УДК 510.1

В.А. Ганов, Р.В. Дегтерева

Нестандартный форсинг, истинность и общепринятость суждений

V.A. Ganov, R.V. Degtereva

Non-standard Forcing: Veritable and Conventional Ideas

Исследуются нестандартные способы определения метода форсинга, демонстрирующие существенное отличие отношения вынуждения от отношения истинности. Построены примеры, в которых вынуждаемы одновременно пары противоречивых суждений. Предложен необычный содержательный смысл форсинга как метода экспертных оценок нечетких понятий.

The research paper studies non-standard forcing method definitions demonstrating an essential difference between forcing and truth relations. Examples are given to show forced pairs of contradictory statements. The authors offer an unusual interpretation of forcing as a method of indistinct notions expert evaluation.

Ключевые слова: метод форсинга, формальная арифметика, истинность.

Key words: forcing method; formal arithmetic; the truth.

В данной работе исследуются нестандартные способы определения метода форсинга, при которых оказываются вынуждаемы одновременно пары противоречивых суждений вида: $\forall n A(n)$ и $\neg A(n_0)$ или $A(n_1)$ и $\neg\exists n A(n)$.

Сначала метод форсинга использовался в качестве вспомогательного средства для решения конкретных задач, например, для доказательства независимости континуум-гипотезы [1]. В каждой такой задаче определялась специальная модификация отношения истинности суждения, получившая название *вынуждение*, которая – на бытовом уровне – скорее соотносится с общепринятостью, нежели с истиной. Но сама идея форсинга представляется интереснее тех задач, для которых он был придуман. Наглядно эту идею можно интерпретировать следующим способом.

Пусть предстоит исследовать некоторое понятие P, которое не имеет четко определенного содержания, например, вкусная еда, красивая женщина, интересное число и т.п. Тогда о смысле такого понятия можно судить лишь на основании мнений всевозможных экспертов. Можно считать, что имеется некоторое сообщество экспертов, которые обследуют какие-то объекты a_1, a_2, a_3, ... и высказывают свое мнение о соответствии этих объектов понятию P. Мнение эксперта – это конечное непротиворечивое множество, составленное из высказываний вида $P(a)$ или $\neg P(a)$, где a рассматриваемые объекты. Другие свойства этих объектов записываются формулами некоторой непротиворечивой формальной системы Z, содержащей предикатный символ P. Тогда на основе своего мнения эксперт может оценивать какие-то более сложные формулы системы Z. Это оценивание называется *вынуждением* и осуществляется по определенным правилам форсинга. Предполагается, что по мере расширения опыта мнение эксперта может расширяться, но при этом такое расширение не должно противоречить ранее высказанному мнению. Поэтому на каком-то этапе может возникнуть ситуация, когда эксперт или группа экспертов могут дать оценку любому суждению системы Z. Суждения, получившие положительные оценки всех экспертов, называются *общепринятыми*. И если в некоторой модели системы Z истинные суждения совпадают с общепринятыми суждениями, то предикат P называется *генерическим*. Более того, общепринятые суждения согласованы с известными тавтологиями логики предикатов.

С другой стороны, определенный интерес представляет форсинг, когда истинные суждения не совпадают с общепринятыми. В связи с этим возникает желание видоизменить некоторые правила форсинга так, чтобы исключить возможность существования генерических предикатов и тем самым установить непроходимую границу между истинностью и общепринятостью. Естественный подход в этом направлении – это добиться, чтобы некоторые логические тавтологии были, по меньшей мере, не всегда вынуждаемы. Некоторые способы решения этой проблемы рассматриваются в [2] и более подробно в данной работе.

1. Нестандартный форсинг и истинность суждений. Пусть Z – элементарная арифметика с константами для всех натуральных чисел, и $Z(N)$ – естественная модель системы Z на N, где $N = \{0, 1, 2, ...\}$. Буквы m, n обозначают переменные на N. Если φ – замкнутая формула языка Z, то запись $Z(N) \models \phi$ обозначает истинность φ в $Z(N)$.

