УДК 514.765

М.А. Львова

О случайных нечетких отношениях эквивалентности и толерантности

M.A. Lvova

About Equivalence and Tolerance Stochastic Fuzzy Relations

В статье рассматриваются нечеткие отношения толерантности, их транзитивное замыкание, вероятностные свойства транзитивного замыкания.

Ключевые слова: нечеткие отношения, толерантность, эквивалентность.

The paper considers fuzzy tolerance relations, their transitive closure and probability properties of transitive closure.

Key words: fuzzy relations, tolerance, equivalence.

При социологических или экономических исследованиях часто возникает задача классификации объектов. В настоящее время в подобных задачах успешно используются методы и понятия нечеткой теории множеств [1, 2]. Одно из ключевых понятий теории нечетких множеств – нечеткое отношение толерантности. В данной работе обсуждаются проблемы, связанные с транзитивным замыканием нечеткого отношения толерантности, и возникающих статистических закономерностей.

Определение 1. Нечетким толерантным отношением на X называется функция $\theta : X \times X \to [0,1]$, обладающая свойствами:

1. $\theta(x,y) = \theta(y,x)$;
2. $x = y \Longrightarrow \theta(x,y) = 1$.

Величина $\theta(x,y)$ интерпретируется как мера сходства объектов $x, y \in X$, величина $r(x,y) = 1 - \theta(x,y)$ – соответственно как мера несходства объектов.

Определение 2. Нечеткое толерантное отношение на X называется нечетким отношением эквивалентности, если дополнительно выполняется аксиома транзитивности:

3. $\theta(x,\, y) \geq \min\{\theta(x,\, y), \theta(y,\, z)\}\ \forall x,\, y,\, z \in X$.

Определение 3. Транзитивным замыканием нечеткого отношения толерантности θ на множестве X называется наименьшее нечеткое отношение эквивалентности $\overline{\theta}$ такое, что $\overline{\theta} \supseteq \theta$, т.е.

1. $\overline{\theta}\,(x,y) \geq \theta\,(x,y) \quad \forall x,y \in X$;
2. $\overline{\theta}$ – нечеткое отношение эквивалентности;
3. если $\theta_1(x,y)$ обладает свойствами 1 и 2, то $\theta_1(x,y) \geq \overline{\theta}(x,y)\ \forall x,y \in X$.

Для произвольного множества X имеется стандартная процедура построения транзитивного замыкания, именно:

$$\overline{\theta} = \theta \cup \theta^2 \cup \theta^3 \cup \ldots,$$

где отношение $\theta^k = \theta \circ \ldots \circ \theta$ получено из отношения θ k–кратной $\max\min$ композицией. Композиция $\max\min$ определяется формулой:

$$\theta_1 \circ \theta_2\,(x,y) = \max_z \min\left\{\theta_1\,(x,z)\,, \theta_2\,(z,y)\right\}.$$

Теорема 1. Если θ – нечеткое толерантное отношение на конечном множестве X, содержащем N элементов, то

1. $\overline{\theta} = \theta^{N-1}$;
2. функция $\overline{\theta} : X \times X \to [0,1]$ принимает не более $N-1$ различных значений, отличных от 1, это число обозначается $q\left(\overline{\theta}\right)$, $q\left(\overline{\theta}\right) \leq N-1$.

Доказательство. Первое утверждение хорошо известно. Докажем второе.

Покажем, что для любых $x,y,z \in X$ хотя бы два значения функции принадлежности θ нечеткой эквивалентности θ из трех значений $\theta\,(x,y)$, $\theta\,(y,z)$, $\theta\,(z,x)$ совпадают.

Пусть, для определенности

$$\theta\,(x,y) \geq \theta\,(y,z) \geq \theta\,(z,x)\,.$$

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант №08-01-98001), а также ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. №02.740.11.0457).

Так как θ является нечетким отношением эквивалентности, то оно удовлетворяет свойствам симметричности и транзитивности, и поэтому имеем:

1. $\theta(z,x) = \theta(x,z)$;
2. $\theta(x,z) \geq \min(\theta(x,y), \theta(y,z))$.

