УДК 514.75

М.А. Чешкова

К геометрии циклид Дюпена, имеющих n различных главных кривизн в евклидовом пространстве E^{n+1}

M.A. Cheshkova

Dupen Cyclides Geometry which has n Principal Curvatures in Euclidean Space E^{n+1}

Гиперповерхность в евклидовом пространстве E^{n+1} называется циклидой Дюпена, если она имеет главные кривизны, постоянные вдоль соответствующих главных распределений. В предлагаемой статье изучается циклида Дюпена в евклидовом пространстве E^{n+1}, имеющая n различных главных кривизн.

Ключевые слова: циклиды Дюпена, коническое сечение, эксцентриситет.

The hypersurface in Euclidean space E^{n+1} is called Dupen cyclide if it has principal curvatures constant along appropriate principal distributions. The present paper studies Dupen cyclide in Euclidean space E^{n+1} which has n principal curvatures.

Key words: cyclide Dupin, cone, eccentricity.

Рассмотрим в евклидовом пространстве E^{n+1} циклиду Дюпена M [1–7] – гиперповерхность, у которой главные кривизны k_i постоянны вдоль соответствующих им главных направлений X_i. Случай, когда гиперповерхность имеет две главные кривизны, рассмотрен в [2, 4–7], три главные кривизны – в [3]. Примером таких поверхностей являются циклиды Дюпена в E^3 [5].

Известно, что у циклиды Дюпена в E^3 линии кривизны есть окружности, фокусы $f_i = r + \frac{1}{k_i}n$ конгруэнции нормалей n, где r – радиус-вектор текущей точки поверхности, описывает фокальные кривые второго порядка либо прямую и окружность [5, с. 382], а плоскости окружностей кривизны одного семейства проходят через фиксированную прямую либо параллельны (теорема Маннгейма) [4].

В предлагаемой работе исследуется гиперповерхность M, имеющая n различных, не равных нулю главных кривизн, причем линии кривизны образуют голономную сеть.

Доказаны следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Если циклида Дюпена имеет голономную сеть линий кривизны, то линии кривизны S^i есть окружности.*

Обозначим через f^i_j линию, которую опишет фокус f_j вдоль i-той линии кривизны.

ТЕОРЕМА 2. *Если окружность S^i не есть нормальное сечение, то линии $f^i_j, j = 1, ..., n, j \neq i$ – сечения конуса K^i с вершиной f_i, направляющей S^i. Если окружность S^i – нормальное сечение, то линии $f^i_j, j = 1, ..., n, j \neq i$ – прямые.*

ТЕОРЕМА 3. *Директрисы конических сечений f^i_j, f^j_i, не являющихся окружностями и прямыми, ортогональны.*

ТЕОРЕМА 4. *Если конусы K^i, K^j принадлежат 3-пространству, то эксцентриситеты e^j_i, e^i_j конических сечений f^j_i, f^i_j, отличных от прямой и окружности, связаны соотношением $e^i_j \times e^j_i = 1$.*

ТЕОРЕМА 5 (обобщенная теорема Маннгейма). *Если коническое сечение f^i_j – не окружность и не прямая, то плоскости окружностей S^i кривизны вдоль j-той линии кривизны образуют пучок, ось которого параллельна директрисе кривой f^i_j.*

1. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ. Рассмотрим гладкую гиперповерхность M в евклидовом пространстве E^{n+1}.

Обозначим $F(M)$ – R-алгебру дифференцируемых на M функций; T^q_s – F-модуль дифференцируемых на M тензорных полей типа (q, s); $\chi(M)$ – алгебру Ли векторных полей на M, ∂ – дифференцирование; $<,>$ – скалярное произведение в E^n.

Формулы Гаусса-Вейнгартена гиперповерхности M имеют вид [8, с. 36]

$$\begin{aligned} \partial_X Y &= \nabla_X Y + \gamma(X, Y)n, \\ \partial_X n &= -AX, \end{aligned} \tag{1}$$

где $A \in T^1_1(M)$, $X, Y \in \chi(M)$, $\gamma \in T^0_2(M)$, $\gamma(X, Y) = g(AX, Y)$ – вторая фундаментальная форма; A – оператор Вейнгартена; ∇– связность Леви-Чивита метрики $g(X,Y) = <X,Y>$.

