УДК 512.54.01

В.В. Лодейщикова

Об одном квазимногообразии Леви экспоненты 8

V.V. Lodeyshchikova

On a Levi Quasi-variety of Exponent 8

Для произвольного класса M групп обозначим через $L(M)$ класс всех групп G, в которых нормальное замыкание любого элемента принадлежит M; qM – квазимногообразие, порожденное M. В работе доказано существование класса K такого, что во всякой группе из K централизатор любого элемента, не принадлежащего центру этой группы, – абелева подгруппа, но класс $L(qK)$ содержит нильпотентную группу ступени 4.

Ключевые слова: квазимногообразие, классы Леви, нильпотентные группы.

For an arbitrary class of M groups, denote by $L(M)$ class of all groups G for which the normal closure of any element belongs to M; qM is the quasi-variety generated by M. In this paper we prove that there is the class K such that in every group of K the centralizer of each element outside the center of the group is an abelian subgroup and $L(qK)$ contains a nilpotent group of class 4.

Key words: quasivariety, Levi classes, nilpotent groups.

Для некоторого класса $\mathcal{M}$ групп обозначим через $L(\mathcal{M})$ класс всех групп G, в которых нормальное замыкание $(x)^G$ любого элемента x из G принадлежит $\mathcal{M}$. Класс $L(\mathcal{M})$ будем называть *классом Леви, порожденным* $\mathcal{M}$. Классы Леви были введены в [1] под влиянием теоремы Леви [2], в которой дана классификация групп с абелевыми нормальными замыканиями вида $(x)^G$. В работе [3] доказано, что если $\mathcal{M}$ – многообразие групп, то $L(\mathcal{M})$ – также многообразие групп. Если $\mathcal{M}$ – квазимногообразие групп, то, согласно [4], $L(\mathcal{M})$ является квазимногообразием групп.

Через $\mathcal{N}_c$ обозначим многообразие нильпотентных групп ступени $\leq c$, через $F_n(\mathcal{M})$ – свободную группу в квазимногообразии $\mathcal{M}$ ранга n. Как обычно, под $q\mathcal{K}$ будем понимать квазимногообразие, порожденное классом групп $\mathcal{K}$. Если класс $\mathcal{K} = \{G\}$ содержит лишь одну группу G, то вместо $q\mathcal{K}$ будем писать просто qG. В [5] доказано, что класс $L(\mathcal{N}_2)$ совпадает с многообразием 3-энгелевых групп.

В [4] показано, что если $\mathcal{K}$ – произвольное множество нильпотентных групп ступени 2 без элементов порядков 2 и 5, и централизатор любого элемента, не принадлежащего центру каждой группы из $\mathcal{K}$, – абелева подгруппа, то $L(q\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{N}_3$. В [6] данный результат был усилен и доказана аналогичная теорема для произвольного множества нильпотентных групп ступени 2 без элементов порядка 2.

В [7] установлено, что если $\mathcal{K}$ – произвольный класс нильпотентных ступени ≤ 2 групп без кручения, содержащий неабелеву группу, и во всякой группе из $\mathcal{K}$ централизатор любого элемента, не принадлежащего центру этой группы, является абелевой подгруппой, то $L(q\mathcal{K})$ совпадает с квазимногообразием нильпотентных групп ступени ≤ 3 без кручения. Из [7] также следует, что если $\mathcal{K}$ – произвольный класс нильпотентных ступени ≤ 2 групп экспоненты p (p – простое число, $p \neq 2$), содержащий неабелеву группу, и во всякой группе из $\mathcal{K}$ централизатор любого элемента, не принадлежащего центру этой группы, является абелевой подгруппой, то $L(q\mathcal{K})$ совпадает с многообразием нильпотентных групп ступени ≤ 3 экспоненты p.

Возникает естественный вопрос о том, всегда ли класс $L(q\mathcal{K})$, где $\mathcal{K}$ – произвольный класс нильпотентных ступени ≤ 2 групп такой, что во всякой группе из $\mathcal{K}$ централизатор любого элемента, не принадлежащего центру этой группы, – абелева подгруппа, является нильпотентным ступени ≤ 3, как это было в работах [4, 6, 7].

