

О.П. Бушманова, А.В. Устюжанова

Численное исследование напряженного состояния в окрестности системы горных выработок

О.П. Bushmanova, A.V. Ustyuzhanova

Numerical Investigation of the Stress State in the Working Mine System Vicinity

Исследуется напряженно-деформированное состояние упруго-пластического материала вблизи системы выработок и сдвиговых разрывов. Для численного моделирования используется метод конечных элементов. В области с системой из трех выработок построены изолинии функции текучести.

Ключевые слова: сдвиговые разрывы, упруго-пластический материал, выработка.

A stress-strain state of elastic-plastic material nearby mine working system and shear cracks is studied. The finite elements method is used for numerical modeling. The contour lines of fluidity function for system including three mine workings are constructed.

Key words: shear crack, elastic-plastic material, working.

Напряженно-деформированное состояние породного массива в окрестности выработок зависит от множества различных факторов, в частности, от формы выработок и механических свойств окружающих пород. В массивах горных пород часто встречаются геологические нарушения, естественная трещиноватость, а в окрестности выработок возникают и технологические трещины [1, 2].

Формирование сдвиговых разрывов также наблюдается в многочисленных экспериментах по изучению деформирования горных пород, упруго-пластических и сыпучих сред [3–6].

Рассмотрим систему протяженных горизонтальных горных выработок глубокого заложения с различными поперечными сечениями.

Предположим, что поведение породного массива при деформировании является упруго-пластическим [7].

В этом случае бесконечно малое приращение деформации $d\varepsilon_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$) может быть представлено в виде суммы упругой $d\varepsilon_{ij}^e$ и пластической $d\varepsilon_{ij}^p$ составляющих

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p. \quad (1)$$

Приращение деформации определяется через du_i – вектор приращения перемещения точки с текущим радиусом-вектором x_i

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (du_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (du_j) \right].$$

Упругая составляющая приращения деформации определяется через приращения напряжений $d\sigma_{ij}$ по закону Гука

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{ds_{ij}}{2G} + (1 - 2\nu)\delta_{ij} \frac{d\sigma}{E}, \quad (2)$$

где ν – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости; G – модуль сдвига; $d\sigma$ – приращение среднего давления; ds_{ij} – девiator тензора приращений напряжений

$$d\sigma = \frac{d\sigma_{mm}}{3}, \quad ds_{ij} = d\sigma_{ij} - \delta_{ij}d\sigma, \quad (m = 1, 2, 3).$$

Пластический потенциал $g(\sigma_{ij})$, зависящий от тензора напряжений σ_{ij} , выберем в следующем виде [8]

$$g(\sigma_{ij}) = T + \beta\sigma,$$

где

$$T = \sqrt{\frac{s_{ij}s_{ij}}{2}}, \quad \sigma = \frac{\sigma_{mm}}{3}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma.$$

Параметр β определяет отношение пластического объемного расширения к пластическому сдвигу.

На основе критерия пластичности Друккера-Прагера [9] зададим функцию текучести $f(\sigma_{ij})$

$$f(\sigma_{ij}) = T + \mu\sigma - \kappa, \quad (3)$$

где μ – коэффициент, характеризующий внутреннее трение; κ – сцепление или предел текучести при сдвиге.

В этом случае возникновение пластических деформаций в материале обусловлено критерием

$$T = -\mu\sigma + \kappa. \quad (4)$$

Таким образом, приращения пластических деформаций можно представить в виде

$$d\varepsilon_{ij}^p = h^{-1}P_{ij}Q_{kl}d\sigma_{kl}, \quad (5)$$

где h – скорость упрочнения,

$$P_{ij} = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{s_{ij}}{2T} + \frac{1}{3}\beta\delta_{ij}, \quad (6)$$

$$Q_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{s_{ij}}{2T} + \frac{1}{3}\mu\delta_{ij}. \quad (7)$$

Для исследования напряженно-деформированного состояния в окрестности выработок в рамках плоской деформации выберем нормальное к продольной оси выработок вертикальное сечение в виде прямоугольника с отверстиями.

