УДК 517.946

А.Г. Петрова

О задаче Коши движения эмульсии в поле микроускорений и термокапиллярных сил

A.G. Petrova

On the Cauchy Problem for an Emulsion Moving under the Action of Microacceleration and Thermocapillary Forces

Данная работа посвящена исследованию задачи Коши для модели эмульсии, линеаризованной на простейших решениях, о которых шла речь выше. Используя преобразование Фурье по времени и пространственным переменным, удается доказать существование и единственность решения задачи в классе функций, суммируемых в квадрате вместе с квадратами производных, входящих в уравнения на множестве $R^3 \times [0,T]$ при условии, что начальные функции также суммируемы в квадрате вместе с квадратами соответствующих производных по всему пространству.

Ключевые слова: термокапиллярное движение, эмульсия, задача Коши, существование и единственность решения.

The paper is devoted to the study on Cauchy problem for emulsion model linearized on a simple solution mentioned above. Using Fourier transformation with respect to time and space variables the author proves the existence and uniqueness of solving the problem in the class of function summing up in squared with the appropriate derivatives raised to the second power in the set R3 [0, T] under the conditions that the initial functions are also summing up in squared with the appropriate derivatives raised to the second power over all space.

Key words: thermocapillary motion, Cauchy problem, existence and uniqueness of solution.

Математическая модель термокапиллярного движения эмульсии, предложенная В.В. Пухначевым и О.В. Воиновым в 1995 г. [1], представляет собой систему неопределенного типа, состоящую из девяти уравнений для определения концентрации дисперсной фазы, температуры смеси, векторов скоростей несущей и дисперсной фаз и общего давления. Простейшие решения, соответствующие однородному распределению дисперсных включений, исследовались на устойчивость в [2–4]. В случае одномерного движения эмульсии с плоскими волнами корректность постановки простейшей начально-краевой задачи рассматривалась в [5, 6]. Особенностью многомерного случая является, в частности, то, что не удается свести модель к классу систем, рассмотренных Вольпертом и Худяевым [7].

Данная работа посвящена исследованию задачи Коши для модели эмульсии, линеаризованной на простейших решениях, о которых речь шла выше. Используя преобразование Фурье по времени и пространственным переменным, удается доказать существование и единственность решения задачи в классе функций, суммируемых в квадрате вместе с квадратами производных, входящих в уравнения на множестве $R^3 \times [0,T]$ при условии, что начальные функции также суммируемы в квадрате вместе с квадратами соответствующих производных по всему пространству.

1. Уравнения модели и линеаризованные задачи.

Определяющими уравнениями модели являются [1]:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + div(c\mathbf{u}) = 0; \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial (1-c)}{\partial t} + div((1-c)\mathbf{v}) = 0; \qquad (1.2)$$

$$\rho_d c\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot)\nabla \mathbf{u}\right) + \rho_m(1-c)\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot)\nabla \mathbf{v}\right) =$$

$$= -\nabla p + div\left(\mu_m(1+cN)(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^*)\right) +$$

$$\rho_d c\mathbf{g} + \rho_m(1-c)\mathbf{g}; \qquad (1.3)$$

*Работа выполнена при поддержке аналитической ведомственной целевой программы "Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)", (проект № 2.2.2.4/4278).

$$\rho_d\lambda_d c\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\theta\right)+\rho_m\lambda_m(1-c)\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\theta\right)=$$

$$=div\left(k(c)\nabla\theta\right); \qquad (1.4)$$

$$\mathbf{u}-\mathbf{v}=K\mathbf{g}+L\nabla\theta. \qquad (1.5)$$

Здесь c, где $0<c<1$ – концентрация дисперсной фазы; θ – общая температура; $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ – осредненные скорости дисперсной и несущей фаз соответственно; p – давление. Индекс "d" будем использовать для обозначения параметров дисперсной фазы; "m" – несущей; ρ – плотность; μ – динамическая вязкость; λ – удельная теплоемкость; k – удельная теплопроводность; R – радиус сферических включений; σ_θ – производная с обратным знаком поверхностного натяжения по температуре;

$$N=\frac{\mu_m+5\mu_d/2}{\mu_m+\mu_d},\quad K=\frac{2R^2(\rho_d-\rho_m)(\mu_m+\mu_d)}{3\mu_m(2\mu_m+3\mu_d)};$$

$$L=\frac{2Rk_m\sigma_\theta}{(2\mu_m+3\mu_d)(2k_m+k_d)}.$$

Нелинейный коэффициент теплопроводности $k(c)$ имеет производную по своему аргументу, ограничен снизу и сверху соответственно $\min(k_d,k_m)$ и $\max(k_d,k_m)$ и пусть $|k'(c)|\le q$, где q – положительная константа.

В данной работе исследуется линеаризованная на простейших решениях многомерная модель. Рассматриваются две линейные системы. Первая является частным случаем второй, однако для упрощения громоздких выкладок вначале сосредоточим внимание именно на ней как более простой, затем отметим сложности и отличия, возникающие при рассмотрении второй системы. Сформулируем эти задачи.

Линейная задача 1.

Рассмотрим простейшее решение с нулевыми скоростями фаз, постоянной концентрацией c_0 и постоянным градиентом температуры, уравновешивающим силы плавучести: $L\nabla\theta_0+K\mathbf{g}=0$.

$$c=c_0,\ \mathbf{u}=0,\ \mathbf{v}=0,\ p=p_0=\nabla p_0\cdot\mathbf{x},$$

$$\theta_0=\nabla\theta_0\cdot\mathbf{x}+const,$$

где $\mathbf{g}=(g,0,0), c_0, \nabla\theta_0=-Kg/L, \nabla p_0=[\rho_d c_0+\rho_m(1-c_0)]\mathbf{g}=const.$

Отметим, что условия устойчивости такого решения исследовались в [3]. Линеаризуя систему (1.1)–(1.5) на этом решении, получим систему уравнений для определения функций $c,\mathbf{v},\mathbf{u},\theta,p$:

$$c_t+c_0 div\mathbf{u}; \qquad (1.6)$$

$$\frac{\partial(1-c)}{\partial t}+(1-c_0)\mathbf{v}=0; \qquad (1.7)$$

$$\rho_d c_0\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\rho_m(1-c_0)\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}=-\nabla p+\mu_m(1+c_0N)\triangle\mathbf{v}-$$

$$-c_0\mu_m(1+c_0N)\Delta(L\nabla\theta)+(\rho_d-\rho_m)c\mathbf{g}; \qquad (1.8)$$

$$\rho_d\lambda_d c_0\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\theta_0\right)+$$

$$\rho_m\lambda_m(1-c_0)\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\theta_0\right)=$$

$$=k(c_0)\triangle\theta+k'(c_0)\nabla\theta_0\cdot\nabla c; \qquad (1.9)$$

$$\mathbf{u}-\mathbf{v}=L\nabla\theta. \qquad (1.10)$$

Линейная задача 2.

