

УДК 519.7

*М.В. Досымова***Математическое моделирование динамики знаний обучающихся в процессе подготовки к ЕГЭ по математике***M.V. Dosymova***Mathematical Modeling of Developing Pupils' Skills in a Process of Preparing for EGE on Mathematics**

Рассмотрена математическая модель динамики знаний учащихся при подготовке к ЕГЭ по математике. Данная модель может быть использована в специальных тестах для оценивания профессиональных и личностных качеств обучающихся и прогнозирования уровня обученности с учетом индивидуального коэффициента забывания.

**Ключевые слова:** моделирование, динамика знаний, уровень обученности, компетенции.

**Введение.** В связи с подписанием Болонского соглашения и принятием стандартов третьего поколения процесс обучения студентов в вузах (и не только) становится все более и более регламентированным. Теперь учебный план предусматривает зачетные единицы по каждой дисциплине, которые обучающийся должен обязательно освоить.

В качестве другого примера усиления регламентации учебного процесса можно отнести введение такой обязательной формы контроля знаний учащегося, как тестирование. Сегодня тестирование стало обязательным не только для школьников (ГИА и ЕГЭ), но и для студентов (Федеральный интернет-экзамен по дисциплинам федерального компонента циклов ГСЭ, ЕН и ОПД государственных образовательных стандартов).

Все это демонстрирует нам, что к организации учебного процесса как на уровне отдельных дисциплин, так и на уровне подготовки специалистов в учебных заведениях подходят с позиций программно-целевых методов, т.е. с позиций теории управления. Процесс обучения в этом случае необходимо представлять как производственную систему, состоящую из «участков» (изучение дидактических единиц дисциплин), «цехов» (изучение модулей дисциплин), «производств» (изучение циклов дисциплин и их компонентов) и т.д.

Таким образом, описание образовательных процессов переходит на более высокий уровень регламентации. В стандартах третьего поколения системообразующим фактором такой регламентации и описания выступает совокупность компетенций,

This article considers mathematical model of developing pupils' skills during preparing for EGE on Mathematics. The model is useful for special tests analyzing professional and individual characteristics of pupils. Also this model is useful for forecasting the level of training taking into account an individual factor of forgetting.

**Key words:** modeling, skills dynamics, level of training, competences.

формирующихся у обучающихся при изучении определенных дисциплин. Однако в настоящее время методы теории управления в описании образовательного процесса практически не применяются. Одно из главных условий применения программно-целевых методов при организации профессиональной подготовки студентов вузов – разработка комплекса математических моделей образовательных процессов как сложной динамической системы. Обоснование актуальности этой проблемы и методов математического моделирования проведено в работе [1].

В данной статье рассматривается математическое моделирование нижнего уровня образовательного процесса: обучение по группе дисциплин, контроль которого периодически осуществляется специальной системой тестирования.

В качестве объекта исследования выбрана подготовка школьников на базе Рубцовского института (филиала) Алтайского государственного университета к сдаче ЕГЭ по математике, как примера обучения по группе дисциплин, в котором можно контролировать исходные знания обучающихся, динамику знаний в процессе обучения и финальный результат (балл, полученный учащимся в результате сдачи ЕГЭ).

В процессе исследования мы рассматриваем:

1. Общую математическую модель для описания процесса индивидуального и группового обучения в динамике с учетом влияния смежных знаний на нижнем уровне организации профессиональной подготовки в вузах.

2. Таблицу наблюдений для идентификации параметров модели и требования по ее формированию.
3. Порядок обработки данных при построении математической модели.
4. Классификацию объектов моделирования.
5. Интерпретацию результатов обработки данных и построенной математической модели процесса обучения.

Исследования по пунктам 1 и 2 проводятся автором на основе работы [1], по пунктам 3–5 выполнены на основе работ, посвященных построению зависимостей по экспериментальным данным [2–5], и результатов подготовки школьников в Рубцовском институте (филиале) Алтайского государственного университета к сдаче ЕГЭ по математике.

**Общая математическая модель для описания процесса индивидуального и группового обучения в динамике.** Приобретение обучающимися определенных знаний, умений и навыков в процессе обучения можно представить с помощью динамической модели, в которой учитываются следующие факторы: индивидуальная динамика процесса обучения с учетом (без учета) междисциплинарных связей; эффекты взаимодействия учащихся в группе, социально-экономические факторы среды образовательного процесса, уровня рыночных мотиваторов и др.

