УДК 004.09

А.В. Максимов

Разработка алгоритма коррекции состояния в дискретной системе управления непрерывным статическим объектом в динамических случайных средах*

A.V. Maximov

Development of Algorithm Correction of the Discrete System Controlling Continuous Static Object in the Dynamic Random Medium

Рассматриваются задачи начальных этапов синтеза дискретных систем управления с коррекцией состояния в случае, когда алгоритм управления может быть представлен в виде разложения по базисной системе функций времени с точностью до весовых коэффициентов, оптимальные значения которых определяются из критерия оптимальности управления.

Ключевые слова: система управления, объект управления, случайный процесс, коррекция управления.

The author considers problems of the initial stages of the synthesis of discrete control systems with the correction of the state when the control algorithm can be represented as an expansion in the basic system of time functions up to the weights which optimal values are determined from the criterion for optimal control.

Key words: control system, object management, random process, correction control.

Исследуются алгоритмические проблемы начальных этапов синтеза дискретных систем управления с коррекцией состояния [1] в случае, когда алгоритм управления может быть представлен в виде разложения по базисной системе функций времени с точностью до весовых коэффициентов, оптимальные значения которых определяются из критерия оптимальности управления.

Пусть управление выбирается из условия максимизации некоторого критерия $F(y(t),\ v(t),\ x(t))$, который явно от параметра времени t не зависит. Здесь $y(t) = f(x(t),\ v(t))$ – зависимость выходной переменной объекта $y(t)$ от управления и возмущения.

Рассмотрим «идеальное управление» $u^*(t)$, которое отыскивается решением задачи параметрической оптимизации $u^*(t) = \arg\max \{F(y, x(t), v) / y = f(x(t), v), v \in V\}$. Пусть идеальное управление $u^*(t)$ не может быть реализовано в каждый момент времени $t \in [0, T]$, а коррекцию реального управления $u(t)$ можно проводить лишь с определенным запаздыванием в дискретные моменты времени.

Математическую модель системы управления в рассматриваемом случае представим в следующем виде:

$$y = f(v(t), x(t));\ f: V \times R^n \to R^m;\ V \subseteq R^N, \qquad (1)$$

где t – параметр времени; y – вектор выходных переменных; $v(t)$ – функция управления; $x(t)$ – стационарный случайный процесс. Требуется выбрать управление из условия:

$$F(x, y, v) \to \min_{u \in U};\ F: R^n \times R^m \times V \to R, \qquad (2)$$

где U – множество допустимых функций управления.

Алгоритм управления, являющийся решением задачи (2), может реализовываться как непрерывной, так и дискретной системами управления. При анализе задачи синтеза оптимального управления (2) мы используем «идеальное» управление $v^*(x)$, которое отыскиваем решением задачи параметрической оптимизации

$$v^*(x) = \arg\min \{F(x, y, v) / y = f(x, v), v \in V\}. \qquad (3)$$

Рассмотрим случай дискретных систем управления, когда в качестве управляющего устройства используется дискретное вычислительное устройство и информация о возмущении $x(t)$ принимается системой в фиксированные моменты времени. Применительно к алгоритмам (2) и дискретным системам управления одна из проблем – получение оценки потерь оптимальности управления на продолжительных интервалах времени.

Другая проблема связана с выбором интервала дискретности, который определяется длительно-

* Работа выполнена при финансовой поддержке ведомственно-аналитической программы «Развитие научного потенциала Высшей школы (2009–2011 гг.)» (проект №2.2.2.4/4278).

стью сбора и переработки информации об объекте и в ряде случаев может быть неприемлемо большим. В системе управления возникают значительные ошибки, вызванные дискретностью представления динамических сигналов и запаздыванием в вычислении управляющего воздействия.