Линеаризуем теперь нашу задачу на пространственно-однородном решении с ненулевыми скоростями. Это решение выглядит так [2]:

$$c=c_0,\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0,\ \mathbf{v}=\mathbf{v}_0,\ p=p_0=\nabla p_0\cdot\mathbf{x},$$

$$\theta=\theta_0=\nabla\theta_0\cdot\mathbf{x}+\theta_{0t}t, \qquad (1.11)$$

где $c_0,\nabla\theta_0=const,\ \nabla p_0=[\rho_d c_0+\rho_m(1-c_0)]\mathbf{g}=const.$

В силу галиллеевой инвариантности системы можно считать, что $\mathbf{v}_0=0$. Тогда

$$\theta_{0t}=-\frac{\rho_d\lambda_d c_0(Kg_1+L\nabla\theta_0)\cdot\nabla\theta_0}{\rho_d\lambda_d c_0+\rho_m\lambda_m(1-c_0)},$$

$$\mathbf{u}_0=K\mathbf{g}+L\nabla\theta_0.$$

Выберем систему координат так, чтобы

$$\nabla\theta_0=(G,0,0),\quad \mathbf{g}=(g_1,g_2,0),$$

тогда

$$\theta_{0t}=-\frac{\rho_d\lambda_d c_0(Kg_1+LG)G}{\rho_d\lambda_d c_0+\rho_m\lambda_m(1-c_0)},$$

$$\mathbf{u}_0=(Kg_1+LG,Kg_2,0). \qquad (1.12)$$

Линеаризованная на этом решении система выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial c}{\partial t}+c_0 div\mathbf{u}+\mathbf{u}_0\cdot\nabla c=0; \qquad (1.13)$$

$$\frac{\partial(1-c)}{\partial t}+(1-c_0)div\mathbf{v}=0; \qquad (1.14)$$

$$\rho_d c_0\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{u}_0\cdot\nabla\mathbf{u}\right)+\rho_m(1-c_0)\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}=$$

$$=-\nabla p+\mu_m(1+c_0N)\triangle\mathbf{v}-c_0\mu_m(1+c_0N)L\Delta\nabla\theta-$$

$$-\mu_m(1+c_0N)(\mathbf{u}_0\cdot\nabla)\nabla c+(\rho_d-\rho_m)c\mathbf{g}; \qquad (1.15)$$

$$\rho_d\lambda_d c_0\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}+\mathbf{u}_0\cdot\nabla\theta+\mathbf{u}\cdot\nabla\theta_0\right)+$$

$$+\rho_m\lambda_m(1-c_0)\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\theta_0\right)+$$

$$\rho_d\lambda_d c\left(\frac{\partial\theta_0}{\partial t}+\mathbf{u}_0\cdot\nabla\theta_0\right)-\rho_m\lambda_m c\frac{\partial\theta_0}{\partial t}=$$

$$=k(c_0)\triangle\theta+k'(c_0)\nabla\theta_0\cdot\nabla c; \qquad (1.16)$$

$$\mathbf{u}-\mathbf{v}=L\nabla\theta. \qquad (1.17)$$

Будем рассматривать задачу Коши для системы (1.6)–(1.10) и (1.13)–(1.17) во всем пространстве R^3.

2. Единственности решения задачи Коши для линейной системы 1.

Так же, как и при исследовании одномерной задачи [5, 6], для того чтобы "развязать" систему в главных членах, введем вспомогательные функции

$$\mathbf{R}=\nabla c+\nabla\theta\cdot F(c_0),\ \ \mathbf{U}=L\nabla\theta, \qquad (2.1)$$

где

$$F(c_0)=c_0(1-c_0)(\rho_d\lambda_d c_0+\rho_m\lambda_m(1-c_0))/k(c_0).$$

Для 11 функций $c,p,\mathbf{U},\mathbf{R},\mathbf{v}$ путем взятия градиента скалярных уравнений (1.6), (1.8) с учетом равенства смешанных производных, из которого следуют соотношения

$$rot\mathbf{R}=0,\ \ rot\mathbf{U}=0,$$

следовательно,

$$\nabla(\mathbf{g}\cdot\mathbf{R})=(\mathbf{g}\cdot\nabla)\mathbf{R},\ \ \nabla div\mathbf{U}=\mathbf{\Delta U},$$

получим следующую систему уравнений:

$$c_t=-c_0(1-c_0)div\mathbf{U};$$

$$div\mathbf{v}=-c_0 div\mathbf{U};$$

$$\mathbf{R}_t+\frac{F(c_0)k'(c_0)K}{\rho_d\lambda_d c_0+\rho_m\lambda_m(1-c_0)}(\mathbf{g}\cdot\nabla)\mathbf{R}=$$

$$F(c_0)K\nabla(\mathbf{g}\cdot\mathbf{v})+\frac{K(\rho_d\lambda_d c_0+k'(c_0)F(c_0))}{\rho_d\lambda_d c_0+\rho_m\lambda_m(1-c_0)}\nabla(\mathbf{g}\cdot\mathbf{U});$$

$$\rho_d c_0\Big(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t}\Big)+\rho_m(1-c_0)\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}=-\nabla p+$$

$$+\mu_m(1+c_0N)\mathbf{\Delta v}-c_0\mu_m(1+c_0N)\nabla\mathtt{div}\mathbf{U}+$$

$$(\rho_d-\rho_m)c\mathbf{g};$$

$$\rho_d\lambda_d c_0\left(\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t}+\nabla(\mathbf{v}-c_0U)\cdot\nabla\theta_0\right)+$$

$$+\rho_m\lambda_m(1-c_0)\left(\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t}+\nabla\mathbf{v}\cdot\nabla\theta_0\right)=$$

$$=k(c_0)\mathbf{\Delta U}+k'(c_0)\nabla\theta_0\cdot(\mathbf{R}-F(c_0)\mathbf{U}).$$

Введем соленоидальное поле скоростей

$$\mathbf{w}=\mathbf{v}+c_0L\nabla\theta \qquad (2.2)$$

и примем во внимание, что в выбранной системе координат $\mathbf{g}=(g_1,0,0),\nabla\theta_0=(-Kg_1,0,0)$. В итоге получим следующую систему уравнений для определения функций $c,p,\mathbf{U},\mathbf{R},\mathbf{w}$:

$$c_t=-c_0(1-c_0)div\mathbf{U}; \qquad (2.3)$$

$$div\mathbf{w}=0; \qquad (2.4)$$

$$\mathbf{R}_t+\frac{F(c_0)k'(c_0)K}{\rho_d\lambda_d c_0+\rho_m\lambda_m(1-c_0)}g_1\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x_1}=$$

$$=F(c_0)Kg_1\nabla w_1+F(c_0)Kg_1\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{(\rho_d\lambda_d-\rho_m\lambda_m)c_0(1-c_0)}{\rho_d\lambda_d c_0+\rho_m\lambda_m(1-c_0)}+\right.$$

$$\left.+\frac{k'(c_0)c_0(1-c_0)}{k(c_0)}\right)\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial x_1}; \qquad (2.5)$$

$$(\rho_d c_0+\rho_m(1-c_0))\mathbf{w}_t=-\nabla(p+$$

$$+(\rho_d-\rho_m)c_0(1-c_0)L\theta_t+2c_0\mu_m(1+c_0N)div\mathbf{U})+$$

$$+\mu_m(1+c_0N)\mathbf{\Delta w}-(\rho_d-\rho_m)c\mathbf{g}; \qquad (2.6)$$

$$(\rho_d\lambda_d c_0+\rho_m\lambda_m(1-c_0))\Big(\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t}-\nabla w_1Kg_1\Big)+$$

$$+Kg_1k'(c_0)L^{-1}\nabla R_1-\nabla U_1\Big((\rho_d\lambda_d-\rho_m\lambda_m)\cdot$$

$$\cdot c_0(1-c_0)+k'(c_0)F(c_0)L^{-1}\Big)=k(c_0)\triangle U. \qquad (2.7)$$

В уравнении (2.6)

$$L\theta_t=Kg_1w_1+Kg_1U_1\cdot$$

$$\cdot\frac{(\rho_d\lambda_d-\rho_m\lambda_m)c_0(1-c_0)+k'(c_0)F(c_0)}{(\rho_d\lambda_d c_0+\rho_m\lambda_m(1-c_0))}+$$

$$+\frac{k(c_0)}{(\rho_d\lambda_d c_0+\rho_m\lambda_m(1-c_0))}div\mathbf{U}-$$

$$-\frac{k'(c_0)Kg_1}{(\rho_d\lambda_d c_0+\rho_m\lambda_m(1-c_0))}R_1. \qquad (2.7')$$

Доказательство единственности решения задачи Коши для этой линейной системы проведем аналогично тому, как это делалось в одномерной начально-краевой задаче [5, 6]. Предполагая, что $c\in W_2^{1,1}(\Pi_T),p\in W_2^{1,0}(\Pi_T),\mathbf{R}\in\mathbf{W}_2^{1,1}(\Pi_T),\mathbf{U}\in\mathbf{W}_2^{1,2}(\Pi_T),\mathbf{w}$, где $\Pi_t=R^3\times[0,t]$