Ограничимся исследованием простой математической модели динамики знаний в процессе обучения, в котором участвуют  $n$  независимых индивидов. Будем считать, что контроль исходных знаний начинается в момент времени  $t = 0$  (проведение начального тестирования, так называемого входного контроля), а уровень знаний учащихся можно измерять в узлах временной сетки

$$t_k = k \cdot \Delta t; \quad t = 0, 1, \dots, T,$$

где  $\Delta t > 0$  – шаг сетки.

На уровень подготовленности, помимо освоения теоретического материала и решения практических задач, значительное влияние оказывают способности самого обучающегося. Так, процесс динамики знаний на отрезке  $[t_k, t_{k+1}]$  можно описать следующей совокупностью независимых разностных уравнений:

$$x_i(t+1) = \alpha_i \cdot x_i(t) + \beta_i \cdot V_i(t) + \gamma_i \cdot Z_i(t), \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

где  $x_i(t+1)$  – уровень знаний по предмету (комплексу предметов), по которым осуществляется подготовка в момент времени  $(t+1)$ ;  $x_i(t)$  – уровень знаний по предмету (комплексу предметов), по которым осуществляется подготовка в момент времени  $t$ ;  $V_i(t)$  – фактор тренировки (контрольные работы, курсовые работы, практики и т.п.)  $i$ -го учащегося;  $Z_i(t)$  – фактор обучения (базовые знания)  $i$ -го учащегося;  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  – индивидуальные коэффициенты потенциала обучающихся,  $0 < \alpha_i, \beta_i, \gamma_i < 1$ .

Модель (1), по нашему мнению, может быть применена для исследования динамики знаний обуча-

ющихся для сдачи ЕГЭ по математическим дисциплинам.

**Таблица наблюдений для идентификации параметров модели и требования по ее формированию.** Для того чтобы оценить адекватность модели (1), необходимо в течение определенного времени проводить наблюдение изменения уровня знаний обучающихся. Для этого через примерно равные промежутки времени проводится тестирование учащихся.

Оценку теоретической и практической работы обучающихся преподаватель проводит на занятиях (в сумме баллы за теоретическую и практическую работу должны быть в пределах 100). Соотношение доли практической работы и теоретического обучения определяется количеством часов, отведенных на лекции и практикумы в учебном плане.

За тестирование учащихся также может набрать не более 100 баллов. Это обусловлено использованием в Рубцовском институте (филиале) Алтайского государственного университета 100-балльной шкалы оценивания успеваемости студентов.

Таблица наблюдений формировалась в течение пяти месяцев подготовки к ЕГЭ по математике. За указанный период было проведено шесть тестирований. Параллельно преподаватель оценивал теоретическую подготовку и практическую работу обучающихся. В качестве заключительного тестирования были взяты результаты сдачи ЕГЭ по математике.

**Порядок обработки данных при построении математической модели.** После проведения идентификации модели получаем переопределенную систему уравнений для каждого ученика:

$$\begin{cases} x_i(1) - (\alpha_i \cdot x_i(0) - \beta_i \cdot V_i(0) - \gamma_i \cdot Z_i(0)) = \varepsilon_1 \\ x_i(2) - (\alpha_i \cdot x_i(1) - \beta_i \cdot V_i(1) - \gamma_i \cdot Z_i(1)) = \varepsilon_2 \\ x_i(3) - (\alpha_i \cdot x_i(2) - \beta_i \cdot V_i(2) - \gamma_i \cdot Z_i(2)) = \varepsilon_3 \\ \dots \\ x_i(n) - (\alpha_i \cdot x_i(n-1) - \beta_i \cdot V_i(n-1) - \gamma_i \cdot Z_i(n-1)) = \varepsilon_n \end{cases}$$

Модель (1) является динамической авторегрессионной моделью вида  $y_t = \alpha \cdot y_{t-1} + \beta \cdot x_t^1 + \gamma \cdot x_t^2 + \varepsilon$ . Для определения коэффициентов  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  с помощью метода наименьших квадратов ее сводят к уравнению множественной регрессии [4, с. 516–518].