Согласно допущению $\theta(y,z) \leq \theta(x,y)$. Поэтому $\min(\theta(x,y), \theta(y,z)) = \theta(y,z)$. Из условий 1, 2 получаем $\theta(z,x) \geq \theta(y,z)$. С другой стороны, имеем $\theta(z,x) \leq \theta(y,z)$. Значит, $\theta(z,x) = \theta(y,z)$.

Следовательно, при $N = 3$ утверждение теоремы верно. Пусть теорема верна для всех $N \leq K$. Покажем, что тогда она верна и для $N = K+1$.

Выберем произвольный элемент $x_0 \in X$ и рассмотрим сужение R_0 нечеткой эквивалентности R с областью определения $(X \backslash \{x_0\}) \times (X \backslash \{x_0\})$. Число различных, отличных от 1, значений функции принадлежности μ_{R_0} не больше $K-1$ (по предположению индукции). Пусть существует $x_1 \in (X \backslash \{x_0\})$ такой, что $\theta(x_0, x_1)$ не равно никакому из этих $K-1$ значений. Тогда, по лемме, для любого $y \in (X \backslash \{x_0\})$ или $\theta(x_0, y) = \theta(x_0, x_1)$, или $\theta(x_0, y) = \theta(y, x_1)$. Следовательно, число различных, отличных от 1, значений функции принадлежности θ не больше K. Теорема 1 доказана.

Пусть $\theta(m_i, m_j)$ – нечеткое отношение эквивалентности, заданное на 3-элементном множестве $M = \{m_1, m_2, m_3\}$. При этом $\theta(m_1, m_2) = \eta_1$, $\theta(m_1, m_3) = \eta_2$, $\theta(m_2, m_3) = \eta_3$ – случайные величины с совместной функцией распределения $G_{\eta_1,\eta_2,\eta_3}(x,y,z)$, принимающие значения на отрезке $[0,1]$.

Обозначим через $G_{\eta_1,\eta_2}(x,y)$ совместную функцию распределения случайных величин η_1, η_2; $G_{\eta_1,\eta_3}(x,z)$ – совместную функцию распределения случайных величин η_1, η_3; $G_{\eta_2,\eta_3}(y,z)$ – совместную функцию распределения случайных величин η_2, η_3; $G_{\eta_1}(x)$ – функция распределения случайной величины η_1; $G_{\eta_2}(y)$ – функция распределения случайной величины η_2; $G_{\eta_3}(z)$ – функция распределения случайной величины η_3.

Теорема 2. Справедливо соотношение:

$$G_{\eta_1,\eta_2,\eta_3}(x, y, z) = \\ = \begin{cases} G_{\eta_1,\eta_2}(x,y) + G_{\eta_1,\eta_3}(x,z) - G_{\eta_1}(x), \ x \leq y, \ z, \\ G_{\eta_1,\eta_2}(x,y) + G_{\eta_2,\eta_3}(y,z) - G_{\eta_2}(y), \ y \leq z, \ x, \\ G_{\eta_1,\eta_3}(x,z) + G_{\eta_2,\eta_3}(y,z) - G_{\eta_3}(z), \ z \leq y, \ x. \end{cases}$$

Доказательство. В силу транзитивности справедливы неравенства; $\eta_2 \geq \min(\eta_1, \eta_3)$, $\eta_3 \geq \min(\eta_1, \eta_2)$. Рассмотрим три случая.

I. При $x \leq y, \ x \leq z$. Событие $(\eta_1 < x) \subseteq (\min(\eta_2, \eta_3) < x)$, так как по определению нечеткого отношения $\eta_1 \geq \min(\eta_2, \eta_3)$ (транзитивность). В свою очередь

$$(\min(\eta_2, \eta_3) < x) = (\eta_2 < x) \cup (\eta_3 < x).$$

Так как $x \leq y, \ x \leq z$,

$$(\eta_2 < x) \cup (\eta_3 < x) \subseteq (\eta_2 < y) \cup (\eta_3 < z).$$

Таким образом,

$$(\eta_1 < x) \subset (\eta_2 < y) \cup (\eta_3 < z),$$

следовательно, события

$$((\eta_1 < x) \cup (\eta_2 < y) \cup (\eta_3 < z))$$

и $(\eta_2 < y) \cup (\eta_3 < z)$ совпадают, и их вероятности равны:

$$P((\eta_1 < x) \cup (\eta_2 < y) \cup (\eta_3 < z)) = \\ = P((\eta_2 < y) \cup (\eta_3 < z)).$$