Пусть к сигнатуре системы Z добавлен символ $P(x)$ одноместного предиката. Стандартным способом определяется система $Z(P)$, содержащая $P(x)$ и являющаяся консервативным расширением системы Z. *Вынуждающие условия* – это конечные множества формул вида $P(n)$ или $\neg P(n)$, причем каждое такое множество непротиворечиво. Для удобства изложения считается, что пустое множество $\varnothing$ является вынуждающим условием. В произвольных случаях вынуждающие условия обозначаются буквой Q, возможно с некоторыми индексами.

Пусть Q – вынуждающее условие, φ – замкнутая формула системы $Z(P)$. Классическое определение отношения «*Q вынуждает* φ» (***обозначение:*** $Q \| - \phi$) осуществляется индукцией по логической глубине φ и почти полностью совпадает с определением отношения $Z(N) \models \phi$, кроме случая когда $\phi = \neg\phi_1$. В этом случае считают, что

$$Q \| - \neg\phi_1 \Leftrightarrow (\forall Q' \supseteq Q))\neg (Q' \| - \phi_1).$$

В свою очередь, это соотношение подсказывает следующую идею нестандартного форсинга.

Каждому условию Q ставится в соответствие множество $S(Q)$ вынуждающих условий, расширяющих Q и удовлетворяющих следующим условиям:

$$Q' \in S(Q) \wedge Q'' \in S(Q') \to Q'' \in S(Q), \quad (1)$$

$$Q' \in S(Q) \wedge Q \subseteq Q'' \subseteq Q' \to Q'' \in S(Q), \quad (2)$$

$$(\forall n \in N)(\exists Q' \in S(Q))(P(n) \in Q' \vee \neg P(n) \in Q'). \quad (3)$$

Эти условия имеют технический характер. Например, из (1) следует, что $Q' \in S(Q)$ влечет $S(Q') \subseteq S(Q)$. Из (2) следует, что $Q \in S(Q)$. Условие (3) необходимо для построения генерических предикатов.

Содержательно это означает, что если некий эксперт высказал мнение Q, то дальнейшие его высказывания Q' должны быть согласованы не только с Q, но и с некоторыми общепринятыми установками для всех экспертов, которые, в свою очередь, определяют множество $S(Q)$. При этом условие (1) означает, что если мнение Q' согласовано с Q и с упомянутыми общепринятыми установками, то соответствующее ему множество $S(Q')$ не выходит за пределы $S(Q)$. Аналогичное истолкование имеет условие (2).

Пусть Q – вынуждающее условие, φ – замкнутая формула системы $Z(P)$. Индукцией по логической глубине φ определяется следующее нестандартное отношение: $Q \| - \phi$.

Определение 1. 1. Если φ – атомная арифметическая формула, то $Q \| - \phi \Leftrightarrow Z(N) \models \phi$.

2. Если φ есть $P(n)$, то $Q \| - \phi \Leftrightarrow \phi \in Q$.

3. $Q \| - \phi_1 \wedge \phi_2 \Leftrightarrow (\exists Q' \in S(Q))(Q' \| - \phi_1) \wedge$
$\wedge (\exists Q'' \in S(Q))(Q'' \| - \phi_2)$.

4. $Q \| - \phi_1 \vee \phi_2 \Leftrightarrow (\exists Q' \in S(Q))(Q' \| - \phi_1) \vee$
$\vee (\exists Q'' \in S(Q))(Q'' \| - \phi_2)$.

5. $Q \| - \neg\phi_1 \Leftrightarrow (\forall Q' \in S(Q))\neg (Q' \| - \phi_1)$.

6. $Q \| - \phi_1 \to \phi_2 \Leftrightarrow (\exists Q' \in S(Q))(Q' \| - \neg\phi_1 \vee Q' \| - \phi_2)$.

7. $Q \| - \exists x \phi_1(x) \Leftrightarrow (\exists n \in N)(Q \| - \phi_1(n))$.

8. $Q \| - \forall x \phi_1(x) \Leftrightarrow (\forall n \in N)(\exists Q' \in S(Q))(Q' \| - \phi_1(n))$.

По сравнению с классическим определением здесь пункт 5 является ограничением указанного выше случая $Q \| - \neg\phi_1$. Пункты 3, 4 и 8 существенно расширяют классическое отношение $Q \| - \phi$, а остальные пункты сохраняют его. Следующие два утверждения показывают, что данное нестандартное отношение $Q \| - \phi$ обладает аналогами главных свойств классического форсинга.