и все функции равны нулю в начальный момент времени, введем

$$Z(t) = \int\limits_0^t \Big(\|\mathbf{U}\|^2(t)+\|\mathbf{w}\|^2(t)+\|\mathbf{R}\|^2(t)+\|c\|^2(t)\Big)dt,$$

где

$$\|\mathbf{U}\|^2(t) = \int\limits_{R^3} (U_1^2 + U_2^2 + U_3^2)dx.$$

Умножим уравнение (2.3) на $2c(x,t)$ и проинтегрируем по $\Pi_t, t \in (0,T]$. Получим:

$$\int\limits_{R^3} c^2(t)dx = 2\int\limits_{\Pi_t} div(c\mathbf{U})dxdt - 2\int\limits_{\Pi_t} \mathbf{R}\cdot\mathbf{U}dxdt +$$

$$+2F(c_0)\int\limits_{\Pi_t} |\mathbf{U}|^2 dxdt.$$

В рассматриваемых классах функций интеграл по всему пространству от дивергенции обращается в силу теоремы Остроградского-Гаусса в ноль, следовательно, имеем:

$$\int\limits_{R^3} c^2(t)dx = -2\int\limits_{\Pi_t} \mathbf{R}\cdot\mathbf{U}dxdt + 2F(c_0)\int\limits_{\Pi_t} |\mathbf{U}|^2 dxdt. \tag{2.8}$$

Теперь умножим почленно скалярно уравнение (2.5) для $\mathbf{R}$ на $2\mathbf{R}$ и проинтегрируем по Π_t. Получим

$$\int\limits_{R^3} \mathbf{R}^2(t)dx = 2g_1F(c_0)K\int\limits_{\Pi_t} \nabla w_1\cdot\mathbf{R}dxdt + 2F(c_0)Kg_1\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{(\rho_d\lambda_d-\rho_m\lambda_m)c_0(1-c_0)}{\rho_d\lambda_d c_0+\rho_m\lambda_m(1-c_0)} + \frac{k'(c_0)c_0(1-c_0)}{k(c_0)}\right)\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{\Pi_t} \nabla U_1\cdot\mathbf{R}dxdt. \tag{2.9}$$

Проделаем то же самое с уравнением (2.6) для $\mathbf{w}$:

$$\int\limits_{R^3} \mathbf{w}^2(t)dx + 2\frac{\mu_m(1+c_0N)}{\rho_d c_0+\rho_m(1-c_0)}\int\limits_{\Pi_t}\sum_{i=1}^3 |\nabla w_i|^2 dx =$$

$$= \frac{2(\rho_d-\rho_m)g_1}{\rho_d c_0+\rho_m(1-c_0)}\int\limits_{\Pi_t} cw_1 dxdt. \tag{2.10}$$

Наконец, уравнение (2.7) умножим скалярно на $\mathbf{U}$:

$$\int\limits_{R^3} \mathbf{U}^2(t)dx + 2\frac{k(c_0)}{c_0\rho_d\lambda_d+(1-c_0)\rho_m\lambda_m}\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{\Pi_t}\sum_{i=1}^3 |\nabla U_i|^2 dxdt =$$

$$= 2\frac{((\rho_d\lambda_d-\rho_m\lambda_m)c_0(1-c_0)+k'(c_0)F(c_0)L^{-1})}{\rho_d\lambda_d c_0+\rho_m\lambda_m(1-c_0)}Kg_1\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{\Pi_t} \nabla U_1\cdot\mathbf{U}dxdt - 2\frac{k'(c_0)K}{\rho_d\lambda_d c_0+\rho_m\lambda_m(1-c_0)}\cdot$$

$$\cdot g_1\int\limits_{\Pi_t} \nabla R_1\cdot\mathbf{U}dxdt + 2Kg_1\int\limits_{\Pi_t} \nabla w_1\cdot\mathbf{U}dxdt. \tag{2.11}$$

Складывая уравнения (2.8)–(2.11) и принимая во внимание равенство

$$\int\limits_{R^3} \nabla R_1\cdot\mathbf{U}dx = -\int\limits_{R^3} R_1 div\mathbf{U}dx,$$

получим

$$\frac{dZ}{dt} + \frac{2\mu_m(1+c_0N)}{(\rho_d c_0+\rho_m(1-c_0))}\int\limits_{\Pi_t}\sum_{i=1}^3 |\nabla w_i|^2 dxdt +$$

$$+\frac{2k(c_0)}{c_0\rho_d\lambda_d+(1-c_0)\rho_m\lambda_m}\int\limits_{\Pi_t}\sum_{i=1}^3 |\nabla U_i|^2 dxdt =$$

$$-2\int\limits_{\Pi_t} \mathbf{R}\cdot\mathbf{U}dxdt + 2F(c_0)\int\limits_{\Pi_t} |\mathbf{U}|^2 dxdt +$$

$$2g_1F(c_0)K\int\limits_{\Pi_t} \nabla w_1\cdot\mathbf{R}dxdt + 2F(c_0)Kg_1\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{(\rho_d\lambda_d-\rho_m\lambda_m)c_0(1-c_0)}{\rho_d\lambda_d c_0+\rho_m\lambda_m(1-c_0)} + \frac{k'(c_0)c_0(1-c_0)}{k(c_0)}\right)\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{\Pi_t} \nabla U_1\cdot\mathbf{R}dxdt + \frac{2(\rho_d-\rho_m)g_1}{\rho_d c_0+\rho_m(1-c_0)}\int\limits_{\Pi_t} cw_1 dxdt +$$

$$+2\frac{((\rho_d\lambda_d-\rho_m\lambda_m)c_0(1-c_0)+k'(c_0)F(c_0)L^{-1})}{\rho_d\lambda_d c_0+\rho_m\lambda_m(1-c_0)}\cdot$$

$$\cdot Kg_1\int\limits_{\Pi_t} \nabla U_1\cdot\mathbf{U}dxdt - 2\frac{k'(c_0)K}{\rho_d\lambda_d c_0+\rho_m\lambda_m(1-c_0)}\cdot$$

$$\cdot g_1\int\limits_{\Pi_t} R_1\mathtt{div}\mathbf{U}dxdt + 2Kg_1\int\limits_{\Pi_t} \nabla w_1\cdot\mathbf{U}dxdt. \tag{2.12}$$

Правая часть (2.12) оценивается при помощи неравенства Коши следующим образом:

$$-2\int\limits_{\Pi_t} \mathbf{R}\cdot\mathbf{U}dxdt + 2F(c_0)\int\limits_{\Pi_t} |\mathbf{U}|^2 dxdt +$$

$$2g_1F(c_0)K\int\limits_{\Pi_t}\nabla w_1\cdot\mathbf{R}dxdt+2F(c_0)Kg_1\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{(\rho_d\lambda_d-\rho_m\lambda_m)c_0(1-c_0)}{\rho_d\lambda_dc_0+\rho_m\lambda_m(1-c_0)}+\frac{k'(c_0)c_0(1-c_0)}{k(c_0)}\right)\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{\Pi_t}\nabla U_1\cdot\mathbf{R}dxdt+\frac{2(\rho_d-\rho_m)g_1}{\rho_dc_0+\rho_m(1-c_0)}\int\limits_{\Pi_t}cw_1dxdt+$$

$$2\frac{((\rho_d\lambda_d-\rho_m\lambda_m)c_0(1-c_0)+k'(c_0)F(c_0)L^{-1})}{\rho_d\lambda_dc_0+\rho_m\lambda_m(1-c_0)}\cdot$$

$$\cdot Kg_1\int\limits_{\Pi_t}\nabla U_1\cdot\mathbf{U}dxdt-2\frac{k'(c_0)K}{\rho_d\lambda_dc_0+\rho_m\lambda_m(1-c_0)}\cdot$$

$$\cdot g_1\int\limits_{\Pi_t}R_1\mathtt{div}\mathbf{U}dxdt+2Kg_1\int\limits_{\Pi_t}\nabla w_1\cdot\mathbf{U}dxdt\le$$

$$\le\varepsilon_1\int\limits_0^t\|\nabla\mathbf{U}\|^2dt+\varepsilon_2\int\limits_0^t\|\nabla\mathbf{w}\|^2dt+N(\varepsilon_1,\varepsilon_2)Z(t),$$

где $N(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ -положительная величина, зависящая, помимо своих аргументов, от констант задачи. Выбирая $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\varepsilon_1\le\frac{2k(c_0)}{c_0\rho_d\lambda_d+(1-c_0)\rho_m\lambda_m},$$

$$\varepsilon_2\le\frac{2\mu_m(1+c_0N)}{(\rho_dc_0+\rho_m(1-c_0))}$$

и учитывая оценки левой и правой частей равенства (2.12), получаем

$$\frac{dZ}{dt}\le A\cdot Z(t),\ \ Z(0)=0,\ \ A=const>0.$$

Следовательно, $Z\equiv 0$, а значит, для решения задачи Коши с однородными начальными условиями $c=0$, $\mathbf{R}=0$, $\mathbf{U}=0$, $\mathbf{w}=0$ почти всюду в Π_T.