С другой стороны, вероятность объединения событий $(\eta_1 < x) \cup (\eta_2 < y) \cup (\eta_3 < z)$ равна:

$$P((\eta_1 < x) \cup (\eta_2 < y) \cup (\eta_3 < z)) = \\ = P(\eta_1 < x) + P(\eta_2 < y) + P(\eta_3 < z) - \\ - P((\eta_1 < x) \cap (\eta_2 < y)) - P((\eta_1 < x) \cap (\eta_3 < z)) - \\ - P((\eta_2 < y) \cap (\eta_3 < z)) + \\ + P((\eta_1 < x) \cap (\eta_2 < y) \cap (\eta_3 < z))$$

Вероятность объединения событий $(\eta_2 < y) \cup (\eta_3 < z)$ равна:

$$P((\eta_2 < y) \cup (\eta_3 < z)) = P(\eta_2 < y) + \\ + P(\eta_3 < z) - P((\eta_2 < y) \cap (\eta_3 < z)).$$

Приравняв правые части двух предыдущих выражений и произведя простейшие преобразования, получим:

$$P(\eta_1 < x) - P((\eta_1 < x) \cap (\eta_2 < y)) - \\ - P((\eta_1 < x) \cap (\eta_3 < z)) + \\ + P((\eta_1 < x) \cap (\eta_2 < y) \cap (\eta_3 < z)) = 0$$

или

$$G_{\eta_1,\eta_2,\eta_3}(x,y,z) = \\ = G_{\eta_1,\eta_2}(x,y) + G_{\eta_1,\eta_3}(x,z) - G_{\eta_1}(x).$$

II. При $y \leq z, \ y \leq x$. Аналогично получаем:

$$G_{\eta_1,\eta_2,\eta_3}(x,y,z) = \\ = G_{\eta_1,\eta_2}(x,y) + G_{\eta_2,\eta_3}(y,z) - G_{\eta_2}(y).$$

III. При $z \le y,\ z \le x$.

$$G_{\eta_1,\eta_2,\eta_3}(x,y,z) = \\ = G_{\eta_1,\eta_3}(x,z) + G_{\eta_2,\eta_3}(y,z) - G_{\eta_3}(z).$$

Собрав все три случая в одно соотношение, получим искомое утверждение. Теорема 2 доказана.

Введем обозначения, которые будут использоваться во всех последующих теоремах: $\theta(m_i, m_j)$ – нечеткое отношение толерантности, заданное на 3-элементном множестве $M = \{m_1, m_2, m_3\}$. Пусть $\theta(m_1, m_2) = \xi_1$, $\theta(m_1, m_3) = \xi_2$, $\theta(m_2, m_3) = \xi_3$ – случайные величины с совместной функцией распределения $F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,y,z)$, принимающие значения на отрезке $[0,1]$.

Соответственно $F_{\xi_1,\xi_2}(x,y)$, $F_{\xi_1,\xi_3}(x,z)$, $F_{\xi_2,\xi_3}(y,z)$ — совместные функции распределения пар случайных величин ξ_1,ξ_2, ξ_1,ξ_3, ξ_2,ξ_3.

Пусть $\bar\theta$-транзитивное замыкание θ $\bar\theta(m_1,m_2) = \eta_1$, $\bar\theta(m_1,m_3) = \eta_2$, $\bar\theta(m_2,m_3) = \eta_3$. Обозначим через $G_{\eta_1,\eta_2,\eta_3}(x,\ y,\ z)$ совместную функцию распределения η_1, η_2, η_3.

Соответственно $G_{\eta_1,\eta_2}(x,y)$, $G_{\eta_1,\eta_3}(x,z)$, $G_{\eta_2,\eta_3}(y,z)$ – совместные функции распределения пар случайных величин η_1,η_2, η_1,η_3, η_2,η_3; Функции $G_{\eta_1}(x)$, $G_{\eta_2}(y)$, $G_{\eta_3}(z)$ – функции распределения случайных величин η_1, η_2, η_3.