Лемма 1. *Для любого вынуждающего условия Q и любой замкнутой формулы* φ *системы $Z(P)$ утверждения $Q \| - \phi$ и $Q \| - \neg\phi$ несовместны.*

Доказательство. Для атомных формул это утверждение легко следует из пунктов 1 и 2 определения 1. Далее, пусть $Q \| - \neg\phi$, тогда $(\forall Q' \in S(Q))\neg (Q' \| - \phi)$. Но так как $Q \in S(Q)$, то верно утверждение $\neg (Q \| - \phi)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Для любого условия Q и любой замкнутой формулы* φ *системы $Z(P)$ существует $Q' \in S(Q)$ такое, что $Q' \| - \phi$ или $Q' \| - \neg\phi$.*

Доказательство. Если φ – атомная арифметическая формула, то это утверждение очевидно. Если $\phi = P(n)$, то оно следует из условия (3). В остальных случаях, если верно $\neg (Q \| - \neg\phi)$, то существует $Q' \in S(Q)$ такое, что $Q' \| - \phi$. Отсюда следует искомое утверждение. Лемма доказана.

Теперь для выделения особенностей рассматриваемого форсинга вводятся некоторые специальные условия. Первое такое условие фигурирует в следующем утверждении.

Лемма 3. *Если $Q_1 \in S(Q)$ и $S(Q_1) = S(Q)$, то для любой замкнутой формулы* φ *системы $Z(P)$* отношение $Q \| - \phi$ влечет $Q_1 \| - \phi$.

Доказательство (индукцией по логической глубине φ). Случаи, когда φ – атомная арифметическая формула и φ есть $P(n)$, очевидны.

Индукционный шаг. Пусть $Q \| - \neg\phi_1$ и от противного верно утверждение $\neg(Q_1 \| - \neg\phi_1)$. Тогда верно $(\forall Q' \in S(Q))\neg(Q' \| - \phi_1)$. Отсюда следует, что для некоторого $Q'' \in S(Q_1)$ выполняется $Q'' \| - \phi_1$. Но $S(Q') \subseteq S(Q)$, поэтому $Q'' \in S(Q)$, что противоречит предыдущему утверждению. Следовательно, $Q_1 \| - \neg\phi_1$, что и требовалось доказать. В остальных случаях доказательство существенно использует условие $S(Q_1) = S(Q)$. Лемма доказана.

Пусть $P(Q)=\{n \in N / Q \| - P(n)\}$ и $Z(N, P(Q))$ обозначает стандартную модель системы $Z(P)$, в которой множество $P(Q)$ интерпретирует предикатный символ $P(x)$. Естественным способом определяется отношение истинности в $Z(N, P(Q))$, и пусть запись $Z(N, P(Q)) \models \phi$ обозначает отношение: «формула φ истинна в $Z(N, P(Q))$ ».

Очевидно, что если $Q_1 \in S(Q))$, то $P(Q) \subseteq P(Q_1)$. Обратное включение не обязано выполняться, поэтому вводится новое понятие.

Определение 2. Вынуждающее условие Q называется *полным для системы* $Z(P)$, если верно утверждение:

$$(\forall Q_1 \in S(Q))(P(Q_1) = P(Q)). \tag{4}$$

Пусть условие Q – полное для $Z(P)$, тогда согласно условию (1) для каждого $Q' \in S(Q))$ условие Q' также полное для $Z(P)$. Теперь индукцией по логической глубине φ легко доказывается, что для полного условия Q отношение $Q \Vdash \phi$ совпадает с отношением истинности φ в стандартных моделях системы $Z(P)$.

Теорема 1. *Если условие Q полное для Z(P), то для любой замкнутой формулы φ системы Z(P) верна эквивалентность:*