Восстановим скорости $\mathbf{u}$ $\mathbf{v}$ по формулам

$$\mathbf{u}=\mathbf{w}+(1-c_0)\mathbf{U},\ \ \mathbf{v}=\mathbf{w}-c_0\mathbf{U},\qquad(2.13)$$

температуру – по формуле

$$\theta(x,t)=L^{-1}\int\limits_{x_0}^{x}\mathbf{U}d\mathbf{r}+\theta_0(x_0)-$$

$$-(L(\kappa_d\rho_dc_0+\kappa_m\rho_m(1-c_0))^{-1}\cdot$$

$$\cdot\int\limits_0^t\Big(k(c_0)\mathtt{div}\mathbf{U}-K\mathbf{g}(k'(c_0)(\mathbf{R}-F(c_0)\mathbf{U})+$$

$$+\kappa_d\rho_dc_0\mathbf{u}+\kappa_m\rho_m(1-c_0)\mathbf{v})\Big)_{x=x_0}dt,\qquad(2.14)$$

где x_0 – произвольная точка односвязной области Ω.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 2.1. Решение задачи Коши для линейной системы (2.3)–(2.7) единственно в классе функций

$$c\in W_2^{1,1}(\Pi_T),\ \ p\in W_2^{1,0}(\Pi_T),\ \ \mathbf{R}\in W_2^{1,1}(\Pi_T),$$

$$\mathbf{w}\in W_2^{2,1}(\Pi_T),\ \ \mathbf{U}\in W_2^{2,1}(\Pi_T)$$

таких, что $rot\mathbf{U}=0$, $rot\mathbf{R}=0$, следовательно, решение задачи Коши для системы (1.1)–(1.6) единственно в классе функций

$$c\in W_2^{1,1}(\Pi_T),\ \ p\in W_2^{1,0}(\Pi_T),\ \ \mathbf{u}\in W_2^{2,1}(\Pi_T),$$

$$\mathbf{v}\in W_2^{2,1}(\Pi_T),\ \ \theta\in W_2^{2,1}(\Pi_T)\ \ \theta_{xxx}\in L_2(\Pi_T).$$

3. Существование решения задачи Коши для линейной системы 1.

Для доказательства существования решения задачи Коши можно обойтись без введения функций $\mathbf{U}$, это сделает выкладки менее громоздкими. В уравнениях (2.4)–(2.6), в которых $\mathbf{U}$ нужно заменить на $L\nabla\theta$, и в уравнении (2.7') перейдем к новым функциям с однородными начальными данными

$$c_g(x,t)=c(x,t)-c_0(x);\ \ \mathbf{R}_g(x,t)=\mathbf{R}(x,t)-\mathbf{R}_0(x);$$

$$\mathbf{w}_g(x,t)=\mathbf{w}(x,t)-(\Gamma*_1\mathbf{w}_0(x));$$

$$\theta_g(x,t)=\theta(x,t)-\theta_0(x),$$

где

$$c_0(x)=c(x,0);$$

$$\mathbf{R}_0(x)=\mathbf{R}(x,0)=\nabla c_0(x)+L\nabla\theta_0(x)F(c_0);$$

$$\mathbf{w}_0(x)=\mathbf{w}(x,0)=\mathbf{v}_0(x)+c_0L\nabla\theta_0(x);$$

$\Gamma(x,t)$ – фундаментальное решение уравнения теплопроводности.

Опуская индексы и сохраняя прежние обозначения для искомых функций, получим задачу Коши с однородными начальными данными для неоднородной системы

$$c_t-c_0(1-c_0)L\Delta\theta\equiv f_c(x);$$

$$div\mathbf{w}=0;$$

$$\mathbf{R}_t+\frac{F(c_0)k'(c_0)K}{\rho_d\lambda_dc_0+\rho_m\lambda_m(1-c_0)}g_1\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x_1}-$$

$$F(c_0)Kg_1\nabla w_1-\Big(\frac{K(\rho_d\lambda_dc_0+k'(c_0)F(c_0))}{\rho_d\lambda_dc_0+\rho_m\lambda_m(1-c_0)}-c_0\Big)\cdot$$

$$\cdot g_1\nabla\frac{\partial\theta}{\partial x_1}=-\frac{F(c_0)k'(c_0)K}{\rho_d\lambda_dc_0+\rho_m\lambda_m(1-c_0)}g_1\frac{\partial\mathbf{R}_0}{\partial x_1}+$$

$$+F(c_0)Kg_1\nabla w_1(x,0)+$$
$$+\Big(\frac{K(\rho_d\lambda_d c_0+k'(c_0)F(c_0))}{\rho_d\lambda_d c_0+\rho_m\lambda_m(1-c_0)}-c_0\Big)\cdot$$
$$\cdot g_1\nabla\frac{\partial\theta_0}{\partial x_1}\equiv \mathbf{f}_R(x);$$
$$(\rho_d c_0+\rho_m(1-c_0))\mathbf{w}_t+\nabla(p+(\rho_d-\rho_m)c_0(1-c_0)L\theta_t+$$
$$+2c_0\mu_m(1+c_0N)\mathtt{div}L\nabla\theta)-\mu_m(1+c_0N)\Delta\mathbf{w}-$$
$$-(\rho_d-\rho_m)c\mathbf{g}=-\nabla(p+(\rho_d-\rho_m)c_0(1-c_0)L\theta_t+$$
$$+2c_0\mu_m(1+c_0N)\mathtt{div}\mathbf{U})|_{t=0}+\mu_m(1+c_0N)\Delta\mathbf{w}_0-$$
$$-(\rho_d-\rho_m)c_0\mathbf{g}\equiv\mathbf{f}_{\mathbf{w}}(x),$$
$$\theta_t-w_1L^{-1}+Kg_1L^{-1}\frac{\partial\theta}{\partial x_1}\Big((\rho_d\lambda_d-\rho_m\lambda_m)c_0(1-c_0)+$$
$$+k'(c_0)F(c_0)\Big)-k(c_0)\Delta\theta-k'(c_0)Kg_1L^{-1}R_1=$$
$$+Kg_1L^{-1}\frac{\partial\theta_0}{\partial x_1}\Big((\rho_d\lambda_d-\rho_m\lambda_m)c_0(1-c_0)+$$
$$+k'(c_0)F(c_0)\Big)+k(c_0)\Delta\theta_0(x)-$$
$$-k'(c_0)Kg_1L^{-1}R_{1,0}(x)-w_{1,0}(x)L^{-1}\equiv f_\theta.$$

Введем обозначение q для комбинации, стоящей под знаком градиента в уравнении для модифицированной скорости $\mathbf{w}$:

$$q=p+(\rho_d-\rho_m)c_0(1-c_0)L\theta_t+$$
$$+2c_0\mu_m(1+c_0N)\mathtt{div}L\nabla\theta. \qquad (3.0)$$

Для решения задачи применим преобразование Фурье по x и по t. Следуя [8], гл. IV, разд. 6, продолжим решение нулем при $t<0$ и сделаем, не меняя обозначений, замену неизвестных функций на новые, представляющие собой произведение продолженных функций на $\exp(-t/\tau)$, где константа τ имеет размерность времени.

