

**2. Частично упорядоченные семейства индексов**. Далее нам потребуется работать с наборами объектов, заиндексированными некоторыми частично упорядоченными семействами. Введем необходимые определения.

Частично упорядоченное семейство классов $Q$ назовем направленным, если для любых $C, D \in Q$ найдется класс $E \in Q$ такой, что $C \leq E,\ D \leq E$. Если рассматриваемое семейство $Q$ состоит из подклассов $^*_A\mathbf{R}$, то договоримся частичный порядок на $Q$ определять по включению:

$$E \le D \iff D \subset E.$$

Направленные семейства непустых классов с таким порядком иногда (например, в [2]) называют центрированными.

В [3, с. 15] указано, что в любом направленном семействе $Q$, не имеющем максимального элемента, можно выбрать линейно упорядоченное подсемейство $F$ такое, что

$$(\forall C \in Q)\,(\exists D \in F)\ C \le D. \tag{1}$$

Замечая, что если в $Q$ есть максимальный элемент, то можно выбрать $F$, состоящим из одного этого элемента, приходим к выводу, что линейно упорядоченное семейство с условием (1) существует всегда. Будем, как и в [2, 3], называть $F$ конфинальной цепочкой $Q$.

Рассмотрим класс

$$X_Q \ = \ \{x_C,\ C \in Q\}.$$

Если семейство $Q$ состояло из подклассов ${}^*_A\mathbf{R}$, то будем предполагать, что для произвольного $C \in Q$ справедливо $x_C \in C$.

**Лемма 1**. *Пусть $F$ – линейно упорядоченное по включению $A$-бесконечное семейство подклассов ${}^*_A\mathbf{R}$, в котором нет максимального элемента. Тогда в семействе $F$ может быть выбрано $A$-бесконечное подсемейство $G$ так, чтобы класс $X_G$ был бы монотонным по $C \in G$. При этом или дополнительно можно утверждать, что класс $X_G$ $A$-бесконечен, или в $F$ найдется элемент $U$ такой, что $x_U$ встречается в классе $X_F$ неограниченно далеко, т.е. для каждого $E \in F$*

$$(\exists S(E) \in F)\ (S(E) > E\ \&\ x_{S(E)} = x_U). \tag{2}$$

Эта лемма по существу является обобщением леммы 3 в [4] и доказывается тем же методом.

**Доказательство**. Пусть сначала в $F$ найдется такое $D$, что для любого $E \ge D$

$$(\exists K(E) \in F)(K(E) > E\,\&\,x_{K(E)} > x_E). \tag{3}$$

Построим $G = \{D_a\} \subset F$ по индукции.

Пусть $D_0 = D$, а если $D_a$ уже построен, то $D_{a+1} = K(D_a)$. Тогда $X_G$ по построению монотонно возрастает.

Если же (3) нарушено, то рассмотрим ситуацию, когда для произвольного $D \in F$ найдется такой элемент $E(D) \in F$, $E(D) \ge D$, что

$$(\forall K > E(D))\ (K \in F \Rightarrow\ x_K < x_{E(D)}). \tag{4}$$

Здесь $D_0$ возьмем произвольно и вновь по индукции выберем произвольно $D_{a+1} > E(D_a)$. Тогда при $G = \{D_a\}$ класс $X_G$ убывает.

Понятно, что и в случае (3), и в случае (4) все элементы класса $X_G$ различны и процесс его построения на может оборваться на $A$-конечном шаге в силу условий, наложенных на $F$. Пусть ни тот, ни другой случай не имеют места. Это означает, что элементы $X_F$ с некоторого момента стабилизируются, в частности, справедливо свойство (2). Лемма доказана.

Заметим, что если (2) нарушается, то процесс построения подсемейства $G$ может быть продолжен внутри любого класса из $F$. Тем самым подсемейство с монотонным классом $X_G$ является в этой ситуации конфинальной цепочкой $F$.

**3. Предельные точки**. Для $x \in {}^*_A\mathbf{R}$, $\gamma \in A$ введем обозначение

$$U_\gamma(x) \ = \ (x - \frac{1}{\gamma}\ ,\ x + \frac{1}{\gamma}\ ) \subset\ {}^*_A\mathbf{R}$$

и назовем этот интервал $\gamma$-окрестностью точки $x$. Рассмотрим направленное семейство $Q$ подклассов ${}^*_A\mathbf{R}$. Точку $z$ назовем предельной для $X_Q$, если найдется такая конфинальная цепочка $F$ семейства $Q$, что для произвольного $\gamma \in A$ справедливо

$$(\exists C_\gamma \in F)\,(\forall C \in F)\ (C \ge C_\gamma \Rightarrow x_C \in U_\gamma(z)).$$

Это определение является более ограничительным, чем общепринятое определение предельной точки по Муру-Смиту [2], но мы собираемся использовать его только в рамках настоящей работы.