Эти ошибки дискретных систем управления можно снизить за счет повышения быстродействия технических устройств сбора, обработки информации, расчета и реализации управляющего воздействия, однако при этом резко возрастают затраты на управление. Альтернативный подход, который рассматривается в данной главе, состоит в разработке и реализации дополнительных алгоритмов управления процессом внутри интервалов дискретности основного алгоритма управления. Таким образом, для рассматриваемого класса объектов дискретного управления с запаздыванием возникает проблема синтеза дискретных систем управления следующих двух типов:

– дискретных систем управления с пассивным поведением объекта внутри интервалов дискретности (дискретных систем управления);

– дискретных систем управления с дополнительной коррекцией состояния объекта внутри интервалов дискретности (дискретных систем управления с коррекцией состояния).

Рассмотрим, например, математическую модель дискретных систем управления, в которой интервал дискретности равен T, а запаздывание – τ. Обычно выбираемое в таких случаях управление в произвольном интервале времени $[sT, (s+\ )T]$, $s = 0, 1, \ldots$ представляет собой кусочно-постоянную функцию вида:

$$v(t) = v^*\left(x(sT-\tau)\right),\ t \in \left[sT, (s+1)T\right], s = 0,1,..., \quad (4)$$

где $v^*(x)$ – решение задачи (3); s – номер такта управления.

Во многих случаях управление (4) достаточно хорошо аппроксимирует «идеальную» траекторию $v^*(x(t))$, и потери оптимальности управления оказываются малыми. Однако существуют случаи, когда данный тип управления не обеспечивает заданную точность системы, что приводит к ощутимым потерям эффективности. Анализ, проведенный методами математического моделирования [2–8], показал, что использование дискретных систем управления с коррекцией состояния позволяет снизить потери оптимальности в 2–5 раз даже в тех случаях, когда при коррекции учитывается только одна точка предыстории возмущения. Однако аналитический синтез на практике либо вообще невозможен, либо найденный алгоритм управления может оказаться нереализуемым. Задача упрощается, если структура алгоритма управления в дискретных системах управления с коррекцией состояния задана априори в виде, например, полиномиальной функции времени с параметрами, определяемыми на каждом интервале. Особенностью такого подхода является то, что задача синтеза дискретных систем управления без коррекции состояния является частным случаем задачи синтеза дискретных систем управления с коррекцией состояния при нулевом порядке полинома. В этих случаях в качестве средства уменьшения потерь оптимальности системы управления и предлагается использовать дискретные системы управления с коррекцией состояния.

Введем в рассмотрение ступенчатую вектор-функцию:

$$A(t) = \left[x\left((s-i)T-\tau\right)\right]_{i=O,F}, \quad t \in \left(s, s+1\right]T,\ s = 0, 1, ..., \quad (4)$$

где $A(t)$ – конечная предыстория n-мерного случайного процесса $x(t)$; $F+1$– ее длина.

Функция коррекции управления на интервале $(s, s+1]T$ представляет собой временную функцию, зависящую от $A(t)$, т.е. в качестве информационного вектора d выступает совокупность $d = \langle A(t), t\rangle$. Таким образом, в рассматриваемых дискретных системах управления операторы V и F являются статическими, а оператор D – динамическим, т.е. зависимый от параметра времени T в явном виде. Согласно приведенному выше варианту информационного обмена, дискретная система управления имеет следующее описание:

$$\begin{cases} d = D(x,y,v) = \langle A(t),\ t\rangle; \\ v = V(d) = V\left(A(t), t\right); \\ y = F(x,u). \end{cases} \quad (5)$$

В приведенных обозначениях функционал качества (3) запишется в следующем виде:

$$J = \frac{1}{T} M\left[\int_0^T F\left(x, V\left(A(t), t\right)\right)dt\right]. \quad (6)$$

Если отсутствуют интегральные ограничения на оператор $V(d)$ в выражении (6), то цель управления определится из следующего выражения:

$$J = \frac{1}{T}\int_0^T M\left[F\left(x(t), v \mid A(t), t\right)\right]dt \to \min_{u\in U}, \quad (7)$$