$$Q \Vdash \phi \Leftrightarrow Z(N, P(Q)) \models \phi .$$

Доказательство. Рассматривается индукционный шаг, когда $\phi = \neg\phi_1$. Пусть $Q \Vdash \neg\phi_1$, тогда для любого $Q_1 \in S(Q)$ верно утверждение $\neg(Q_1 \Vdash \phi_1)$. По индукционному предположению, это эквивалентно $\neg(Z(N, P(Q_1) \models \phi_1)$. По условию $P(Q_1) = P(Q)$, поэтому верно утверждение $\neg(Z(N, P(Q) \models \phi_1)$. Тогда выполняется $Z(N, P(Q)) \models \neg\phi_1$, что и требовалось доказать. Обратно, пусть верно $Z(N, P(Q)) \models \neg\phi_1$, тогда выполняется $\neg(Z(N, P(Q)) \models \phi_1)$, и по индукционному предположению верно $\neg(Q \Vdash \phi_1)$. От противного, пусть верно $\neg(Q \Vdash \neg\phi_1)$, т.е. выполняется $(\exists Q' \in S(Q))(Q' \Vdash \phi_1)$. Отсюда следует, что верно $Z(N, P(Q')) \models \phi_1$. А так как $P(Q') = P(Q)$, то верно $Z(N, P(Q)) \models \phi_1$. Но это противоречит исходному предположению. Теорема доказана.

Следующее утверждение оправдывает термин «полное вынуждающее условие».

Следствие 1. *Если условие Q – полное для системы Z(P), то для любой замкнутой формулы φ системы Z(P) верно одно из отношений:*

$$Q \Vdash \phi \text{ или } Q \Vdash \neg\phi.$$

Доказательство. Пусть Q и φ удовлетворяют условию теоремы. Тогда верно одно из отношений: $Z(N, P(Q)) \models \phi$ или $Z(N, P(Q)) \models \neg\phi$. Отсюда по теореме 1 получается искомое утверждение.

Для полного условия Q отношение $Q \Vdash \phi$ согласовано с основными тавтологиями логики предикатов в следующем смысле.

Следствие 2. *Если условие Q – полное для системы Z(P), то имеют место следующие эквивалентности:*

1. $Q \Vdash \neg(\phi_1 \wedge \phi_2) \Leftrightarrow Q \Vdash (\neg\phi_1 \vee \neg\phi_2)$.
2. $Q \Vdash \neg(\phi_1 \vee \phi_2) \Leftrightarrow Q \Vdash (\neg\phi_1 \wedge \neg\phi_2)$.
3. $Q \Vdash \neg(\forall x)\phi_1(x) \Leftrightarrow Q \Vdash (\exists x)\neg\phi_1(x)$.
4. $Q \Vdash \neg(\exists x)\phi_1(x) \Leftrightarrow Q \Vdash (\forall x)\neg\phi_1(x)$.

Доказательство. Очевидно, что эти эквивалентности выполняются для отношения истинности в $Z(N, P(Q))$. Тогда по теореме 1 они имеют место и для отношения $Q \Vdash \phi$.

2. Общепринятость суждений и парадоксальные ситуации. Таким образом, если условие Q – полное для системы $Z(P)$, то отношение $Q \Vdash \phi$ совпадает с истинностью φ в $Z(N, P(Q))$. Но если Q не является полным для $Z(P)$, то вынуждаемая им формула не обязана быть истинной в $Z(N, P(Q))$. Тогда возможна следующая парадоксальная ситуация.

Согласно (3) вынуждающие условия $Q \in S(\varnothing)$ полностью определяют значения предиката $P(x)$ в соответствующих моделях. Кроме того, условие $\varnothing$ совместно с каждым вынуждающим условием Q. Поэтому, согласно принятой здесь интерпретации форсинга, можно считать, что отношение $\varnothing \Vdash \phi$ согласовано с положительным мнением всех экспертов данного сообщества о суждении, описываемом формулой φ. Другими словами, это суждение φ является *общепринятым*. Но если $\varnothing$ не является полным условием, то отношение $\varnothing \Vdash \phi$ не обязано совпадать с истинностью φ, и потому может найтись вынуждающее условие Q_0 такое, что верно $Q_0 \Vdash \neg\phi$. Содержательно это означает, что, несмотря на общепринятость суждения φ, существует эксперт, который считает верным отрицание этого суждения. Следующие примеры описывают такие парадоксальные ситуации.

Пример 1. Пусть N_0 – конечное подмножество N, и n_0 – наибольший элемент N_0. Для каждого вынуждающего условия Q определяются следующие расширяющие его вынуждающие условия Q' :

$$Q' = Q \cup \{P'(m_1), \dots, P'(m_k)\} \cup \cup\{\neg P(n_1), \dots, \neg P(n_l)\}, \tag{5}$$

где $\{m_1, \dots, m_k\} \subseteq N_0$ и числа $n_1, \dots, n_l$ не принадлежат N_0, а запись $P'(m)$ обозначает формулу $P(m)$ или $\neg P(m)$.