Предположим, что в массиве присутствуют сдвиговые разрывы. Линии разрывов представим в виде разрезов.

В качестве характерного линейного размера выберем горизонтальный размер прямоугольника, в качестве характерного напряжения – $10^{-2}E$. Вертикальный размер прямоугольника, отнесенный к горизонтальному, равен H .

Систему отверстий в прямоугольнике представим в виде K кругов с радиусами r_i ($i = 1, \dots, K$) и M прямоугольников со сглаженными углами, имеющих размеры a_i, b_i ($i = 1, \dots, M$). Вдоль N отрезков длины l_i , наклоненных под углами β_i к оси x_1 ($i = 1, \dots, N$), расположим прямолинейные разрезы. Таким образом получим, что граница исследуемой области будет состоять из сторон $M + 1$ прямоугольника, K окружностей и $2N$ берегов разрезов.

Для решения упруго-пластической задачи в приращениях будем использовать метод последовательных нагружений, выполняя полное нагружение за L шагов. Напряжения на каждом шаге находятся в виде суммы приращений напряжений. Предполагается, что начальные напряжения и перемещения в области равны нулю.

Рассмотрим граничные условия на k -м шаге нагружения.

На сторонах прямоугольника, представляющих внешнюю границу области, приращение касательного напряжения $d\sigma_{12}^k = 0$.

Кроме того, приращения перемещений на данной границе имеют вид

$$du_1^k(0, x_2) = \tilde{u}_1^k, \quad du_1^k(1, x_2) = -\tilde{u}_1^k,$$

$$du_2^k(x_1, 0) = 0, \quad du_2^k(x_1, H) = \tilde{u}_2^k.$$

Здесь $\tilde{u}_1^k = const$, $\tilde{u}_2^k = const$,

$$\sum_{k=1}^L \tilde{u}_1^k = \tilde{u}_1, \quad \sum_{k=1}^L \tilde{u}_2^k = \tilde{u}_2.$$

На границах отверстий заданы нормальная $d\sigma_n^k$ и касательная $d\sigma_\tau^k$ составляющие векторов приращений напряжений

$$d\sigma_n^k = 0, \quad d\sigma_\tau^k = 0.$$

Граничные условия, описывающие взаимодействие берегов разрезов, представим в виде функциональных зависимостей между нормальными и касательными компонентами векторов приращений напряжений и приращений перемещений на берегах разрезов.

На площадке касательного разрыва перемещений вектор напряжений непрерывен. Поэтому на разрезах должны выполняться условия равенства нулю величин разрывов (скачков) нормальной $[d\sigma_n^k]$ и касательной $[d\sigma_\tau^k]$ компонент вектора приращений напряжений

$$[d\sigma_n^k] = 0, \quad [d\sigma_\tau^k] = 0. \quad (8)$$

Для того чтобы вдоль разрывов существовала возможность скольжения, предположим, что на определенных участках разрезов выполняется условие трения Кулона, связывающее нормальную и касательную составляющие вектора приращений напряжений

$$|d\sigma_\tau^k| + \alpha_i^k d\sigma_n^k = c_i^k, \quad (9)$$

где α_i^k – коэффициент трения на i -м разрезе; c_i^k – параметр, зависящий от сцепления и истории нагружения ($i = 1, \dots, N$).