Эмпирическое уравнение регрессии определяется на основе конечного числа статистических данных. Поэтому коэффициенты эмпирического уравнения регрессии являются случайными величинами, изменяющимися от выборки к выборке. При проведении статистического анализа перед исследователем зачастую возникает необходимость сравнения эмпирических коэффициентов регрессии с некоторыми теоретически ожидаемыми (истинными по генеральной совокупности) значениями этих коэффициентов [5, с. 70].

После оценки индивидуальной статистической значимости каждого из коэффициентов регрессии обычно анализируется совокупная значимость коэффициентов, т.е. всего уравнения в целом. Такой анализ осуществляется на основе проверки гипотезы об общности значимости гипотезы об одновременном равенстве нулю всех коэффициентов регрессии при объясняющих переменных. Для оценки взаимосвязи между зависимой и объясняющими переменными используется множественный коэффициент детерминации, показывающий долю вариации зависимой переменной, обусловленную регрессией или изменчивостью объясняющих переменных [2, с. 169–171].

Одна из важнейших задач анализа динамики уровня обученности – прогнозирование на его основе уровня подготовленности обучающихся. При

этом исходят из того, что тенденция развития, установленная в прошлом, может быть распространена на будущий период. Но если вид уравнения регрессии выбран неудачно, то отклонения от него (возмущения  $\varepsilon_i$ ) не будут независимыми. В этом случае можно наблюдать заметную концентрацию положительных и отрицательных возмущений, а также предполагать их взаимосвязь. Если последовательные значения  $\varepsilon_i$  коррелируют между собой, то говорят об автокорреляции остатков (возмущений  $\varepsilon_i$ ).

Наиболее простым и достаточно надежным критерием определения автокорреляции возмущений является критерий Дарбина-Уотсона [4, с. 510–514].

Полученные результаты для 10 учеников представлены в таблице 1.

Таблица 1

Результаты эксперимента для 10 учеников

№	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$R^2$	Показатель динамики ( $Y_{расч}-Y_0$ )	Процент прироста уровня компетентности
1	0,8217	0,1295	0,2273	0,98	-5	-9,64
2	0,7715	0,2689	0,3806	0,93	14	22,81
3	0,4365	0,2216	0,8669	0,99	18	24,36
4	0,6028	0,4555	0,3582	0,99	9	12,68
5	0,535	0,7852	0,3046	0,92	10	15,12
6	0,4428	0,4250	0,9600	0,99	13	14,46
7	0,4349	0,4347	0,5057	0,99	4	16,67
8	0,3718	0,6068	0,6774	0,99	23	30,14
9	0,3245	0,3762	0,8343	0,99	35	60,71
10	0,2339	0,3338	0,9539	0,87	20	25,33

**Классификация объектов моделирования и математических моделей.** После определения коэффициентов  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  с использованием полученных результатов (табл. 1), литературных источников и педагогического опыта автора можно провести классификацию обучающихся по их способностям к обучению (рис. 1).

Коэффициент забывания  $\alpha_i$  лежит в интервале (0; 0,5). Такие студенты быстро забывают изученную информацию, поэтому им необходимо дополнительно тренировать память, чтобы получить более высокий уровень компетентности.

Коэффициент забывания  $\alpha_i$  лежит в интервале (0,5; 1). Студенты с высоким значением этого коэффициента обладают хорошей памятью и при хорошей теоретической и практической подготовке могут достигнуть высоких результатов обучения.

Коэффициент тренировки (практической работы)  $\beta_i$  лежит в интервале (0; 0,5). Такой результат говорит о том, что обучающийся обладает недостаточной теоретической базой и ему необходимо об-

ратить внимание на изучение теоретического материала.

Коэффициент тренировки (практической работы)  $\beta_i$  лежит в интервале (0,5; 1). Здесь можно сделать вывод о том, что студент очень хорошо усваивает теоретический материал.

Коэффициент теоретического обучения  $\gamma_i$  лежит в интервале (0;0,5). Такое значение коэффициента тренировки показывает нам, что обучающийся обладает недостаточными практическими навыками в рассматриваемой области и для повышения уровня компетентности ему необходимо больше внимания уделять практической работе.