которое эквивалентно может быть записано в виде:

$$G(t) = M\left[F\left(x(t), v\right) \mid A(t), t\right] \to \min_{u\in U}. \quad (8)$$

В формуле (7) $M[\cdot|\cdot]$ – символ операции вычисления условного математического ожидания. Задача (9) является основной для синтеза дискретных систем управления, а функционал (6) может быть использован для оценивания качества разных способов управления. Так, для дискретных систем управления без коррекции состояния имеем

$$\begin{aligned} &A(t) = \left[x(sT-\tau)\right],\ t \in (s, s+1]T; \\ &v = v^*\left(A(t)\right); \\ &J = \frac{1}{T}\int_0^T M\left[F\left(x(t), v^*\left(x(-\tau)\right)\right)\right]dt, \end{aligned} \quad (9)$$

где $v^*(x)$ – решение задачи (1). Для способа управления, когда значение управляющего воздействия внутри интервала дискретности определяется из решения задачи (1) для прогноза возмущения на середину интервала управления, имеем

$$A(t)=\left[x(T\cdot(s-i)-\tau)\right]i=\overline{0,F},\ t\in(s,s+1]\,T;$$

$$d=M\left[x\left(\left(s+\frac{1}{2}\right)T\right)|\,A(t)\right];\qquad v=v^*(d);\tag{10}$$

$$J=\frac{1}{T}\int_0^T M\left[f\left(x(t),v^*\left(M\left[x\left(\frac{T}{2}\right)|\,x(-iT-\tau),\ i=\overline{0,F}\right]\right)\right)\right]dt.$$

Анализ выражения (10) показывает, что постоянное на интервале дискретности управление не будет наилучшим даже для оценки возмущения для $t = t^*$, равного середине интервала дискретности управления, поскольку математическое ожидание функции в общем случае не равно функции от математического ожидания. Более того, выбор t^* требует дополнительного обоснования.

Решение задачи синтеза дискретных систем управления с коррекцией состояния осуществляется с использованием целевой функции (2). При этом задача определения коэффициентов может оказаться сложной для произвольной целевой функции F. Поэтому желательно воспользоваться аппроксимацией функции F в окрестности реализуемого управления с соответствующим преобразованием (7). Рассмотрим один из способов решения данной задачи.

Пусть $\tilde{v}(x)$ – решающая функция следующей задачи параметрического программирования

$$\tilde{v}(x)=\arg\min\{F(x,v)/\,v\in V=R^N\},\ x\in R^n,\tag{11}$$

где F – строго выпуклая на V функция, имеющая, по предположению, непрерывные частные производные по x и v до третьего порядка включительно.

Пусть $x = m + \omega$, $v = U(x) + \omega$, где ω и ε, $\omega\in R^n$, $\varepsilon\in R^N$ – симметрично распределенные случайные величины, причем $M[\omega]=M[\varepsilon]=0$ – математическое ожидание x. Обозначим через $H(\omega,\varepsilon)$ функцию $F(m+\omega,U(m+\omega)+\varepsilon)$ и найдем математические ожидания разложения функции H в ряд Тейлора в окрестности точки $\omega=\varepsilon=0$ до членов третьего порядка включительно:

$$\begin{aligned}H(\omega,\varepsilon)&=H(0,0)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H(0,0)}{\partial\omega_i}\omega_i+\\&+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial H(0,0)}{\partial\varepsilon_i}\varepsilon_i+\frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 H(0,0)}{\partial\omega_i\partial\omega_j}\omega_i\omega_j+\\&+\frac{2}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2 H(0,0)}{\partial\omega_i\partial\varepsilon_j}\omega_i\varepsilon_j+\\&+\frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2 H(0,0)}{\partial\varepsilon_i\partial\varepsilon_j}\varepsilon_i\varepsilon_j+\\&+\frac{1}{3!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^3 H(0,0)}{\partial\omega_i\partial\omega_j\partial\omega_k}\omega_i\omega_j\omega_k+\\&+\frac{3}{3!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial^3 H(0,0)}{\partial\omega_i\partial\omega_j\partial\varepsilon_k}\omega_i\omega_j\varepsilon_k+\\&+\frac{3}{3!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial^3 H(0,0)}{\partial\omega_i\partial\varepsilon_j\partial\varepsilon_k}\omega_i\varepsilon_j\varepsilon_k+\\&+\frac{1}{3!}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial^3 H(0,0)}{\partial\varepsilon_i\partial\varepsilon_j\partial\varepsilon_k}\varepsilon_i\varepsilon_j\varepsilon_k+\\&+\text{ члены высшего порядка малости.}\end{aligned}\tag{12}$$