Теорема 3. Справедливо равенство:

$$G_{\eta_1,\eta_2,\eta_3}(x,\ y,\ z) = \\ = \begin{cases} F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,\ x,\ z) + F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,\ y,\ x) - \\ -F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,\ x,\ x),\ x \le y,\ x \le z, \\ F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,\ y,\ y) + F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(y,\ y,\ z) - \\ -F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(y,\ y,\ y),\ y \le z,\ y \le x, \\ F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,\ z,\ z) + F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(z,\ y,\ z) - \\ F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(z,z,z),\ z \le y,\ z \le x. \end{cases}.$$

Доказательство. По теореме 1;

$$\eta_1 = \max(\xi_1, \min(\xi_2,\xi_3)), \\ \eta_2 = \max(\xi_2, \min(\xi_1,\xi_3)), \\ \eta_3 = \max(\xi_3, \min(\xi_1,\xi_2)).$$

Рассмотрим события:

$$A = (\eta_1 < x) = (\max(\xi_1,\ \min(\xi_2,\xi_3)) < x) = \\ = ((\xi_1 < x) \wedge (\xi_2 < x \vee \xi_3 < x)), \\ B = (\eta_2 < y) = (\max(\xi_2,\ \min(\xi_1,\xi_3)) < y) = \\ = ((\xi_2 < y) \wedge (\xi_1 < y \vee \xi_3 < y)), \\ C = (\eta_3 < z) = (\max(\xi_3,\ \min(\xi_1,\xi_2)) < z) = \\ = ((\xi_3 < z) \wedge (\xi_1 < z \vee \xi_2 < z)).$$

Найдем вероятность произведения событий $P(A \cap B \cap C) = G_{\eta_1,\eta_2,\eta_3}(x,\ y,\ z)$.

При $x \le y \le z$, имеем:

$$G_{\eta_1,\eta_2,\eta_3}(x,\ y,\ z) = \\ = P(\xi_1 < x,\ \xi_2 < y,\ \xi_3 < z, (\xi_2 < x \vee \xi_3 < x)) = \\ = P(\xi_1 < x,\ \xi_2 < x,\ \xi_3 < x) + \\ + P(\xi_1 < x,\ \xi_2 < x,\ x < \xi_3 < z) + \\ + P(\xi_1 < x,\ x < \xi_2 < y,\ \xi_3 < x) = \\ = F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,\ x,\ x) + F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,\ x,\ z) - \\ - F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,\ x,\ x) + F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,\ y,\ x) - \\ - F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,\ x,\ x) = F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,\ x,\ z) + \\ + F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,\ y,\ x) - F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,\ x,\ x).$$

Аналогичными выкладками получим:

При $y \le z \le x$: $\quad G_{\eta_1,\eta_2,\eta_3}(x,\ y,\ z) =$

$$= P(\xi_1 < x,\ \xi_2 < y,\ \xi_3 < z, (\xi_1 < y \vee \xi_3 < y)) = \\ = F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,\ y,\ y) + F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(y,\ y,\ z) - \\ - F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(y,\ y,\ y).$$

При $z \le x \le y$: $\quad G_{\eta_1,\eta_2,\eta_3}(x,\ y,\ z) =$

$$= P(\xi_1 < x,\ \xi_2 < y,\ \xi_3 < z, (\xi_1 < z \vee \xi_2 < z)) = \\ = F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,\ z,\ z) + F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(z,\ y,\ z) - \\ - F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(z,\ z,\ z).$$

При $z \le y \le x$: $\quad G_{\eta_1,\eta_2,\eta_3}(x,\ y,\ z) =$

$$= P(\xi_1 < x,\ \xi_2 < y,\ \xi_3 < z, (\xi_1 < z \vee \xi_2 < z)) = \\ = F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,\ z,\ z) + F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(z,\ y,\ z) - \\ - F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(z,\ z,\ z).$$

При $y \le x \le z$: $\quad G_{\eta_1,\eta_2,\eta_3}(x,\ y,\ z) =$

$$= P(\xi_1 < x,\ \xi_2 < y,\ \xi_3 < z, (\xi_1 < y \vee \xi_3 < y)) = \\ = F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,\ y,\ y) +_{\xi_1,\xi_2,\xi_3} (y,\ y,\ z) - \\ - F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(y,\ y,\ y).$$