Далее, пусть по определению $\phi(n)$=$\forall m(P(m) \rightarrow \rightarrow m \le n)$ и $A(n)$=$(n = n_0 \rightarrow \phi(n))$. Считается, что условие Q *совместно с формулой* $\varphi(n_0)$, если существует множество $M \subseteq N$, интерпретирующее символ $P(x)$, и такое, что все формулы из Q и формула $\varphi(n_0)$ истинны в $Z(N, M)$.

Для каждого Q множество $S(Q)$ определяется следующим образом:

Определение 3. 1) если Q совместно с $\varphi(n_0)$, то $S(Q)$ состоит из всех условий Q' вида (5), которые совместны с $\varphi(n_0)$;

2) если Q не совместно с $\varphi(n_0)$, то $S(Q)$ состоит из всех вынуждающих условий, расширяющих Q.

Лемма 5. *Множества* $S(Q)$ *удовлетворяют условиям* (1–3).

Доказательство. Пусть условие Q совместно с $\varphi(n_0)$, и $Q' \in S(Q)$, $Q'' \in S(Q')$. Тогда, согласно определению 3, Q' совместно с $\varphi(n_0)$, а это влечет совместность Q'' с $\varphi(n_0)$. Кроме того, легко видеть, что Q'' также имеет вид (5). Следовательно, $Q'' \in S(Q)$, и условие (1) доказано. Аналогично доказывается остальная часть леммы.

Пустое условие $\varnothing$ является совместным с $\varphi(n_0)$. Действительно, пусть предикатный символ $P(x)$, интерпретируется множеством N_0. Тогда, в силу выбора числа n_0, формула $\varphi(n_0)$ является истинной в $Z(N, N_0)$, что и требовалось доказать.

Отношение вынуждения такое же, как в определении 1. Тогда верны следующие утверждения.

Теорема 3. а) $\varnothing \Vdash \forall n A(n)$.

б) $\{P(n_0+1)\} \Vdash \neg A(n_0)$.

Доказательство. а) Доказываемое отношение преобразуется к виду:

$$(\forall n \in N)(\exists Q \in S(\varnothing))(Q \Vdash \neg n = n_0 \vee Q \Vdash \phi(n)).$$

Случай 1. Пусть $\neg n = n_0$, тогда в качестве условия Q можно взять $\varnothing$ и показать, что верно отношение $\varnothing \Vdash \neg n = n_0$.

Случай 2. Пусть $n = n_0$, тогда рассматривается условие $Q_1 = \{ P(m) / m \in N_0\}$. По построению верны отношения $P(Q_1) = N_0$ и $Z(N, N_0) \models \phi(n_0)$, поэтому $Q_1 \in S(\varnothing)$. Кроме того, согласно определению 3, для каждого $Q' \in S(Q_1)$ верно равенство $P(Q') = N_0$. Следовательно, Q_1 является полным для $Z(P)$, и по теореме 1 верно $Q_1 \Vdash \phi(n_0)$. Первое утверждение теоремы доказано.

б) Пусть $Q_0 = \{n_0+1\}$, тогда утверждение $Q_0 \Vdash \neg A(n_0)$ эквивалентно $(\forall Q \in S(Q_0))$ $(\neg Q \Vdash \neg n_0 = n_0 \wedge \neg Q \Vdash \phi(n_0))$. Так как $n_0 = n_0$ – истинная арифметическая формула, то по лемме 1 утверждение $\neg Q \Vdash \neg n_0 = n_0$ выполняется для любого Q. Далее утверждение $\neg Q \Vdash \phi(n_0)$ эквивалентно $(\exists m)(\forall Q' \in S(Q))(\neg Q' \Vdash P(m) \wedge \neg Q' \Vdash m \le n_0)$. Здесь при $m = n_0+1$ оба члена конъюнкции выполняются, следовательно, утверждение $\neg Q \Vdash \phi(n_0)$ верное. Второе утверждение теоремы доказано.