Известно, что если случайный вектор имеет симметричное распределение, то все его центральные моменты нечетного порядка равны нулю. Учитывая симметричность распределения ω и ε,

$$\begin{aligned}M\left[\omega_i\omega_j\omega_k\right]&=M\left[\omega_i\omega_j\varepsilon_k\right]=M\left[\omega_i\varepsilon_j\varepsilon_k\right]=\\&=M\left[\varepsilon_i\varepsilon_j\varepsilon_k\right]=0.\end{aligned}\tag{13}$$

Согласно (13) рассмотрению подлежат только нулевой член и члены второго порядка разложения (12). Рассмотрим $\dfrac{\partial^2 H[\omega,\varepsilon]}{\partial\omega_i\partial\varepsilon_j}$, $i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,N}$. При $\varepsilon = 0$ справедливо равенство:

$$\frac{\partial^2 H[\omega,\varepsilon]}{\partial\omega_i\partial\varepsilon_j}=0,\ i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,N}.\tag{14}$$

Действительно, учитывая, что точка при $\varepsilon = 0$ является стационарной точкой функции F, имеем

$$h_j=\frac{\partial H(\omega,\varepsilon)}{\partial\varepsilon_j}|_{\varepsilon=0}=0,\ i=\overline{1,N}.\tag{15}$$

Так как H – строго выпуклая на V функция, точка $\varepsilon = 0$ будет единственным решением уравнения (5), которое задает неявную функцию $\varepsilon(\omega)$, но $\varepsilon(\omega)=0$, по условию, то

$$\frac{\partial\varepsilon_j(\omega)}{\partial\omega_i}=0,i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,N}.\tag{16}$$

Согласно теореме о неявной функции справедливо следующее равенство:

$$\frac{\partial h_j}{\partial\omega_i}+\frac{\partial h_j}{\partial\varepsilon_1}\cdot\frac{\partial\varepsilon_1(\omega)}{\partial\omega_i}+...+\frac{\partial h_j}{\partial\varepsilon_N}\cdot\frac{\partial\varepsilon_N(\omega)}{\partial\omega_i}=0.\tag{17}$$

Подставим (5) и (6) и получим, что $\dfrac{\partial h_j}{\partial\omega_i}|_{\varepsilon=0}=0$, $i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,N}$. Что и требовалось доказать.

Следовательно, пренебрегая членами высшего порядка малости, получаем

$$\begin{aligned}&M\left[F(x,v)\right]\approx F(m,U(m))+\\&+\frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial\omega_i\partial\omega_j}F(m+\omega,U(m+\omega))|\omega=\\&0\cdot M\left[\omega_i\omega_j\right]+\frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial v_i\partial v_j}F(m,v)|v=\\&+U(t)\cdot M\left[\varepsilon_i\varepsilon_j\right].\end{aligned}\tag{18}$$

Сумма первого и второго слагаемого в (18) определяет среднее значение минимума функции F при «идеальном» управлении $v^* = \tilde{v}(x)$ и не зависит от качества управления. Третье слагаемое в (18) характеризует величину средних потерь оптимальности и, следовательно, зависит от реального управления. Таким образом, если распределения x и ε (ошибки в управлении) симметричны, то вместо F можно исследовать функцию

$$I = \left(v - \tilde{v}(x)\right)^T \alpha \left(v - \tilde{v}(x)\right), \tag{19}$$