Положим

$$c(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\tilde c(\mathbf{a},a_0)\exp(i\mathbf{a}x+ia_0)d\mathbf{a}da_0;$$
$$\mathbf{R}(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{a},a_0)\exp(i\mathbf{a}x+ia_0)d\mathbf{a}da_0;$$
$$\mathbf{w}(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{a},a_0)\exp(i\mathbf{a}x+ia_0)d\mathbf{a}da_0;$$
$$\theta(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\tilde\theta(\mathbf{a},a_0)\exp(i\mathbf{a}x+ia_0)d\mathbf{a}da_0;$$
$$g(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\tilde q(\mathbf{a},a_0)\exp(i\mathbf{a}x+ia_0)d\mathbf{a}da_0,$$

где $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $d\mathbf{a}=da_1da_2da_3$, $a_k(k=1,2,3)$ и a_0 - вещественные, а интегралы берутся в пределах $-\infty<a_k<+\infty$, $k=0,1,2,3$.

В результате получим

$$(\tau^{-1}+ia_0)\tilde c-c_0(1-c_0)\mathbf{a}^2\tilde\theta=\tilde F_c; \qquad (3.1)$$
$$i\mathbf{a}\cdot\tilde{\mathbf{w}}=0; \qquad (3.2)$$
$$(\tau^{-1}+ia_0)\tilde{\mathbf{R}}+\frac{F(c_0)k'(c_0)K}{\rho_d\lambda_d c_0+\rho_m\lambda_m(1-c_0)}g_1ia_1\tilde{\mathbf{R}}-$$
$$-\frac{F(c_0)Kg_1}{\rho_d\lambda_d c_0+\rho_m\lambda_m(1-c_0)}i\mathbf{a}\tilde w_1-F(c_0)Kg_1\cdot$$
$$-\left(\frac{(\rho_d\lambda_d-\rho_m\lambda_m)c_0(1-c_0)}{\rho_d\lambda_d c_0+\rho_m\lambda_m(1-c_0)}+\frac{k'(c_0)c_0(1-c_0)}{k(c_0)}\right)\cdot$$
$$\cdot a_1\mathbf{a}L\tilde\theta=\tilde{\mathbf{F}}_R; \qquad (3.3)$$
$$(\rho_d c_0+\rho_m(1-c_0))(\tau^{-1}+ia_0)\tilde{\mathbf{w}}+i\mathbf{a}\tilde q+$$
$$+\mu(1+c_0N)\mathbf{a}^2\tilde{\mathbf{w}}-(\rho_d-\rho_m)c\mathbf{g}=\tilde{\mathbf{F}}_U; \qquad (3.4)$$
$$(\tau^{-1}+ia_0)\tilde\theta-\tilde w_1L^{-1}Kg_1+$$
$$+\frac{Kg_1\Big((\rho_d\lambda_d-\rho_m\lambda_m)c_0(1-c_0)+k'(c_0)F(c_0)\Big)}{L(\rho_d\lambda_d c_0+\rho_m\lambda_m(1-c_0))}\cdot$$
$$\cdot ia_1\tilde\theta+\frac{k(c_0)}{(\rho_d\lambda_d c_0+\rho_m\lambda_m(1-c_0))}\mathbf{a}^2\tilde\theta-$$
$$-\frac{k'(c_0)Kg_1L^{-1}}{(\rho_d\lambda_d c_0+\rho_m\lambda_m(1-c_0))}\tilde R_1=\tilde F_\theta. \qquad (3.5)$$

Здесь новые правые части, обозначенные большими буквами, связаны со старыми следующим соотношением: $F_{\mathbf{R}}(x,t)=\mathbf{f}_R(x)\exp(-t/\tau)$, $t>0$ и $\mathbf{F}_R(x,t)=0$, $t\le 0$,

$$F(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\tilde F(\mathbf{a},a_0)\exp(i\mathbf{a}x+ia_0)d\mathbf{a}da_0.$$

Нашей целью является доказательство разрешимости линейной системы (3.1)–(3.5) относительно $\tilde c,\tilde{\mathbf{R}},\tilde{\mathbf{w}},\tilde\theta,\tilde p$ при любых правых частях. Для этого исключим $\tilde c$, используя уравнение (3.1), $\tilde R$ – используя (3.2) и $\tilde q$, умножая (3.4) скалярно на $i\mathbf{a}$ и принимая во внимание (3.2).

В результате, опуская тильды, получим следующую систему двух скалярных уравнений для θ и w_1 :

$$\Big(\tau^{-1}+ia_0+a^2k(c_0)/\kappa+Kg_1Qia_1-$$
$$-\frac{HQKg_1\mathbf{a}^2}{\tau^{-1}+i(a_0+a_1HKg_1)}\Big)\theta-$$
$$-Kg_1/L\frac{\tau^{-1}+ia_0}{\tau^{-1}+i(a_0+a_1HKg_1)}w_1=\mathbf{F}; \qquad (3.6)$$
$$(\rho_d c_0+\rho_m(1-c_0))\Big(\tau^{-1}+ia_0+\mathbf{a}^2\nu\Big)w_1-$$
$$-\frac{(\rho_d-\rho_m)c_0(1-c_0)Lg_1}{\tau^{-1}+ia_0}(a_1^2-\mathbf{a}^2)\theta=F_4. \qquad (3.7)$$

Здесь новые буквенные обозначения имеют следующий смысл:

$$\kappa=\rho_d\lambda_d c_0+\rho_m\lambda_m(1-c_0),\ \ \nu=\frac{\mu_m(1+c_0N)}{\rho_d c_0+\rho_m(1-c_0)};$$

$$Q=c_0(1-c_0)\left(\frac{\rho_d\lambda_d-\rho_m\lambda_m}{\rho_d\lambda_d c_0+\rho_m\lambda_m(1-c_0)}+\frac{k'(c_0)}{k(c_0)}\right);$$

$$H=c_0(1-c_0)\frac{k'(c_0)}{k(c_0)}.$$

Для определителя D системы двух скалярных уравнений (3.6), (3.7) имеем следующее выражение:

$$D=\Bigg(\tau^{-1}+ia_0+a^2k(c_0)/\kappa+Kg_1Qia_1-$$

$$-\frac{HQKg_1\mathbf{a}^2}{\tau^{-1}+i(a_0+a_1HKg_1)}\Bigg)\cdot(\rho_d c_0+\rho_m(1-c_0))\cdot$$

$$\cdot\left(\tau^{-1}+ia_0+\mathbf{a}^2\nu\right)-$$

$$-\frac{Kg_1^2(\rho_d-\rho_m)c_0(1-c_0)(a_1^2-\mathbf{a}^2)}{\tau^{-1}+i(a_0+a_1HKg_1)},$$

из которого следует оценка

$$|D|>(\tau^{-1}+\mathbf{a}^2(k(c_0)/\kappa-|HQKg_1|\tau))cdot$$

$$\cdot(\rho_d c_0+\rho_m(1-c_0))\cdot(\tau^{-1}+\mathbf{a}^2\nu)-$$

$$-|Kg_1^2(\rho_d-\rho_m)|c_0(1-c_0)\mathbf{a}^2\tau.$$

Подчинив выбор $\tau>0$ условиям

$$k(c_0)/\kappa-\tau|HQKg_1|>0,$$

$$|k(c_0)/(\kappa\tau)-|HQKg_1|+\nu/\tau)-\tau g_1^2c_0(1-c_0)\cdot$$

$$\cdot\frac{|K(\rho_d-\rho_m)|}{(\rho_d c_0+\rho_m(1-c_0))}<\tau^{-1},$$

мы гарантируем отличие от нуля определителя D при всех $a_0,\mathbf{a}$.

Последнее позволяет выразить функции θ и w_1 из системы (3.7), (3.8), умножая слева вектор правых частей на обратную матрицу коэффициентов системы, зависящих от $\mathbf{a},a_0$. Осталось восстановить исключенные на предыдущем этапе функции $c,q,\mathbf{R},w_2,w_3$ при помощи уравнений (3.1)–(3.4).