Выполняются уравнения Гаусса-Кодацци

$$\begin{aligned} &R(X,Y)Z = \gamma(Y,Z)AX - \gamma(X,Z)AY, \\ &dA(X,Y) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$ тензор кривизны связности ∇, $dA(X,Y) = \nabla_X AY - \nabla_Y AX - A[X,Y]$ – внешний дифференциал поля A в связности ∇.

Обозначим через X_i орты главных направлений, k_i – главные кривизны. Тогда $AX_i = k_iX_i$. Рассмотрим $dA(X_i,X_j) = 0, i \neq j$.

Имеем

$$dA(X_i,X_j) = \nabla_{X_i}AX_j - \nabla_{X_j}AX_i -$$

$$A[X_i,X_i] = (X_ik_j)X_j + k_j\nabla_{X_i}X_j - (X_jk_i)X_i -$$

$$k_i\nabla_{X_j}X_i - k_i(\nabla_{X_i}X_j - \nabla_{X_j}X_i)^i -$$

$$k_j(\nabla_{X_i}X_j - \nabla_{X_j}X_i)^j - k_s(\nabla_{X_i}X_j - \nabla_{X_j}X_i)^s = 0,$$

где Z^j j-тая составляющая поля Z.

Приравнивая нулю различные составляющие, имеем

$$(\nabla_{X_i}X_j)^i = \frac{X_jk_i}{k_j - k_i}X_i, i \neq j, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &(k_j - k_s)(\nabla_{X_i}X_j)^s - (k_i - k_s)(\nabla_{X_j}X_i)^s = 0, \\ &i \neq j, s \neq i,j. \end{aligned} \tag{4}$$

Потребуем голономность сети, т.е. потребуем, чтобы каждое $(n-1)$-распределение, определяемое $n-1$ главными направлениями, было инволютивное. Тогда [9, с. 19]

$$[X_i,X_j]^s = 0, i \neq j, s \neq i,j.$$

Имеем

$$\begin{aligned} &(\nabla_{X_i}X_j)^s - (\nabla_{X_j}X_i)^s = 0, \\ &i \neq j, s \neq i,j. \end{aligned} \tag{5}$$

При $k_i \neq k_j$ из (4), (5) получим

$$(\nabla_{X_i}X_j)^s = 0, s \neq i,j, i \neq j.$$

Так как X_i орты, то $(\nabla_{X_i}X_j)^j = 0, i \neq j$.

Таким образом,

$$\nabla_{X_i}X_j = \Gamma_{ji}X_i, \Gamma_{ji} = \frac{X_jk_i}{k_j - k_i}, i \neq j. \tag{6}$$

Дифференцируя равенства $< X_i, X_j >= 0$ вдоль X_i, получим

$$\nabla_{X_i}X_i = -\sum_{s\neq i}\Gamma_{si}X_s. \tag{7}$$

Рассмотрим уравнения Гаусса (2) $R(X_j,X_i)X_i = k_ik_jX_j, i \neq j$, используя (6), (7).

Имеем

$$R(X_j,X_i)X_i = \nabla_{X_j}\nabla_{X_i}X_i - \nabla_{X_i}\nabla_{X_j}X_i -$$

$$\nabla_{\nabla_{X_j}X_i}X_i + \nabla_{\nabla_{X_i}X_j}X_i =$$

$$\nabla_{X_j}(-\sum_{s\neq i}\Gamma_{si}X_s) - \nabla_{X_i}\Gamma_{ij}X_j -$$

$$\Gamma_{ij}\nabla_{X_j}X_i + \Gamma_{ji}\nabla_{X_i}X_i =$$

$$-\sum_{s\neq i}(X_j\Gamma_{si})X_s - \sum_{s\neq i,j}\Gamma_{si}\Gamma_{sj}X_j -$$

$$\Gamma_{ji}(-\sum_{s\neq i,j}\Gamma_{sj}X_s) - (X_i\Gamma_{ij})X_j -$$

$$\Gamma_{ij}\Gamma_{ji}X_i - (\Gamma_{ij})^2X_j -$$

$$\Gamma_{ji}\sum_{s\neq i}\Gamma_{si}X_s = k_ik_jX_j.$$

Откуда

$$X_j\Gamma_{si} = \Gamma_{ji}(\Gamma_{sj} - \Gamma_{si}), \tag{8}$$

i, j, s – разные,

$$\begin{aligned} &X_j\Gamma_{ji} + X_i\Gamma_{ij} + (\Gamma_{ij})^2 + (\Gamma_{ji})^2 + \\ &\sum_{s\neq i,j}\Gamma_{si}\Gamma_{sj} + k_ik_j = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Равенства $R(X_i,X_j)X_k = 0$, когда i,j,k – разные, не дают дополнительных соотношений.