где

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 F(m,v)}{\partial v_i \partial v_j}\Big|_{v=U(m)};\ m = M[x];\ i,j = \overline{1,N}. \tag{20}$$

Причем, как видно из (20), элементы матрицы α не зависят от значений процесса $x(t)$, что обеспечивает оценивание потерь оптимальности в среднем. Поскольку функция I характеризует потери оптимальности в среднем, то при решении задачи синтеза дискретных систем управления с коррекцией состояния вместо функционала J можно использовать функционал P.

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T M\left[I(x,u)\right]dt, \tag{21}$$

который определяет величину среднеинтервальных потерь оптимальности из-за несовпадения траектории управления $v(t)$ с идеальной траекторией $\tilde{v}^*(x(t))$:

$$P = J - J^*, \tag{22}$$

где J^* – оценка качества управления при $v = \tilde{v}^*(x(t))$.

Сложность нахождения оптимального управления в задаче (19) обусловлена тем, что в функционале J функция $v^*(x)$ в общем случае может быть получена путем численного решения оптимизационной задачи и не имеет аналитического выражения. Упрощение поставленной задачи достигается в предположении, что эффективное реальное управление $v(t)$ в некотором смысле близко «идеальному» управлению $\tilde{v}^*(x(t))$, что позволяет осуществить приближенную замену функции F на функцию I, $I = \left\| v - \tilde{v}^*(x) \right\|_\alpha^2$, где $\|\varepsilon\|_\alpha$ – α-норма вектора ε; α – симметричная матрица; $\|\varepsilon\|_\alpha = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j}$.

Выражения (19)–(22) являются стохастическим разложением функции потерь оптимальности управления в окрестности идеальной траектории, позволяющим осуществлять коррекцию управляющего воздействия заданием коэффициентов базисных функций, вычисляемых по точно́стному критерию.

На практике показано, что для разработки алгоритма коррекции управляющего воздействия на этапе синтеза системы управления необходимо исследовать динамические характеристики «идеальной» траектории управления и определять коэффициенты базовых функций времени исходя из вычисляемой в дискретные моменты времени предыстории «идеального» управления на основании решения задачи прогноза «идеального» управления по точно́стному критерию.

Библиографический список

1. Максимов А.В., Оскорбин Н.М. Многопользовательские информационные системы: основы теории и методы исследования. – Барнаул, 2005.
2. Максимов А.В. Выбор параметров локальных алгоритмов в АСУТП // Оптимизация управления сложными технологическими процессами непрерывного типа. – Томск, 1980.
3. Максимов А.В. Замена генерации случайного процесса на генерацию случайного вектора // Тезисы докладов к конференции молодых ученых АГУ. – Барнаул, 1981.
4. Максимов А.В. Нахождение оптимальных программ управления объектом в случайных средах при произвольном информационном векторе // Синтез и проектирование многоуровневых иерархических систем: мат. Всес. конф. – Барнаул, 1983.
5. Максимов А.В., Оскорбин Н.М. О двухэтапной процедуре имитационного моделирования корреляционно-экстремальных систем статического типа // Корреляционно-экстремальные системы. – Томск, 1982.
6. Максимов А.В., Оскорбин Н.М. Подход к синтезу алгоритмов АСУТП, учитывающий условия реализации // Молодые ученые Алтайского края в борьбе за науку и научно-технический прогресс: тез. докл. конф. – Барнаул, 1979.
7. Максимов А.В., Оскорбин Н.М. Решение задачи дискретного управления безынерционным объектом при возмущении стационарным случайным процессом // Корреляционно-экстремальные системы: тр. I Всес. конф. по КЭС. – Томск, 1979.
8. Максимов А.В., Оскорбин Н.М. Решение оптимизационных задач, учитывающее условие реализации // Оптимизация управления сложными технологическими процессами непрерывного типа. – Томск, 1980.