Таким образом, мы нашли "образы" искомых функций относительно преобразования Фурье, которые являются функциями аргументов $\mathbf{a},a_0$ (для них были использованы прежние обозначения). Предполагая, что начальные данные для искомых функций суммируемы в квадрате по R^3 вместе с квадратами нужных производных, искомые функции можно восстановить по следующим формулам:

$$c(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\tilde{c}(\mathbf{a},a_0)\exp(i\mathbf{a}x+ia_0)d\mathbf{a}da_0+$$

$$+c_0(x);$$

$$\mathbf{R}(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{a},a_0)\exp(i\mathbf{a}x+ia_0)d\mathbf{a}da_0+$$

$$+\mathbf{R}_0(x);$$

$$\mathbf{w}(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{a},a_0)\exp(i\mathbf{a}x+ia_0)d\mathbf{a}da_0+$$

$$+\mathbf{w}_0(x);$$

$$\theta(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\tilde{\theta}(\mathbf{a},a_0)\exp(i\mathbf{a}x+ia_0)d\mathbf{a}da_0+$$

$$+\theta_0(x);$$

$$q(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\tilde{q}(\mathbf{a},a_0)\exp(i\mathbf{a}x+ia_0)d\mathbf{a}da_0+$$

$$+q_0(x).$$

Сходимость полученных интегралов, а также принадлежность функций $c,\mathbf{R},\theta,\mathbf{w},q$ вместе с производными первого порядка по времени и производными первого порядка по пространственным переменным от $\mathbf{R},\mathbf{w},p$ и второго от $\nabla\theta,\mathbf{w}$, классу $L_2(\Pi_T)$, $\Pi_t=R^3\times[0,T]$ проверяется так же, как и в [8], гл.IV, разд. 6. Отметим, что найденное решение удовлетворяет условиям $rot\mathbf{R}=0$, поскольку правые части уравнений для $\mathbf{R}$ системы с нулевыми начальными данными подчинялись этому условию. Итак, доказано следующее утверждение.

Функция p восстанавливается по формуле (3.0).

Утверждение 3.1. Если

$$c_0(x)\in W_2^1(R^3),\ \mathbf{R}_0(x),\ \mathbf{w}_0(x),\ \nabla\theta_0(x)\in\mathbf{W}_2^1(R^3),$$

то задача Коши для линейной системы (2.3)–(2.7) имеет решение c, $\mathbf{R}$, $\mathbf{w}$, θ,p такое, что $rot\mathbf{R}=0$ и функции θ_x, θ_{xx}, θ_{xxx} θ_t, $\mathbf{w}$, $\mathbf{w}_x$, $\mathbf{w}_{xx}$, $\mathbf{w}_t$, $\mathbf{R},\mathbf{R}_x$, $\mathbf{R}_t$, c, c_t, p, p_x принадлежат $\mathbf{L}_2(\Pi_T)$.

Итогом рассмотрения задачи Коши для системы уравнений (1.6)–(1.10) является

Теорема 3.1. Если начальные данные $c(x,0)$, $\mathbf{u}(x,0)$, $\mathbf{v}(x,0)$ являются элементами $\mathbf{W}_2^1(R^3)$, а $\theta_0(x)\in W_2^2(R^3)$, то задача Коши для линейной системы (1.6)–(1.10) имеет единственное решение такое, что $c,c_t,c_x,c_{xx},\theta,\theta_x,\theta_{xx},\theta_{xxx},\theta_t,p,p_x,\mathbf{u},\mathbf{u}_x,\mathbf{u}_{xx},\mathbf{u}_t$, $\mathbf{v},\mathbf{v}_x,\mathbf{v}_{xx},\mathbf{v}_t$ принадлежат $\mathbf{L}_2(\Pi_T)$.

Замечание 3.1. Здесь, как и в задачах для вязкой несжимаемой жидкости, единственность для давления понимается с точностью до произвольного слагаемого, не зависящего от пространственных переменных.

4. Существование и единственность решения задачи Коши для линейной системы 2.

Вводя вспомогательные функции по формулам (2.1), а модифицированное соленоидальное поле скоростей – по формуле

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} + c_0\mathbf{U} + c\mathbf{u}_0,$$

для 11 функций $c, \mathbf{R}, \mathbf{U}, \mathbf{w}$ и p получим следующую систему уравнений:

$$c_t = -c_0(1-c_0)L\Delta\theta - (1-c_0)\mathbf{u}_0(\mathbf{R} - \mathbf{U}F(c_0)); \tag{4.1}$$

$$div\mathbf{w} = 0; \tag{4.2}$$

$$\mathbf{R}_t - \left(\frac{F(c_0)k'(c_0)LG}{\rho_d\lambda_d c_0 + \rho_m\lambda_m(1-c_0)} + \right.$$

$$\left. +(1-c_0)(Kg_1 + LG)\right)\nabla R_1 - (1-c_0)Kg_2\nabla R_2 =$$

$$= ((1-c_0)(Kg_1+LG) + c_0(1-c_0)(\rho_d\lambda_d - \rho_m\lambda_m)LG +$$

$$+(Kg_1+LG)\rho_d\lambda_d c_0)\kappa^{-1}F(c_0)\nabla\frac{\partial\theta}{\partial x_1} -$$

$$-(FKg_2((1-c_0)+\rho_d\lambda_d c_0/\kappa)\nabla\frac{\partial\theta}{\partial x_2} - LGF(c_0)\nabla w_1 -$$

$$-F(Kg_1+LG)LG(\rho_d\lambda_d\rho_m\lambda_m/\kappa^2+1)\mathbf{R} +$$

$$+F^2(Kg_1+LG)LG(\rho_d\lambda_d\rho_m\lambda_m/\kappa^2+1)\nabla\theta; \tag{4.3}$$

$$(\rho_d c_0 + \rho_m(1-c_0))\mathbf{w}_t =$$

$$-\nabla q + \mu_m(1+c_0N)\Delta\mathbf{w} -$$

$$-\mu_m(1+c_0N))(\mathbf{u}_0\cdot\nabla)(\mathbf{R} - F(c_0)\mathbf{U}) +$$

$$+(\rho_d - \rho_m)c\mathbf{g}; \tag{4.4}$$

$$\theta_t = \frac{k(c_0)}{\kappa}\Delta\theta - (LGc_0(1-c_0)(\rho_d\lambda_d - \rho_m\lambda_m) +$$

$$+\rho_d\lambda_d c_0(Kg_1+LG) + k'(c_0)F(c_0)LG)\kappa^{-1}\frac{\partial\theta}{\partial x_1} -$$

$$-\frac{\rho_d\lambda_d c_0}{\kappa}Kg_2\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + LGw_1 - c(Kg_1+LG)\cdot$$

$$\cdot LG(\frac{\rho_d\lambda_m\rho_m\lambda_d}{\kappa^2}+1) + \frac{k'(c_0)}{\kappa}LGR_1. \qquad (4.5).$$

Доказательство единственности решения задачи Коши для системы (4.1)–(4.5) принципиально не отличается от случая задачи 1.

Доказательство существования проводится по той же схеме, что и в п. 3, однако имеется ряд трудностей технического характера. Именно выбор τ подчинен здесь большему количеству условий и доказательство возможности выбора τ, обеспечивающего отличие от нуля определителя матрицы системы, не столь очевидно.