Возникновение разрыхления материала при скольжении вдоль разрыва описывается зависимостью между скачками нормальной $[du_n^k]$ и касательной $[du_\tau^k]$ компонент вектора приращений перемещений на заданных участках разрезов

$$[du_n^k] = \lambda_i^k [du_\tau^k], \quad (10)$$

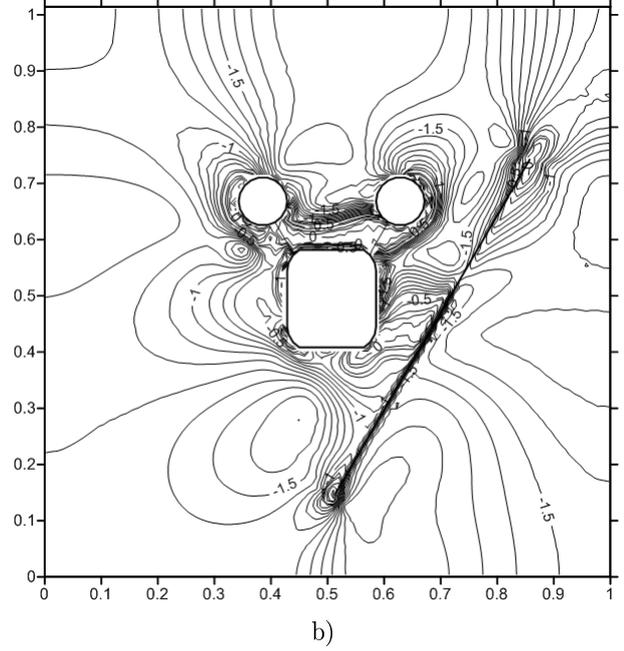
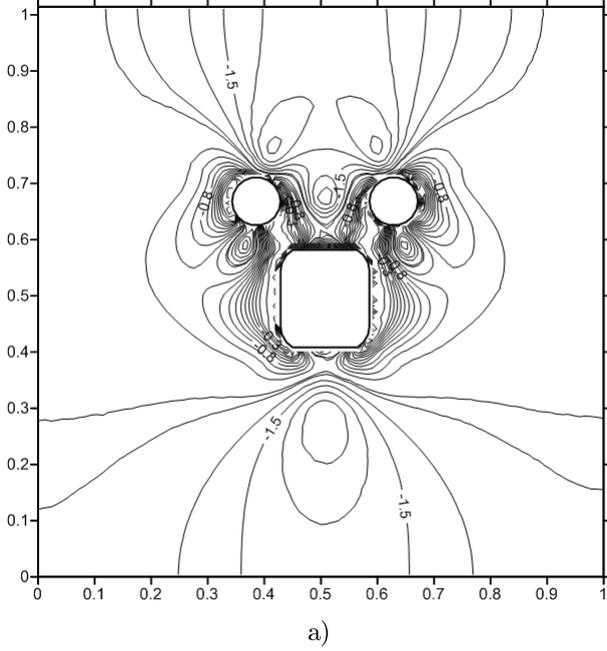
где λ_i^k – коэффициент пропорциональности.

На участках разрезов, вдоль которых не возникает разрывов, наряду с условиями (8), должны выполняться условия

$$[du_n^k] = 0, \quad [du_\tau^k] = 0. \quad (11)$$

Для численного решения поставленной задачи используется метод конечных элементов [10]. Реализация различных типов условий на разрывах проводится в рамках алгорит-

мов и программ, использующих проблемно-ориентированные адаптивные конечно-элементные сетки с двойными узлами [11–13].



Изолинии функции текучести

Для каждого конечного элемента компоненты тензоров приращений деформаций $\{d\varepsilon\}$ и приращений напряжений $\{d\sigma\}$ можно представить в векторной форме

$$\begin{aligned} \{d\varepsilon\} &= \{d\varepsilon_{11}, d\varepsilon_{22}, d\varepsilon_{33}, 2d\varepsilon_{12}, 2d\varepsilon_{13}, 2d\varepsilon_{23}\}^T, \\ \{d\sigma\} &= \{d\sigma_{11}, d\sigma_{22}, d\sigma_{33}, d\sigma_{12}, d\sigma_{13}, d\sigma_{23}\}^T. \end{aligned}$$

В этом случае закон Гука (2) примет вид

$$\{d\sigma\} = [D]\{d\varepsilon^e\}, \quad (12)$$

где $[D]$ – матрица упругих констант.