Так как M – циклида Дюпена, то $X_ik_i = 0$.

Применим операцию скобки $X_iX_jk_j - X_jX_ik_j - [X_i,X_j]k_j = 0$.

Так как

$$[X_i,X_j] = \nabla_{X_i}X_j - \nabla_{X_j}X_i = \Gamma_{ji}X_i - \Gamma_{ij}X_j,$$

получим $X_jX_ik_j = -\Gamma_{ji}X_ik_j$.

Дифференцируем равенства $\Gamma_{ij} = \frac{X_ik_j}{k_i - k_j}$ вдоль X_j.

Имеем

$$X_j\Gamma_{ij} = 0, i \neq j. \tag{10}$$

Кроме того, дифференцируя (9) вдоль X_i, получим

$$\begin{aligned} &X_iX_i\Gamma_{ij} = -\Gamma_{ij}(\Gamma_{ij}^2 + \Gamma_{ji}^2 + \\ &+ \sum_{s\neq i,j}\Gamma_{si}^2 + k_i^2 + 3X_i\Gamma_{ij}). \end{aligned} \tag{11}$$

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Обозначим через r радиус-вектор точки $m \in M$, $f_i = r + \frac{1}{k_i}n$.

Так как $\partial_{X_i} f_i = 0$, то следует, что нормали гиперповерхности M вдоль интегрального многообразия S^i распределения X_i „проходят через неподвижную точку f_i.

Таким образом, S^i принадлежит гиперсфере радиуса $R_i = |\frac{1}{k_i}|$.

Покажем, что S^i есть окружность.

Соприкасающаяся плоскость π^i к S^i определяется векторами $X_i, t^i = \partial_{X_i} X_i$.

Имеем в силу (1), (7)

$$\partial_{X_i} X_i = \nabla_{X_i} X_i + k_i n = -\sum_{s \neq i} \Gamma_{si} X_s + k_i n.$$

А так как в силу (1), (10)

$$\partial_{X_i} t^i = -(\sum_{s \neq i} \Gamma_{si}^2) X_i,$$

то π^i постоянна.

Следовательно, S^i принадлежит гиперсфере и 2-плоскости π^i, т.е. S^i – окружность.

$$\pi^i(S^i) = \{X_i, -\sum_{s \neq i} \Gamma_{si} X_s + k_i n\}. \qquad (12)$$

Центр C_i окружности S^i имеет вид

$$C_i = r + \frac{1}{\rho_i^2} t^i, \quad \rho_i^2 = \sum_{s \neq i} \Gamma_{si}^2 + k_i^2. \qquad (13)$$

Действительно, $X_i \rho = 0, t^i \perp X_i$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Если окружность S^i не есть нормальное сечение, то линии $f_j^i, j = 1, ..., n, j \neq i$ расположены на конусе K^i с вершиной f_i, направляющей S^i. Докажем, что f_j^i – плоская линия. Имеем $f_j = r + \frac{1}{k_j} n$.

$$\partial_i f_j = X_i - \frac{X_i k_j}{(k_j)^2} n - \frac{k_i}{k_j} X_i =$$

$$\frac{k_j - k_i}{(k_j)^2}(k_j X_i + \Gamma_{ij} n).$$

$t_j^i = k_j X_i + \Gamma_{ij} n$ – касательный вектор к f_j^i.

$$\partial_i t_j^i = -\Gamma_{ij} k_j X_i - k_j \sum_{s \neq i} \Gamma_{si} X_s +$$

$$k_i k_j n + (X_i \Gamma_{ij}) n.$$

Если $\Gamma_{ij} \neq 0$, то

$$\partial_i t_j^i = \frac{X_i \Gamma_{ij}}{\Gamma_{ij}} t_j^i -$$

$$k_j((\frac{X_i \Gamma_{ij}}{\Gamma_{ij}} + \Gamma_{ij}) X_i - k_i n + \sum_{s \neq i} \Gamma_{si} X_s).$$

Обозначим

$$T_j^i = (\frac{X_i \Gamma_{ij}}{\Gamma_{ij}} + \Gamma_{ij}) X_i - k_i n + \sum_{s \neq i} \Gamma_{si} X_s. \qquad (14)$$

Так как, в силу (6), (7), (10), (11),

$$\partial_i T_j^i = -(\frac{X_i \Gamma_{ij}}{\Gamma_{ij}} + \Gamma_{ij}) T_j^i,$$

то следует, что соприкасающаяся $\pi(f_j^i)$ плоскость к f_j^i, определяемая векторами t_j^i, T_j^i, постоянна, т.е. $f_j^i, j = 1, ..., n, j \neq i$ – конические сечения.