Прежде всего перейдем, не меняя обозначений к новым функциям с нулевыми начальными данными. Получим линейную систему уравнений, отличающуюся от системы (4.1)–(4.5) наличием ненулевых правых частей, включающих начальные функции и их производные соответствующих порядков. Все правые части будем обозначать одной буквой f. Оставим для новых уравнений системы прежние обозначения. Далее сделаем преобразование Фурье по формулам п. 3, оставляя прежние обозначения для функций и правых частей. Получим следующую систему:

$$(\tau^{-1} + ia_0)c = c_0(1-c_0)L\mathbf{a}^2\theta - (1-c_0)\mathbf{u}_0\cdot$$

$$\cdot(\mathbf{R} - i\mathbf{a}L\theta F(c_0)) = f; \tag{4.6}$$

$$i\mathbf{aw} = 0; \tag{4.7}$$

$$(\tau^{-1} + ia_0)\mathbf{R} - \left(\frac{F(c_0)k'(c_0)LG}{\rho_d\lambda_d c_0 + \rho_m\lambda_m(1-c_0)} + \right.$$

$$\left. +(1-c_0)(Kg_1+LG)\right)i\mathbf{a}R_1 - (1-c_0)\cdot$$

$$\cdot Kg_2 i\mathbf{a}R_2 = \Big((1-c_0)(Kg_1+LG) + c_0(1-c_0)\cdot$$

$$\cdot(\rho_d\lambda_d + \rho_m\lambda_m)LG + (Kg_1+LG)\rho_d\lambda_d c_0\Big)\cdot$$

$$\cdot\kappa^{-1}F(c_0)\mathbf{a}a_1L\theta - (FKg_2((1-c_0)+\rho_d\lambda_d c_0/\kappa)\cdot$$

$$\cdot L\mathbf{a}a_2\theta - LGF(c_0)i\mathbf{a}w_1 -$$

$$-F(Kg_1+LG)LG(\rho_d\lambda_d\rho_m\lambda_m\kappa^{-2}+1)\mathbf{R} +$$

$$+F^2(Kg_1+LG)LG(\rho_d\lambda_d\rho_m\lambda_m\kappa^{-2}+1)\cdot$$

$$\cdot Li\mathbf{a}\theta + \mathbf{f}; \tag{4.8}$$

$$(\tau^{-1} + ia_0)\rho\mathbf{w} = -i\mathbf{a}q - \mu_m(1+c_0N)a^2\mathbf{w} -$$

$$-\mu_m(1+c_0N)(\mathbf{u}_0\cdot i\mathbf{a})(\mathbf{R} - i\mathbf{a}L\theta F) +$$

$$+(\rho_d - \rho_m)c\mathbf{g} + \mathbf{f}; \tag{4.9}$$

$$(\tau^{-1} + ia_0)\theta + \frac{k(c_0)}{\kappa}\mathbf{a}^2\theta =$$

$$= (Gc_0(1-c_0)(\rho_d\lambda_d - \rho_m\lambda_m) + \rho_d\lambda_d c_0(Kg_1+LG) -$$

$$-k'(c_0)F(c_0)G)\kappa^{-1}ia_1\theta - \frac{\rho_d\lambda_d c_0}{\kappa}Kg_2 ia_2\theta$$

$$+Gia_1w_1 + c(Kg_1+LG)LG(\frac{\rho_d\lambda_m\rho_m\lambda_d}{\kappa^2}+1) -$$

$$-\frac{k'(c_0)}{\kappa}LGR_1 + f. \qquad (4.10).$$

При получении уравнения (4.9) в слагаемое ∇q, как и прежде, были собраны все слагаемые градиентного вида.

Как и ранее, исключим из системы c, $\mathbf{R}$ и q. Уравнение (4.9) с учетом (4.7) приобретает вид

$$(\tau^{-1} + ia_0 + \nu(\rho_d c_0 + \rho_m(1-c_0))\mathbf{a}^2)\mathbf{w} =$$
$$= (\rho_d - \rho_m)c(\mathbf{g}\mathbf{a}^2 - \mathbf{a}(\mathbf{g}\mathbf{a}))\mathbf{a}^{-2} +$$
$$+\mu(1+c_0N)i(\mathbf{u}_0\mathbf{a})\Big(\mathbf{a}^2(\mathbf{R} - i\mathbf{a}LF(c_0)\theta) -$$
$$-((\mathbf{R} - i\mathbf{a}LF(c_0)\theta)\mathbf{a})\mathbf{a}\Big)\mathbf{a}^{-2}. \qquad (4.11)$$

Из уравнения (4.6) для c следует, что

$$c = \frac{c_0(1-c_0)\mathbf{a}^2 - (1-c_0)\mathbf{u}_0(\mathbf{R} - i\mathbf{a}L\theta F(c_0))}{\tau^{-1} + ia_0} +$$
$$+\frac{f}{\tau^{-1} + ia_0}. \qquad (4.12)$$

Из (4.8) выражаем $R_j, j = 1, 2, 3$.

$$R_j = \Big(((1-c_0)(Kg_1 + LG) +$$
$$+c_0(1-c_0)(\rho_d\lambda_d - \rho_m\lambda_m)LG + (Kg_1 + LG)\rho_d\lambda_d c_0)\cdot$$
$$\cdot\kappa^{-1}F(c_0)Lia_j ia_1\theta - (FKg_2(1-c_0) + \rho_d\lambda_d c_0/\kappa)\cdot$$
$$\cdot Lia_j ia_2\theta - LGF(c_0)ia_j w_1 + F^2(Kg_1 + LG)\cdot$$
$$\cdot LG(\rho_d\lambda_d\rho_m\lambda_m/\kappa^2 + 1)La_j\theta\Big)\cdot$$
$$\cdot\Bigg(\tau^{-1} + ia_0 - \Big(\frac{F(c_0)k'(c_0)LG}{\rho_d\lambda_d c_0 + \rho_m\lambda_m(1-c_0)} +$$
$$+(1-c_0)(Kg_1 + LG)\Big)ia_1 + (1-c_0)Kg_2 ia_2 +$$
$$+F(Kg_1 + LG)LG(\rho_d\lambda_d\rho_m\lambda_m\kappa^{-2} + 1)\Bigg)^{-1} +$$
$$f\Big(\tau^{-1} + ia_0 - \Big(\frac{F(c_0)k'(c_0)LG}{\rho_d\lambda_d c_0 + \rho_m\lambda_m(1-c_0)} +$$
$$+(1-c_0)(Kg_1 + LG)\Big)ia_1 + (1-c_0)Kg_2 ia_2 +$$
$$+F(Kg_1 + LG)LG(\rho_d\lambda_d\rho_m\lambda_m\kappa^{-2} + 1)\Big)^{-1}. \quad (4.13)$$

Для того чтобы обеспечить отличие от нуля знаменателя

$$d(a_0, a_1, a_2) = \tau^{-1} + ia_0 -$$
$$-\Big(\frac{F(c_0)k'(c_0)LG}{\rho_d\lambda_d c_0 + \rho_m\lambda_m(1-c_0)} + (1-c_0)(Kg_1 + LG)\Big)ia_1$$
$$+(1-c_0)Kg_2 ia_2 + F(Kg_1 + LG)LG\cdot$$
$$\cdot(\rho_d\lambda_d\rho_m\lambda_m\kappa^{-2} + 1)$$

правой части (4.13) и получить для его модуля оценку снизу, потребуем, чтобы выполнялось неравенство

$$0.5\tau^{-1} + F(Kg_1 + LG)LG(\rho_d\lambda_d\rho_m\lambda_m\kappa^{-2} + 1) > 0, \qquad (4.14)$$

гарантирующее оценку

$$|d(a_0, a_1, a_2)| > 0.5\tau^{-1}.$$

Перепишем (4.13) в виде

$$\mathbf{R} = \frac{A_1}{d(a_0, a_1, a_2)}\mathbf{a}a_1\theta =$$
$$= \frac{A_2}{d(a_0, a_1, a_2)}\mathbf{a}a_2\theta + \frac{A_3}{d(a_0, a_1, a_2)}i\mathbf{a}w_1$$
$$+\frac{A_4}{d(a_0, a_1, a_2)}i\mathbf{a}\theta + \frac{\mathbf{f}}{d(a_0, a_1, a_2)}, \qquad (4.15)$$

или

$$\mathbf{R} - i\mathbf{a}F(c_0)L\theta =$$
$$= \frac{A_1}{d(a_0, a_1, a_2)}\mathbf{a}a_1\theta + \frac{A_2}{d(a_0, a_1, a_2)}\mathbf{a}a_2\theta +$$
$$+\frac{A_3}{d(a_0, a_1, a_2)}i\mathbf{a}w_1 +$$
$$+\Big(\frac{A_4}{d(a_0, a_1, a_2)} - F(c_0)L\Big)i\mathbf{a}\theta. \qquad (4.16)$$

Здесь и далее заглавными буквами A, B и т.д. будем обозначать комбинации известных величин (коэффициентов модели).