При $x \le z \le y$: $\quad G_{\eta_1,\eta_2,\eta_3}(x,\ y,\ z) =$

$$= P(\xi_1 < x,\ \xi_2 < y,\ \xi_3 < z, (\xi_2 < x \vee \xi_3 < x)) = \\ = F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,\ x,\ z) + F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,\ y,\ x) - \\ - F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,\ x,\ x).$$

Таким образом: $\quad G_{\eta_1,\eta_2,\eta_3}(x,\ y,\ z) =$

$$= \begin{cases} F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,\ x,\ z) + F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,\ y,\ x) - \\ -F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,\ x,\ x),\ x \le y,\ x \le z, \\ F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,\ y,\ y) + F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(y,\ y,\ z) - \\ -F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(y,\ y,\ y),\ y \le z,\ y \le x, \\ F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,\ z,\ z) + F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(z,\ y,\ z) - \\ F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(z,z,z),\ z \le y,\ z \le x. \end{cases}.$$

Теорема 3 доказана.

Для функций распределения $G_{\eta_1,\eta_2}(x,y)$, $G_{\eta_1,\eta_3}(x,z)$, $G_{\eta_2,\eta_3}(y,z)$ пар случайных величин η_1,η_2, η_1,η_3, η_2,η_3, верна

Теорема 4. Справедливы равенства:

$$G_{\eta_1,\eta_2}(x,y)=\begin{cases}F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,y,x)+F_{\xi_1,\xi_2}(x,x)-\\ -F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,x,x),\ \text{при } x\le y,\\ F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,y,y)+F_{\xi_1,\xi_2}(y,y)-\\ -F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(y,y,y),\ \text{при } y\le x.\end{cases}$$

$$G_{\eta_1,\eta_3}(x,z)=\begin{cases}F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,x,z)+F_{\xi_1,\xi_3}(x,x)-\\ -F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,x,x),\ \text{при } x\le z,\\ F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,z,z)+F_{\xi_1,\xi_3}(z,z)-\\ -F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(z,z,z),\ \text{при } z\le x.\end{cases}$$

$$G_{\eta_2,\eta_3}(y,z)=\begin{cases}F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(y,y,z)+F_{\xi_2,\xi_3}(y,y)-\\ -F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(y,y,y),\ \text{при } y\le z,\\ F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(z,y,z)+F_{\xi_2,\xi_3}(z,z)-\\ -F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(z,z,z),\ \text{при } z\le y.\end{cases}$$

Доказательство. По теореме 1;

$$\eta_1=\max(\xi_1,\min(\xi_2,\xi_3)),$$
$$\eta_2=\max(\xi_2,\min(\xi_1,\xi_3)).$$

Рассмотрим события:

$$A=(\eta_1<x)=(\max(\xi_1,\,\min(\xi_2,\xi_3))<x)=$$
$$=((\xi_1<x)\wedge(\xi_2<x\vee\xi_3<x)),$$
$$B=(\eta_2<y)=(\max(\xi_2,\,\min(\xi_1,\xi_3))<y)=$$
$$=((\xi_2<y)\wedge(\xi_1<y\vee\xi_3<y)).$$

Найдем вероятность произведения событий $P(A\cap B)=G_{\eta_1,\eta_2}(x,\,y)$.

При $x\le y$, имеем: $G_{\eta_1,\eta_2}(x,y)=$

$$=P(\xi_1<x,\xi_2<y,(\xi_2<x\vee\xi_3<x))=$$
$$=P(\xi_1<x,\xi_2<x,\xi_3<x)+$$
$$+P(\xi_1<x,x<\xi_2<y,\xi_3<x)+$$
$$+P(\xi_1<x,\xi_2<x,x<\xi_3)=$$
$$=F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,x,x)+F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,y,x)-$$
$$-F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,x,x)+F_{\xi_1,\xi_2}(x,x)-$$
$$-F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,x,x)=$$
$$=F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,y,x)+F_{\xi_1,\xi_2}(x,x)-$$
$$-F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,x,x).$$

Аналогично находим:

При $y\le x$, имеем: $G_{\eta_1,\eta_2}(x,y)=$

$$=F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,y,y)+F_{\xi_1,\xi_2}(y,y)-$$
$$-F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(y,y,y).$$

Следовательно, в силу симметрии получаем:

$$G_{\eta_1,\eta_2}(x,y)=\begin{cases}F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,y,x)+F_{\xi_1,\xi_2}(x,x)-\\ -F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,x,x),\ \text{при } x\le y,\\ F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,y,y)+F_{\xi_1,\xi_2}(y,y)-\\ -F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(y,y,y),\ \text{при } y\le x.\end{cases}$$

$$G_{\eta_1,\eta_3}(x,z)=\begin{cases}F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,x,z)+F_{\xi_1,\xi_3}(x,x)-\\ -F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,x,x),\ \text{при } x\le z,\\ F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,z,z)+F_{\xi_1,\xi_3}(z,z)-\\ -F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(z,z,z),\ \text{при } z\le x.\end{cases}$$

$$G_{\eta_2,\eta_3}(y,z)=\begin{cases}F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(y,y,z)+F_{\xi_2,\xi_3}(y,y)-\\ -F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(y,y,y),\ \text{при } y\le z,\\ F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(z,y,z)+F_{\xi_2,\xi_3}(z,z)-\\ -F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(z,z,z),\ \text{при } z\le y.\end{cases}$$

Теорема 4 доказана.

Теорема 5. Справедливы равенства:

$$G_{\eta_1}(x)=F_{\xi_1,\xi_3}(x,x)+F_{\xi_1,\xi_2}(x,x)-F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,x,x),$$
$$G_{\eta_2}(y)=F_{\xi_2,\xi_3}(y,y)+F_{\xi_1,\xi_2}(y,y)-F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(y,y,y),$$
$$G_{\eta_3}(z)=F_{\xi_1,\xi_3}(z,\,z)+F_{\xi_2,\xi_3}(z,z)-F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(z,z,z).$$

Доказательство. По теореме 1;

$$\eta_1=\max(\xi_1,\min(\xi_2,\xi_3)).$$

Рассмотрим событие:

$$A=(\eta_1<x)=(\max(\xi_1,\,\min(\xi_2,\xi_3))<x)=$$
$$=((\xi_1<x)\wedge(\xi_2<x\vee\xi_3<x)).$$

Найдем функцию распределения, т.е. вероятность события $P(A)=G_{\eta_1}(x)$.

$$G_{\eta_1}(x)=P(\max(\xi_1,\min(\xi_2,\xi_3))<x)=$$
$$=P(\xi_1<x,(\xi_2<x\vee\xi_3<x))=$$
$$=P(\xi_1<x,\xi_2<x,\xi_3<x)+$$
$$+P(\xi_1<x,x<\xi_2,\xi_3<x)+$$
$$+P(\xi_1<x,\xi_2<x,x<\xi_3)=$$
$$=F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,x,x)+F_{\xi_1,\xi_3}(x,x)-$$
$$-F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,x,x)+F_{\xi_1,\xi_2}(x,x)-$$
$$-F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,x,x)=$$
$$=F_{\xi_1,\xi_3}(x,x)+F_{\xi_1,\xi_2}(x,x)-F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x,x,x).$$

Аналогично найдем две другие функции распределения

$$G_{\eta_2}(y)=F_{\xi_2,\xi_3}(y,y)+F_{\xi_1,\xi_2}(y,y)-F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(y,y,y).$$
$$G_{\eta_3}(z)=F_{\xi_1,\xi_3}(z,z)+F_{\xi_2,\xi_3}(z,z)-F_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(z,z,z).$$

Теорема 5 доказана.

Библиографический список

1. Zadeh L.A. Fuzzy sets. Information and Control. – 1965. – Vol. 8.

2. Batyrshin I.Z., Rudas T., Klimova A. On general scheme of invariant clustering procedures based on fuzzy similarity relation. International Conference on Fuzzy Sets and Soft Computing in Economics and Finance FSSCEF 2004 Proceedings Volume I. – Saint-Petersburg, 2004.

3. Berestovskii V.N. Ultrametric spaces. Proceedings on analysis and geometry. International conference in honor of the 70th birthday of Professor Yu.G. Reshetnyak. – Novosibirsk, 2000.