Коэффициент теоретического обучения  $\gamma_i$  лежит в интервале (0,5; 1). В этом случае можно говорить о том, что обучающийся достаточно времени уделяет практической работе.

Все коэффициенты  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  лежат в интервале (0,5; 1). Такие значения коэффициентов являются показателем того, что обучающийся обладает высоким потенциалом развития в рассматриваемой области.

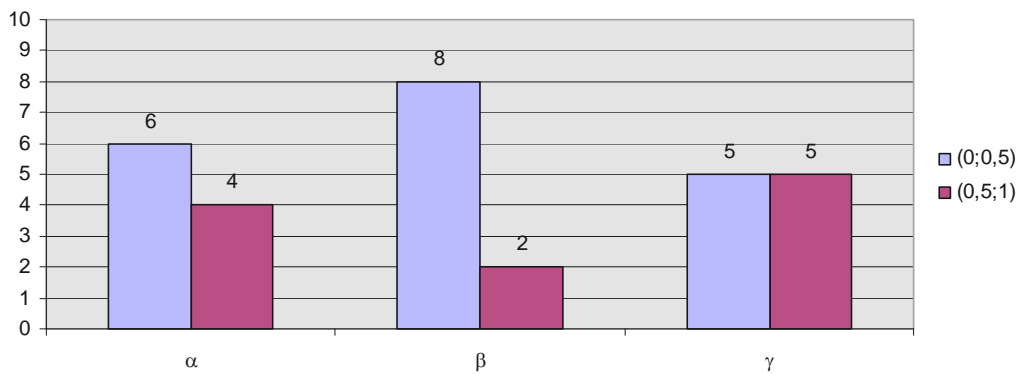


Рис. 1. Распределение учащихся в зависимости от значений индивидуальных коэффициентов  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$

**Интерпретация результатов обработки данных и построенной математической модели процесса обучения.** На основе полученной информации и индивидуальных коэффициентов  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  можно сообщать учащимся их слабые и сильные стороны, предлагать методы совершенствования способностей. Для преподавателей и работодателей данная информация полезна тем, что, зная индивидуальные особенности своих потенциальных работников, они смогут предложить деятельность, наиболее соответствующую их возможностям, а также спрогнозировать уровень подготовленности по группе дисциплин через определенные промежутки времени.

Таблица 2

Перечень показателей уровня профессиональной подготовки  $i$ -го обучающегося

Название показателей	Уровень компетентности
Грамотность и культура речи	76
Владение компьютером и умение работать в Интернете	88
...	...
Способность к педагогической деятельности	93

Также модель (1) можно применять для оценивания уровня профессиональной подготовки студентов в вузе с использованием таблицы компетенций, которая формируется для каждого студента по оценкам на момент выпуска.

Таблица 3

Личностные качества  $i$ -го выпускника

Название личностных качеств	Коэффициент
Умение работать в коллективе	91
Ответственность	64
...	...
Стрессоустойчивость	100
$\alpha_i$	0,5126
$\beta_i$	0,6439
$\gamma_i$	0,3688

Пусть по профессии  $ПС_i$  имеются веса для вычисления интегральной компетентности. При наличии информации о значении индивидуальных коэффициентов устаревания знаний для каждого студента можно принять решение о пересчете интегральной компетентности по профессии  $ПС_i$  в течение определенного количества (0,5–1–2) лет после окончания вуза.

Наиболее логичным является пересчитывать таблицу компетенций с учетом его деятельности в течение выбранного периода. По каждой позиции таблицы можно получить типовые значения коэффициентов  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ , скорректированные на индивидуальный коэффициент из таблицы 3. После этого с учетом его рода занятий определяются оценки  $V(t)$  и  $Z(t)$  для каждой строки таблицы 2 и можно прогнозировать уровень компетенций в будущем.

### Библиографический список

1. Оскорбин Н.М. Декомпозиционные методы и модели управления персоналом в человеко-машинных системах: дис. ... д-ра техн. наук. – Новосибирск, 1991.
2. Бородич С.А. Эконометрика: учеб. пособие. – Минск, 2001.
3. Киселева О.М. Применение методов математического моделирования в обучении: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Смоленск, 2007.
4. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник. – М., 2001.