С учетом (4.12), (4.15) и (4.16) уравнение (4.10) может быть записано в виде

$$\Bigg(\tau^{-1} + \Bigg(\frac{k(c_0)}{\kappa} - (Kg_1 + LG)LG(\frac{\rho_d\lambda_m\rho_m\lambda_d}{\kappa^2} + 1)\cdot$$
$$\cdot\frac{c_0(1-c_0)L}{\tau^{-1} + ia_0}\Bigg)\mathbf{a}^2 - (Kg_1 + LG)LG\cdot$$
$$\cdot(\frac{\rho_d\lambda_m\rho_m\lambda_d}{\kappa^2} + 1)\cdot$$
$$\cdot\frac{(1-c_0)(A_1 a_1 + A_2 a_2)(\mathbf{u}_0\mathbf{a})}{(\tau^{-1} + a_0)d} +$$
$$+ia_0 - k'(c_0)\kappa^{-1}LG\frac{A_1 a_1^2 + A_2 a_1 a_2}{d} -$$
$$-(Kg_1 + LG)LG(\frac{\rho_d\lambda_m\rho_m\lambda_d}{\kappa^2} + 1)(1-c_0)\cdot$$
$$\cdot\Big(\frac{A_4}{d} - F(c_0)L\Big)i(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}_0) - k'(c_0)\kappa^{-1}LG\cdot$$
$$\cdot\Big(\frac{A_4}{d} - F(c_0)L\Big)ia_1\Bigg)\theta +$$

$$+\Big(G-k'(c_0)\kappa^{-1}LG\frac{A_3}{d}-(Kg_1+LG)\cdot$$

$$\cdot LG(\frac{\rho_d\lambda_m\rho_m\lambda_d}{\kappa^2}+1)\frac{(1-c_0)A_3}{d}\Big)ia_1w_1=$$

$$=f\Big(1+\frac{1}{\tau^{-1}+ia_0}+\frac{1}{d}\Big). \qquad (4.17)$$

Уравнение (4.11) с использованием равенств (4.12), (4.15) и (4.16) переписывается как

$$\Big(\tau^{-1}+ia_0+\nu\mathbf{a}^2+(\rho_d-\rho_m)(1-c_0)\cdot$$

$$+\frac{i(\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{a})A_3(g_1(a_2^2+a_3^2)-g_2a_1a_2)}{(\rho_dc_0+\rho_m(1-c_0))(\tau^{-1}+ia_0)d\mathbf{a}^2}\Big)w_1-$$

$$-\Big(\frac{(\rho_d-\rho_m)c_0(1-c_0)(g_1(a_2^2+a_3^2)-g_2a_1a_2)}{\tau^{-1}+ia_0}-$$

$$-\frac{(\rho_d-\rho_m)(1-c_0)}{\rho_dc_0+\rho_m(1-c_0)}(\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{a})\frac{A_1a_1+A_2a_2}{d}+$$

$$+\Big(\frac{A_4}{d}-FL\Big)i(\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{a})\Big)\theta=$$

$$=f\Big(1+\frac{1}{\tau^{-1}+ia_0}+\frac{1}{d}\Big). \qquad (4.18)$$

Для того чтобы обеспечить диагональное преобладание в матрице коэффициентов при θ и w_1 в уравнениях (4.17), (4.18), сначала выберем τ так, чтобы

$$\frac{k(c_0)}{\kappa}-(Kg_1+LG)LG(\frac{\rho_d\lambda_m\rho_m\lambda_d}{\kappa^2}+1)\cdot$$

$$\cdot\frac{c_0(1-c_0)L}{\tau^{-1}+ia_0}>\alpha^2>0. \qquad (4.19)$$

Возможность такого выбора очевидна, и он в свою очередь гарантирует возможность выбора τ такого, что коэффициент B_{11} при θ в уравнении (4.17) больше по абсолютной величине коэффициента B_{12} при w_1 в этом же уравнении:

$$|B_{11}|>|B_{12}|. \qquad (4.20)$$

Наличие знаменателей, содержащих τ^{-1} в слагаемых уравнения (4.18), содержащих величины порядка $\mathbf{a}^2$ и вид коэффициента B_{22} при w_1 в этом уравнении, позволяют выбрать достаточно малое τ так, чтобы выполнялось неравенство

$$|B_{22}|>|B_{21}|, \qquad (4.21)$$

где B_{21} – коэффициент при θ в (4.18).

Выбирая τ удовлетворяющим условиям малости (4.12), (4.19)–(4.21), получаем диагональное преобладание в матрице, соответствующей системе линейных относительно θ и w_1 уравнений (4.17) и (4.18). Следовательно, система (4.17), (4.18) однозначно разрешима относительно θ и w_1. Далее функции R_i находятся из (4.13), функция c – из (4.12), w_2 и w_3 – из (4.7) и (4.11).

Утверждение 4.1. Если $c_0(x)\in W_2^1(R^3)$, $\mathbf{R}_0(x)$, $\mathbf{w}_0(x)$, $\nabla\theta_0(x)\in\mathbf{W}_2^1(R^3)$, то задача Коши для линейной системы (4.1) – (4.5) имеет решение такое, что $\nabla\theta$, $\nabla\theta_x$, $\nabla\theta_{xx}$, $\nabla\theta_t$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{w}_x$, $\mathbf{w}_{xx}$, $\mathbf{w}_t$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}_x$, $\mathbf{R}_t$, c, c_t, p, p_x принадлежат $\mathbf{L}_2(\Pi_T)$ и $rot\mathbf{R}=0$.

В итоге получаем следующий результат для задачи Коши для линеаризованной задачи (1.13)–(1.17):

Теорема 4.1. Если начальные данные $c(x,0)$, $\mathbf{u}(x,0)$, $\mathbf{v}(x,0)$ являются элементами $\mathbf{W}_2^1(R^3)$, а $\nabla\theta_0(x)\in\mathbf{W}_2^2(R^3)$, то задача Коши для линейной системы (1.13)–(1.17) имеет единственное решение такое, что $c,c_t,c_x,c_{xx},\theta,\theta_x,\theta_{xx},\theta_{xxx},\theta_t,p,p_x,\mathbf{u},\mathbf{u}_x,\mathbf{u}_{xx},\mathbf{u}_t$, $\mathbf{v},\mathbf{v}_x,\mathbf{v}_{xx},\mathbf{v}_t$ принадлежат $\mathbf{L}_2(\Pi_T)$.

Библиографический список

1. Pukhnachov V. V., Voinov O. V. *Mathematical model of motion of emulsion under effect of thermocapillary forces and microacceleration* // Abstracts of Ninth European Symposium on Gravity Dependent Phenomena in Phisical Sciences – Berlin, 1995.

2. Pukhnachov V. V., Voinov O. V., Petrova A. G., Zhuravleva E. N., Gudz O. A. *Dynamics, stability and solidification of emulsion under the action of thermocapillary forces and microacceleration* Interfacial Fluid Dynamics and Transport Processes. Lecture Notes on Physics – Springer, 2003.

3. Миронова О.А., Петрова А.Г. *Исследование устойчивости равновесия однородной эмульсии в поле микроускорений и термокапиллярных сил* // Известия АлтГУ – Барнаул, 2005. – № 1.

4. Petrova A.G., Pukhnachev V.V. *Thermocapillary motion in an emulsion.* Microgravity science and technology, 21, s227–s 232 – Springer, 2009.

5. Петрова А.Г. *Задача непротекания для одномерного движения эмульсии* // СибЖим. – 2007. – T. X, 3(31).

6. Петрова А. Г. *О начально-краевой задаче для одномерного движения эмульсии в поле микроускорений и термокапиллярных сил* // СибЖим. – 2009.– Т. XII, № 2(38).
7. Вольперт А.И., Худяев А.И. *О задаче Коши для составных систем нелинейных дифференциальных уравнений* // Мат. сб. – 1972. –Т. 87, №4.
8. Ладыженская О.А. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* – М., 1970.