Имеем

$$\pi(f_j^i) = \{k_j X_i + \Gamma_{ij} n, \quad (\frac{X_i \Gamma_{ij}}{\Gamma_{ij}} + \Gamma_{ij}) X_i - k_i n + \sum_{s \neq i} \Gamma_{si} X_s\}. \qquad (15)$$

Если $\Gamma_{ij} = 0$, то из (6) следует $X_i k_j = 0$. Таким образом, $t_j^i = k_j X_i, \partial_i t_j^i = -k_j(\sum_{s \neq i} \Gamma_{si} X_s - k_i n)$, т.е. плоскости $\pi(S^i), \pi(f_j^i)$ параллельны, а f_j^i – окружность.

Если окружность S^i – нормальное сечение, то из (12) следует, что $\Gamma_{ji} = 0, \Gamma_{si} = 0, s = 1, ..., n, s \neq i, j$. Используя (9), получим $X_i \Gamma_{ij} = -\Gamma_{ij}^2 - k_i k_j$.

Имеем $\partial_i t_j^i = -\Gamma_{ij} k_j X_i + k_i k_j n + (X_i \Gamma_{ij}) n = -\Gamma_{ij} t_j^i$, т.е. линии $f_j^i, j = 1, ..., n, j \neq i$ – прямые.

Замечание. Так как каждое $(n-1)$-распределение

$$\delta_j(m) = (X_1, ..., X_{j-1}, X_{j+1}, ..., X_n)_m, m \in M$$

инволютивное, то вдоль интегрального многообразия распределения $\delta_j(m)$ точка f_j опишет $(n-1)$-поверхность. Таким образом, гиперповерхность M является одновременно n раз огибающей семейства гиперсфер, центры которых описывают n $(n-1)$-поверхностей (f_j), т.е. гиперповерхность M есть n раз каналовая.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Рассмотрим вектор

$$T_j^i = (\frac{X_i \Gamma_{ij}}{\Gamma_{ij}} + \Gamma_{ij}) X_i - k_i n + \sum_{s \neq i} \Gamma_{si} X_s,$$

параллельный плоскости $\pi(f_j^i)$ конического сечения f_j^i. Замечаем, что он параллелен также плоскости $\pi(S^i)$ основания конуса K^i. А так как директриса конического сечения параллельна прямой пересечения плоскости этого сечения и плоскости основания конуса, то следует, что T^i_j определяет направление директрисы кривой f^i_j.

Представим T^i_j в виде

$$T^i_j = (\frac{X_i\Gamma_{ij}}{\Gamma_{ij}} + \Gamma_{ij})X_i - k_i n +$$

$$\sum_{s\neq i,j} \Gamma_{si}X_s + \Gamma_{ji}X_j.$$

В силу (9) имеем $< T^i_j, T^j_i >= 0$, т.е. директрисы конических сечений f^i_j, f^j_i, не являющихся окружностями и прямыми, ортогональны.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Обозначим через α угол, образованный плоскостью $\pi(f^i_j)$, содержащей f^i_j, с плоскостью $\pi(S^i)$ основания конуса K^i, а через β – угол, образованный образующей конуса n с плоскостью основания $\pi(S^i)$.