**Лемма 2**. *Пусть некоторое направленное семейство $Q$ подклассов ${}^*_A\mathbf{R}$ $A$-бесконечно. Тогда, если $X_Q$ не имеет предельных точек, то для произвольной конфинальной его цепочки $F$ можно выбрать $\delta \in A$ так, что для любого $C \in F$ в $F$ найдутся $E(C) > D(C) \ge C$ с условием*

$$|x_{D(C)} - x_{E(C)}|\ >\ \frac{1}{\delta}\,.$$

**Доказательство**. Пусть не так. Тогда для некоторой $F$ и любого $\delta \in A$ найдется такое $C(\delta) \in F$, что

$$(\forall D, E \in F)\ (D, E \ge C(\delta) \Rightarrow |x_D - x_E| \le \frac{1}{\delta}). \tag{5}$$

Положим $y_\delta = x_{C(\delta)}$, $\delta \in A$. Ясно, что в силу (5) эта последовательность фундаментальна в смысле определения [4], а значит из результатов этой работы следует, что она имеет предел $z$ в ${}^*_A\mathbf{R}$.

Зафиксируем произвольное $a \in A$ и выберем $\delta \in A$ так, чтобы при $\gamma \in A$

$$\gamma \geq \delta \ \Rightarrow \ |y_\gamma - z| < \frac{1}{2a} .$$

Тогда при $C \in F$, $C \geq C(2a)$ и $\gamma \geq \max\{\delta, 2a\}$ из последнего неравенства и (5) извлекаем

$$|x_C - z| \ \leq \ |x_C - y_\gamma| + |y_\gamma - z| < \frac{1}{a} ,$$

откуда $x_C \in U_a(z)$, и $z$ – предельная точка $X_Q$. Противоречие доказывает лемму.

Из лемм 1 и 2 выводим справедливость следующего утверждения.

**Лемма 3**. *Пусть $A$-бесконечное направленное семейство $Q$ подклассов ${}^*_A\mathbf{R}$ таково, что $X_Q$ не имеет предельных точек. Тогда при некотором $\delta \in A$ в $Q$ может быть указано линейно упорядоченное $A$-бесконечное подсемейство $T$, такое, что класс $Y = \{x_C,\ C \in T\}$ строго монотонен по $C$, и*

$$(\forall C, D \in T) \ (C \neq D \Rightarrow |x_C - x_D| > \frac{1}{\delta} ).$$

**Доказательство**. Возьмем в $Q$ конфинальную цепочку $F$. Если бы она имела максимальный элемент $U$, то $x_U$, по определению, являлся бы предельной точкой $Q$, что невозможно. Если бы имело место (2), то $x_U$ снова оказался бы предельной точкой, которая отсутствует по условию. Значит, мы имеем возможность воспользоваться замечанием, сделанным после леммы 1, и выбрать в $F$ конфинальную цепочку $G$, обладающую строго монотонным классом $X_G$. В силу определения (1) $G$ само будет конфинальной цепочкой $Q$. Поэтому для $G$ может быть выбрано $\delta \in A$ из утверждения леммы 2. Построим подсемейство $T$ с помощью индукции. Для этого возьмем произвольное $C \in F$ и с помощью леммы 2 построим $B_0 = D(C)$, $B_1 = E(C)$. Если $B_a$ уже построено, то определим $B_{a+1} = E(B_a)$.

Тогда в силу монотонности $X_G$ получаем, что последовательность $x_{B_a}$ также монотонна, и

$$|x_{B_{a+1}} - x_{B_a}| > |x_{E(B_a)} - x_{D(B_a)}| > \frac{1}{\delta},$$

что позволяет, выбрав $T = \{B_a\}$, завершить доказательство.

Если $(\exists s \in A)\ b - a \leq s$, то отрезок $[a, b] \subset {}^*_A\mathbf{R}$ назовем $A$-ограниченным.

**Теорема 1**. *Пусть $A$ – мультипликативный сегмент, $[a, b]$ – $A$-ограниченный отрезок, $Q$ – $A$-бесконечное семейство непустых подклассов $[a, b]$ такое, что частичное упорядочивание по включению превращает его в направленное семейство. Предположим, что элементы класса $X_Q = \{x_C,\ C \in Q\}$ выбраны так, что $(\forall C \in Q)$ $x_C \in C$. Тогда $X_Q$ имеет в $[a, b]$ предельную точку.*

**Доказательство**. Будем действовать методом от противного, и пусть предельные точки отсутствуют. Тогда у нас есть возможность указать $\delta \in A$ и класс $Y$ согласно утверждению леммы 3. Пусть $s \in A$ подобрано так, что $b - a \leq s$. Положим $t = s\delta + 1$. Это элемент $A$ в силу мультипликативности рассматриваемого сегмента. Выберем из $A$-бесконечного класса $Y$ различные элементы $y_0 < y_1 < ... < y_t$. Тогда по причине указанной монотонности

$$|y_t - y_0| = \sum_{j=1}^{t} |y_j - y_{j-1}| \geq \frac{t}{\delta} > s,$$

что означает невозможность одновременного попадания $y_0$ и $y_t$ в интервал $[a, b]$. Теорема доказана.