Парадоксальность этой теоремы в том, что содержательно она означает следующее. Все эксперты данного сообщества согласны с утверждением, что n_0 есть наибольшее число, удовлетворяющее предикату $P(x)$. Тем не менее некий эксперт считает, что n_0 не является таковым.

В следующем примере определяется форсинг, в котором возникает похожая парадоксальная ситуация, связанная с квантором существования.

Пример 2. Пусть N_0 – конечное подмножество N, при этом $0 < \min N_0$, и пусть $\psi(n) = \forall m(P(m) \to \to n < m)$ и $B(n) = (n = 0 \wedge \psi(n))$.

Для каждого Q множество $S(Q)$ определяется следующим образом.

Определение 4. 1) если Q совместно с $\psi(0)$, то $S(Q)$ состоит из всех вынуждающих условий Q' вида (5), которые совместны с $\psi(0)$;

2) если Q несовместно с $\psi(0)$, то $S(Q)$ состоит из всех вынуждающих условий, расширяющих Q.

Как и в примере 1, доказывается, что множества $S(Q)$ удовлетворяют соотношениям (1–3) и что $\varnothing$ совместно с $\psi(0)$.

Отношение $Q \Vdash \phi$ такое же, как в примере 1. Тогда верны следующие утверждения.

Теорема 4. а) $\varnothing \Vdash B(0)$.

б) $\{P(0)\} \Vdash \neg \exists n B(n)$.

Доказательство. а) Доказываемое отношение преобразуется к виду:

$$(\exists Q' \in S(\varnothing))(Q' \Vdash 0 = 0) \wedge (\exists Q'' \in S(\varnothing))(Q'' \Vdash \psi(0)).$$

Формула 0 = 0 – истинная арифметическая формула, поэтому первое соотношение этой конъюнкции верное. Для второго соотношения в качестве Q'' можно взять Q_1 из примера 1 и аналогичными рассуждениями доказать отношение $Q'' \Vdash \psi(0)$. Первое утверждение теоремы доказано.

б) Пусть $Q_0 = \{0\}$, тогда отношение $Q_0 \Vdash \neg \exists n B(n)$ эквивалентно $(\forall Q_1 \in S(Q_0))(\neg Q_1 \Vdash n = 0) \vee \vee (\forall Q_2 \in S(Q_0))(\neg Q_2 \Vdash \psi(n))$ для каждого числа n. Если верно $\neg n = 0$, то первое соотношение дизъюнкции выполняется для любых условий Q_1. Поэтому пусть верно $n = 0$, тогда второе соотношение дизъюнкции эквивалентно формуле: $(\forall Q_2 \in S(Q_0))(\exists m)(\forall Q' \in S(Q_2))(\neg Q' \Vdash \neg P(m) = 0) \wedge \wedge (\neg Q' \Vdash 0 < m))$. Теперь, аналогично соответствующим рассуждениям теоремы 3, доказывается, что эта формула верна при любом $Q_2 \in S(Q_0)$ и $m = 0$. Теорема доказана.

Парадоксальность этой теоремы в следующем. Содержательно она означает, что все эксперты данного сообщества согласны с утверждением, что число 0 меньше всех чисел, удовлетворяющих предикату $P(x)$. Тем не менее некий эксперт считает, что вообще не существует чисел, обладающих таким же свойством.

Парадоксальные ситуации, описанные в примерах 1 и 2, означают, что построенные в них отношения вынуждения не совпадают с отношением истинности. И в данном случае причина возникновения подобных ситуаций в конечности определяемого предиката $P(x)$. Содержательно это можно пояснить так. Пусть для всех экспертов данного сообщества предикат $P(x)$ интерпретируется конечным множеством N_0, тогда их мнения согласованы с утверждениями $\forall nA(n)$ и $B(0)$ из примеров 1 и 2 соответственно. Но если некоторый эксперт считает, что предикат $P(x)$ верен для каких-то чисел, не входящих в N_0, то, по его мнению, указанные утверждения не обязаны выполняться. Именно эти ситуации смоделированы в примерах 1 и 2.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность Николаю Васильевичу Белякину за высказывание основных идей этой работы.

Библиографический список

1. Коэн П.Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза. – М., 1969.

2. Ганов В.А., Дегтерева Р.В. Различные варианты нестандартного форсинга // Материалы XII региональной конференции по математике. – Барнаул, 2009.