В настоящей работе доказано существование класса $\mathcal{K}$ такого, что во всякой группе из $\mathcal{K}$ централизатор любого элемента, не принадлежащего центру этой группы, – абелева подгруппа, но класс $L(q\mathcal{K})$ содержит нильпотентную группу ступени 4.

Напомним некоторые определения и обозначения. Как обычно, $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$,

$[x, y, z] = [[x, y], z]$, гр$(a_1, a_2, \ldots)$ – группа, порожденная элементами $a_1, a_2, \ldots$, $(x)^G =$ гр$(g^{-1}xg \mid g \in G)$ – нормальное замыкание элемента x в группе G, G' – коммутант группы G.

В дальнейшем будем использовать следующие коммутаторные тождества, истинные во всякой группе [8]:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)([xy, z] = [x, z][x, z, y][y, z]),$$

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)([x, yz] = [x, z][x, y][x, y, z]),$$

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)([x, y^{-1}, z]^y[y, z^{-1}, x]^z[z, x^{-1}, y]^x = 1).$$

Нам понадобится *признак принадлежности* конечно определенной группы G квазимногообразию $q\mathcal{K}$, являющийся частным случаем теоремы 3 [9] (см. также: [10]): *конечно-определенная группа G принадлежит квазимногообразию $q\mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда для любого элемента $g \in G$, $g \neq 1$ существует гомоморфизм φ_g группы G в некоторую группу из класса $\mathcal{K}$ такой, что $\varphi_g(g) \neq 1$.*

Также нам будет необходима

Теорема (Дик) [11]. *Пусть группа G имеет в квазимногообразии $\mathcal{N}$ представление*

$$\text{гр}(\{x_i \mid i \in I\} \parallel \{r_j(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{l(j)}}) = 1 \mid j \in J\}).$$

Предположим, что $H \in \mathcal{N}$ и группа H содержит множество элементов $\{g_i \mid i \in I\}$ такое, что для всякого $j \in J$ равенство $r_j(g_{j_1}, \ldots, g_{j_{l(j)}}) = 1$ истинно в H. Тогда отображение $x_i \to g_i (i \in I)$ продолжается до гомоморфизма G в H.

При написании тождеств кванторы всеобщности иногда будут опускаться.

Пусть $\mathcal{M}_1$ – многообразие групп, заданное в $\mathcal{N}_2$ тождеством

$$(\forall x)(x^8 = 1); \tag{1}$$

$\mathcal{M}_2$ – многообразие групп, заданное в $\mathcal{N}_4$ тождеством (1).

Будем пользоваться следующим легко проверяемым фактом:

Утверждение 1. *В любой нильпотентной ступени ≤ 4 3-энгелевой группе справедливы следующие тождества:*

$$[b, a^k] = [b, a]^k [b, a, a]^{\frac{k^2-k}{2}},$$

$$[b^n, a^k] = [b, a]^{nk} [b, a, a]^{\frac{k^2-k}{2}n} [b, a, b]^{\frac{n^2-n}{2}k} \cdot$$

$$\cdot [b, a, a, b]^{\frac{(k^2-k)(n^2-n)}{4}},$$

где n и k – произвольные целые числа.

Рассмотрим группу H, имеющую в многообразии $\mathcal{M}_1$ представление

$$H = \text{гр}(a, b, c, d, f \parallel c = [b, a], f = [d, a], [a, c] = 1,$$

$$[a, f] = 1, [b, c] = 1, [b, d] = 1, [b, f] = 1, [c, d] = 1,$$

$$[c, f] = 1, [d, f] = 1, a^8 = 1,$$

$$b^4 = 1, c^2 = 1, d^2 = 1, f^2 = 1).$$

На множестве символов $\{a^k b^l c^m d^s f^t | 0 \leq k < 8,\ 0 \leq l < 4,\ 0 \leq m, s, t < 2\}$ определим операции следующим образом:

$$(a^{k_1} b^{l_1} c^{m_1} d^{s_1} f^{t_1}) \cdot (a^{k_2} b^{l_2} c^{m_2} d^{s_2} f^{t_2}) = a^k b^l c^m d^s f^t,$$