Определим эксцентриситет e^i_j для конического сечения f^i_j [10, с. 227]

$$e^i_j = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Так как $\pi(S^i), \pi(f^i_j)$ принадлежат 3-пространству $E^3 = \{X_i, \sum_{s\neq i}\Gamma_{si}X_s, n\}$, то нормали N^i, N^i_j к $\pi(S^i), \pi(f^i_j)$ принадлежащие E^3, имеют вид

$$N^i = k_i\sum_{s\neq i}\Gamma_{si}X_s + \sum_{s\neq i}(\Gamma^2_{si})n, \tag{16}$$

$$\begin{aligned} N^i_j = -\Gamma_{ij}\sum_{s\neq i}(\Gamma^2_{si})X_i + k_j\sum_{s\neq i}(\Gamma^2_{si})n+ \\ (X_i\Gamma_{ij} + \Gamma^2_{ij} + k_ik_j)\sum_{s\neq i}\Gamma_{si}X_s. \end{aligned} \tag{17}$$

Имеем

$$\sin\beta = \cos(\frac{\pi}{2} - \beta) = \frac{< N^i, n >}{|N^i|},$$

$$\cos\alpha = \frac{< N^i, N^i_j >}{|N^i||N^i_j|},$$

$$< N^i_j, N^i >= (X_i\Gamma_{ij} + \Gamma^2_{ij} +$$

$$+k_ik_j)k_i\sum_{s\neq i}\Gamma^2_{si} + k_j(\sum_{s\neq i}\Gamma^2_{si})^2,$$

$$|N^i|^2 = k^2_i\sum_{s\neq i}\Gamma^2_{si} + (\sum_{s\neq i}\Gamma^2_{si})^2,$$

$$|N^i_j|^2 = (\Gamma^2_{ij} + k^2_j)(\sum_{s\neq i}\Gamma^2_{si})^2 +$$

$$(X_i\Gamma_{ij} + \Gamma^2_{ij} + k_ik_j)^2\sum_{s\neq i}\Gamma^2_{si}.$$

$$cos^2\alpha =$$

$$\Big((k_i(X_i\Gamma_{ij} + \Gamma^2_{ij} + k_ik_j) + k_j\sum_{s\neq i}\Gamma^2_{si})^2\Big)\Big/$$

$$\Big((k^2_i + \sum_{s\neq i}\Gamma^2_{si})((X_i\Gamma_{ij} + \Gamma^2_{ij} + k_ik_j)^2 +$$

$$(k^2_j + \Gamma^2_{ij})\sum_{s\neq i}\Gamma^2_{si})\Big),$$

$$\sin^2\alpha =$$

$$\Big(\sum_{s\neq i}\Gamma^2_{si}((X_i\Gamma_{ij} + \Gamma^2_{ij})^2 + \Gamma^2_{ij}(k^2_j + \sum_{s\neq i}\Gamma^2_{si}))\Big)\Big/$$

$$\Big((k^2_i+\sum_{s\neq i}\Gamma^2_{si})((X_i\Gamma_{ij}+\Gamma^2_{ij}+k_ik_j)^2+(k^2_j+\Gamma^2_{ij})\sum_{s\neq i}\Gamma^2_{si})\Big),$$

$$\sin^2\beta = \frac{\sum_{s\neq i}\Gamma^2_{si}}{k^2_i + \sum_{s\neq i}\Gamma^2_{si}}.$$

Итак,

$$(e^i_j)^2 = \Big((X_i\Gamma_{ij} + \Gamma^2_{ij})^2 + \Gamma^2_{ij}(k^2_j + \sum_{s\neq i}\Gamma^2_{si})\Big)\Big/$$

$$\Big((X_i\Gamma_{ij} + \Gamma^2_{ij} + k_ik_j)^2 + (k^2_j + \Gamma^2_{ij})\sum_{s\neq i}\Gamma^2_{si}\Big).$$

Если конусы $K^i, K^j, i \neq j$ принадлежат 3-пространству $E^3 = (X_i, X_j, n)$, то

$$\Gamma_{si} = 0, \Gamma_{sj} = 0, s = 1, ..., n, s \neq i, j.$$

Используя (10), получим

$$e^i_j = \sqrt{(X_i\Gamma_{ij} + \Gamma^2_{ij})^2 + \Gamma^2_{ij}(k^2_j + \Gamma^2_{ji})}\Big/$$

$$\sqrt{(X_i\Gamma_{ij} + \Gamma^2_{ij} + k_ik_j)^2 + (k^2_j + \Gamma^2_{ij})\Gamma^2_{ji}},$$

$$e^i_j = \sqrt{(X_i\Gamma_{ij} + \Gamma^2_{ij})^2 + \Gamma^2_{ij}(k^2_j + \Gamma^2_{ji})}\Big/$$

$$\sqrt{(X_j\Gamma_{ji} + \Gamma^2_{ji})^2 + \Gamma^2_{ji}(k^2_i + \Gamma^2_{ij})}.$$