Аналогично представим и приращения пластических деформаций (5)

$$\{d\varepsilon^p\} = h^{-1}\{P\}\{Q\}^T\{d\sigma\}, \quad (13)$$

где векторы $\{P\}$ и $\{Q\}$ определяются на основе формул (5–7).

Соотношение (1) можно записать в виде

$$\{d\varepsilon\} = [D]^{-1}\{d\sigma\} + h^{-1}\{P\}\{Q\}^T\{d\sigma\}. \quad (14)$$

Таким образом, получаем выражение, определяющее приращения напряжений через приращения деформаций

$$\{d\sigma\} = [D]^{ep}\{d\varepsilon\}, \quad (15)$$

где

$$[D]^{ep} = [D] - \frac{[D]\{P\}\{Q\}^T[D]}{h + \{Q\}^T[D]\{P\}}. \quad (16)$$

В данной работе при рассмотрении пластического течения ограничимся случаем $\{P\} = \{Q\}$.

В ходе численного решения поставленной задачи получены поля перемещений и напряжений для областей с различным расположением отверстий и разрезов. В частности, рассматривалась область с тремя сближенными выработками различного сечения, аналогичная одной из областей, выбранных для экспериментального исследования напряженного состояния в монографии [14].

На рисунке представлены изолинии функции текучести f для указанной области без разрезов (а) и с прямолинейными разрезами (б).

При расчетах принимались следующие значения параметров: $\nu = 0.3$, $H = 1.02$, $M = 1$, $K = 2$, $N = 0; 3$, $L = 5$, $r_1 = r_2 = 0.043$, $a_1 = 0.16$, $b_1 = 0.17$, $\check{u}_1 = 0.0028$, $\check{u}_2 = -0.028$, $\kappa = 2.4$, $c_i = 0$, $\alpha_i^k = 0.27$, $\lambda_i = 0$, $\beta = \mu = 0$.

Библиографический список

1. Баклашов И.В., Картозия Б.А. Механика горных пород. – М., 1975.
2. Турчанинов И.А., Иофис М.А., Каспарьян Э.В. Основы механики горных пород. – Л., 1989.
3. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. – М., 1969. – Т. 2.
4. Разрушение неметаллов и композитных материалов / под ред. Г. Либовица. – М., 1976. – Т. 7.
5. Ревуженко А.Ф. Механика сыпучих сред. – Новосибирск, 2003.
6. Гольдштейн Р.В., Кулинич Ю.В., Осипенко Н.М. Разрушение горных пород вблизи отверстия при сжатии: препринт ИПМех РАН. – 2005. – №778.
7. Хилл Р. Математическая теория пластичности. – М., 1956.
8. Райс Дж. Р. Локализация пластической деформации // Теоретическая и прикладная механика: тр. III Междунар. конгресса IUTAM. – М., 1979.
9. Друккер Д., Прагер В. Механика грунтов и пластический анализ или предельное проектирование // Определяющие законы механики грунтов. – М., 1975.
10. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method. Butterworth-Heinemann. – 2000. – V. 2.
11. Бушманова О.П. Моделирование локализации сдвигов // ПМТФ. – 2003. – №6.
12. Бушманова О.П., Ревуженко А.Ф. Напряженное состояние породного массива вокруг выработки в условиях локализации сдвигов // ФТПРПИ. – 2002. – №2.
13. Бушманова О.П., Бушманов С.Б. Численное моделирование процесса деформирования материала в сходящемся канале в условиях возникновения линий локализации // ФТПРПИ. – 2009. – №4.
14. Курленя М.В., Еременко А.А., Цинкер Л.М., Шрепп Б.В. Технические проблемы разработки железнорудных месторождений Сибири. – Новосибирск, 2002.