где $k \equiv k_1 + k_2 (\mathrm{mod}\ 8)$, $l \equiv l_1 + l_2 (\mathrm{mod}\ 4)$, $m \equiv m_1 + m_2 + l_1 k_2 (\mathrm{mod}\ 2)$, $s \equiv s_1 + s_2 (\mathrm{mod}\ 2)$, $t \equiv t_1 + t_2 + s_1 k_2 (\mathrm{mod}\ 2)$,

$$(a^k b^l c^m d^s f^t)^{-1} = a^{k_0} b^{l_0} c^{m_0} d^{s_0} f^{t_0},$$

где $k + k_0 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 8)$, $l + l_0 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$, $m + m_0 + lk_0 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$, $s + s_0 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$, $t + t_0 + sk_0 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$.

Несложная рутинная проверка показывает, что мы получим группу, изоморфную H. Следовательно, любой элемент H однозначным образом представим в виде $h = a^k b^l c^m d^s f^t$, где $0 \leq k < 8$, $0 \leq l < 4$, $0 \leq m, s, t < 2$.

Утверждение 2. *В группе H централизатор любого элемента, не принадлежащего центру группы H, – абелева подгруппа.*

Доказательство. Пусть $h_i = a^{k_i} b^{l_i} c^{m_i} d^{s_i} f^{t_i}$, где $0 \leq k_i < 8$, $0 \leq l_i < 4$, $0 \leq m_i, s_i, t_i < 2$, $[h_1, h_2] = 1$, $[h_1, h_3] = 1$ и h_i не принадлежат центру группы H, $i = 1, 2, 3$. Для доказательства утверждения достаточно показать, что $[h_2, h_3] = 1$.

Применяя коммутаторные тождества для $i = 1, 2$, получим следующие равенства:

$$1 = [h_1, h_i] = [a^{k_1} b^{l_1} c^{m_1} d^{s_1} f^{t_1}, a^{k_i} b^{l_i} c^{m_i} d^{s_i} f^{t_i}] =$$

$$= [a^{k_1} b^{l_1} d^{s_1}, a^{k_i} b^{l_i} d^{s_i}] =$$

$$= [a^{k_1}, b^{l_i}][a^{k_1}, d^{s_i}][b^{l_1}, a^{k_i}][d^{s_1}, a^{k_i}] =$$

$$= [b, a]^{l_1 k_i - k_1 l_i} [d, a]^{s_1 k_i - k_1 s_i} =$$

$$= c^{l_1 k_i - k_1 l_i} f^{s_1 k_i - k_1 s_i}.$$

Надо доказать, что верно равенство

$$[h_2, h_3] = c^{l_2 k_3 - k_2 l_3} f^{s_2 k_3 - k_2 s_3} = 1. \tag{2}$$

Заметим, что если $k_2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$ и $k_3 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$, то равенство (2) верно.

Случай 1. $k_1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$. Получим, что $(c^{l_1} f^{s_1})^{k_i} = 1$, $i = 2, 3$. Поскольку можно предполагать, что $k_2 \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$ либо $k_3 \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$, то $l_1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$ и $s_1 = 0$. В этом случае элемент h_1 принадлежит центру группы H, что не так.

Случай 2. $k_1 \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$, $k_2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$, $k_3 \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$. Имеем, что $(c^{l_2} f^{s_2})^{k_1} = 1$. Следовательно, $l_2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$, $s_2 = 0$ и (2) верно.

Случай 3. $k_1 \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$, $k_2 \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$, $k_3 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$. Поскольку в этом случае $(c^{l_3} f^{s_3})^{k_1} = 1$, то $l_3 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$, $s_3 = 0$ и (2) верно.

Случай 4. $k_1 \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$, $k_2 \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$, $k_3 \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$. Получим, что

$$(c^{l_1 k_2 - k_1 l_2} f^{s_1 k_2 - k_1 s_2})^{-k_3} (c^{l_1 k_3 - k_1 l_3} f^{s_1 k_3 - k_1 s_3})^{k_2} =$$

$$= (c^{l_2 k_3 - k_2 l_3} f^{s_2 k_3 - k_2 s_3})^{k_1} = 1.$$

Значит, $c^{l_2 k_3 - k_2 l_3} f^{s_2 k_3 - k_2 s_3} = 1$. Утверждение доказано.