**4. Покрытия**. Класс $B \subset {}^*_A\mathbf{R}$ условимся называть $A$-открытым, если каждый его элемент содержится в нем вместе с некоторой $\gamma$-окрестностью $(\gamma \in A)$. $A$-замкнутым классом, по определению, является такой, дополнение до которого $A$-открыто. Если будет ясно, о каком сегменте $A$ идет речь, то договоримся употреблять термины "открытый" и "замкнутый" без упоминания этого сегмента. Как и в классическом случае, любой отрезок вида $[a, b]$ замкнут, пересечение произвольного семейства замкнутых классов замкнуто, объединение открытых всегда открыто.

Точка $z \in {}^*_A\mathbf{R}$ называется точкой прикосновения класса $B$, если $(\forall \gamma \in A)$ $B \cap U_\gamma(z) \neq \emptyset$. Если $B$ замкнут, а $z$ – его точка прикосновения, то $z \in B$, что доказывается так же, как в стандартных курсах анализа.

Набор классов $\Sigma$ такой, что $\cup\Sigma \supset B$, называют покрытием класса $B$. Без ограничения общности можно считать, что $(\forall C \in \Sigma)$ $C \cap B \neq \emptyset$. Будем употреблять термин "открытое покрытие", если все элементы $\Sigma$ открытые классы. Пусть $\Sigma_1 \subset \Sigma$ и $\Sigma_1$ все еще покрытие $B$. Тогда $\Sigma_1$ называется подпокрытием $\Sigma$.

Сегмент $A$ назовем $HB$-сегментом (а соответствующим образом построенную гипердействительную структуру ${}^*_A\mathbf{R}$ гейне-борелевской), если любой $A$-ограниченный отрезок $[a, b] \subset {}^*_A\mathbf{R}$ допускает выбор $A$-конечного подпокрытия из произвольного своего $A$-открытого покрытия. Напомним, что основной сегмент $A$ гипердействительной структуры обязан быть аддитивным.

**Теорема 2**. ${}^{*}_{A}\mathbf{R}$ – *гейне-борелевская структура тогда и только тогда, когда аддитивный сегмент $A$ является мультипликативным.*

**Доказательство**. Пусть сначала $A$ не мультипликативен. Тогда укажем $t, s \in A$ такие, что $ts \notin A$. Без ограничения общности можно считать $t$ четным. Отметим, что в рассматриваемой ситуации $ts/2 \notin A$ в силу аддитивности основного сегмента. Рассмотрим при $x \in [-t/2, t/2]$ интервалы

$$\xi_x \;=\; (x - \frac{1}{s},\, x + \frac{1}{s}).$$

Очевидно, что $\Sigma = \{\xi_x,\ x \in [-t/2, t/2]\}$– открытое покрытие $A$-ограниченного отрезка $[-t/2, t/2]$. Но поскольку длина каждого элемента покрытия составляет $2/s$, а длина всего отрезка $t$, то для покрытия всего отрезка потребуется не менее $ts/2$ элементов, т.е. любое подпокрытие $\Sigma$ обязательно $A$-бесконечно.

Обратно. Допустим, что сегмент $A$ мультипликативен, $[a, b]$ – $A$- ограниченный отрезок и $\Sigma$ – его произвольное открытое покрытие. Рассмотрим набор всех $A$-конечных объединений его подклассов, и пусть семейство $Q$ составлено из дополнений до этих объединений. Если $\Sigma$ не содержит $A$-конечного подпокрытия, то $Q$ состоит из непустых замкнутых классов. Поскольку $Q$ содержит пересечение двух любых своих элементов, то это направленное семейство при упорядочивании его элементов по включению.

Если бы $\cap Q \neq \emptyset$, то произвольный элемент этого пересечения не лежал бы ни в одном из $A$-конечных (в частности, одноэлементных) объединений элементов $\Sigma$, что противоречит тому, что это покрытие. Итак, выписанное пересечение пусто.

Построим

$$X \;=\; \{x_B,\ B \in Q\} \subset [a, b]$$

так, чтобы $(\forall B)\ x_B \in B$. Согласно утверждению теоремы 1, класс $X$ имеет в $[a, b]$ предельную точку $z$. Пусть $\gamma \in A$, $B \in Q$ выбраны произвольно. Тогда найдется $C \in Q$, $C \subset B$ такое, что $x_C \in U_\gamma(z)$, откуда

$$\emptyset \neq C \cap U_\gamma(z) \;\subset\; B \cap U_\gamma(z),$$

т.е. $z$ является точкой прикосновения $B$, что в силу замкнутости этого класса означает $z \in B$. Поскольку $B$ был произвольным классом из $Q$, это немедленно приводит к выводу о том, что $\cap Q \neq \emptyset$, а невозможность этого была уже установлена. Полученное противоречие доказывает наличие среди элементов $Q$ пустого класса, т.е. возможность построения $A$-конечного подпокрытия $[a, b]$. Теорема доказана.

## Библиографический список


1. Вопенка П. Альтернативная теория множеств. Новый взгляд на бесконечность. – Новосибирск, 2004.
2. Келли Дж.Л. Общая топология. – М., 1968.
3. Биркгоф Г. Теория структур. – М., 1952.
4. Дронов С.В. О свойстве фундаментальности сегментов класса натуральных чисел // Известия АлтГУ. – 2009.– №1.