Таким образом, $e^i_j \times e^j_i = 1$.
Так как в этом случае векторы

$$N^i_j = -\Gamma_{ij}\Gamma_{ji}X_i + k_j\Gamma_{ji}n +$$

$$(X_i\Gamma_{ij} + \Gamma^2_{ij} + k_ik_j)X_j,$$

$$N^j_i = -\Gamma_{ji}\Gamma_{ij}X_j + k_i\Gamma_{ij}n +$$

$$(X_j\Gamma_{ji} + \Gamma_{ji}^2 + k_j k_i)X_i$$

в силу (10) ортогональны, то плоскости $\pi(f_j^i), \pi(f_i^j)$ конических сечений f_j^i, f_i^j пересекаются по прямой ортогонально.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Если кривая f_j^i не окружность, то $\Gamma_{ij} \neq 0$. Рассмотрим вектор $T_j^i = (\frac{X_i\Gamma_{ij}}{\Gamma_{ij}} + \Gamma_{ij})X_i - k_i n + \sum_{s\neq i}\Gamma_{si}X_s$, параллельный плоскости окружности S^i и параллельный директрисе кривой f_j^i.

Имеем, используя (6), (7), (10)

$$\partial_{X_j}T_j^i = \frac{X_j X_i \Gamma_{ij}}{\Gamma_{ij}}X_i +$$

$$(\frac{X_i\Gamma_{ij}}{\Gamma_{ij}} + \Gamma_{ij})\Gamma_{ij}X_j +$$

$$\sum_{s\neq i,j}(X_j\Gamma_{si})X_s + (X_j\Gamma_{ji})X_j +$$

$$\sum_{s\neq i,j}\Gamma_{si}\Gamma_{sj}X_j + \Gamma_{ji}(-\sum_{s\neq j}\Gamma_{sj}X_s + k_j n) -$$

$$\Gamma_{ji}(k_j - k_i)n + k_i k_j X_j.$$

Так как

$$X_j X_i \Gamma_{ij} = X_i X_j \Gamma_{ij} + \nabla_{X_j}X_i\Gamma_{ij} -$$

$$\nabla_{X_i}X_j\Gamma_{ij} = -\Gamma_{ji}X_i\Gamma_{ij},$$

то в силу (8), (11) получим

$$\partial_{X_j}T_j^i = -\Gamma_{ji}T_j^i.$$

Рассмотрим точку

$$P = r - \frac{1}{\Gamma_{ij}}X_i,$$

принадлежащую $\pi(S^i)$.

Имеем, используя (1), (6), (10)

$$\partial_{\mathrm{X}_j}P = X_j - \frac{1}{\Gamma_{ij}}(\nabla_{X_j}X_i + \gamma(X_i X_j)n) = 0.$$

Таким образом, при $\Gamma_{ij} \neq 0$ плоскости $\pi(S^i)$ вдоль j-той линии кривизны имеют общую прямую

$$d_j^i = \{P, (\frac{X_i\Gamma_{ij}}{\Gamma_{ij}} + \Gamma_{ij})X_i - k_i n + \sum_{s\neq i}\Gamma_{si}X_s\},$$

которая параллельна директрисе конического сечения f_j^i.

Библиографический список

1. Pinkal U. Dupinsche huperflachen in E^4 // Manuscripta math. – 1985. – №51.
2. Cecil T.E., Ryan P.J. Conformal geometri and cyclides Dupin // Can. J. Math. – 1980. – Т. 32, №4.
3. Вяльяс М.Э., Лумисте Ю.Г. Изотермические гиперповерхности и трехмерные гиперциклиды Дюпена-Маннгейма // Мат. заметки. – 1987. – Т. 41, №5.
4. Лумисте Ю.Г. Конструкция Кэли-Каталана для некоторых гиперповерхностей Дюпена. // Уч. зап. Тартуского ун-та. – 1986.
5. Шуликовский В.И. Классическая дифференциальная геометрия. – М., 1963.
6. Чешкова М.А. Дважды каналовые гиперповерхности в евклидовом пространстве // Математический сборник. – 2000. – Т. 192, №6.
7. Голышева О.С. Примеры дважды каналовых гиперповерхностей в евклидовом пространстве E^n // Известия Алтайского государственного университета. – Барнаул, 1999. – №1.
8. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. – М., 1981. – Т. 2.
9. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. – М., 1981. – Т. 1.
10. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. – М., 1986. – Ч. 2.