Теорема. *Существует класс $\mathcal{K}$ из $\mathcal{M}_1$ такой, что во всякой группе из $\mathcal{K}$ централизатор любого элемента, не принадлежащего центру этой группы, – абелева подгруппа, но класс $L(q\mathcal{K})$ содержит нильпотентную группу ступени 4.*

Доказательство. Пусть $F_2(\mathcal{M}_2) =$ гр(x_1, x_2), $N =$ гр$([x_2, x_1]^4, [x_2, x_1, x_1]^2, [x_2, x_1, x_2]^2, [x_2, x_1, x_1, x_2]^2, [x_2, x_1, x_1, x_1], [x_2, x_1, x_2, x_2])$. Заметим, что $N \lhd F_2(\mathcal{M}_2)$. Рассмотрим $F = F_2(\mathcal{M}_2)/N$. Элементы фактор-группы F будем обозначать так же, как и элементы группы $F_2(\mathcal{M}_2)$.

На множестве символов

$$x_1^k x_2^n [x_2, x_1]^l [x_2, x_1, x_1]^m [x_2, x_1, x_2]^s [x_2, x_1, x_2, x_1]^t,$$

где $0 \le k, n < 8$, $0 \le l < 4$, $0 \le m, s, t < 2$, определим операции следующим образом: если $h_i = x_1^{k_i} x_2^{n_i} [x_2, x_1]^{l_i} [x_2, x_1, x_1]^{m_i} \cdot [x_2, x_1, x_2]^{s_i} [x_2, x_1, x_2, x_1]^{t_i}$, $0 \le k_i, n_i < 8$, $0 \le l_i < 4$, $0 \le m_i, s_i, t_i < 2$, $i = 1, 2, 3$, то

$$h_1 \cdot h_2 = h_3,$$

где $k_3 \equiv k_1 + k_2 (\mathrm{mod}\ 8)$, $n_3 \equiv n_1 + n_2 (\mathrm{mod}\ 8)$,
$l_3 \equiv l_1 + l_2 + n_1 k_2 (\mathrm{mod}\ 4)$,
$m_3 \equiv m_1 + m_2 + l_1 k_2 + \frac{k_2^2 - k_2}{2} n_1 (\mathrm{mod}\ 2)$,
$s_3 \equiv s_1 + s_2 + \frac{n_1^2 - n_1}{2} k_2 + (n_1 k_2 + l_1) n_2 (\mathrm{mod}\ 2)$,
$t_3 \equiv t_1 + t_2 + s_1 k_2 + (\frac{k_2^2 - k_2}{2} n_1 + l_1 k_2 + m_1) n_2 + \frac{(n_1^2 - n_1)(k_2^2 - k_2)}{4} (\mathrm{mod}\ 2)$,

$$h_1^{-1} = h_2,$$

где $k_1 + k_2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 8)$, $n_1 + n_2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 8)$,
$l_1 + l_2 + n_1 k_2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$,
$m_1 + m_2 + l_1 k_2 + \frac{k_2^2 - k_2}{2} n_1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$,
$s_1 + s_2 + \frac{n_1^2 - n_1}{2} k_2 + (n_1 k_2 + l_1) n_2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$,
$t_1 + t_2 + s_1 k_2 + (\frac{k_2^2 - k_2}{2} n_1 + l_1 k_2 + m_1) n_2 + \frac{(n_1^2 - n_1)(k_2^2 - k_2)}{4} \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$.

Несложная рутинная проверка показывает, что мы получим группу изоморфную F. Следовательно, любой элемент F однозначным образом представим в виде $f = x_1^k x_2^n [x_2, x_1]^l [x_2, x_1, x_1]^m \cdot [x_2, x_1, x_2]^s [x_2, x_1, x_2, x_1]^t$, где $0 \le k, n < 8$, $0 \le l < 4$, $0 \le m, s, t < 2$. Поскольку $[x_2, x_1, x_1, x_2] \ne 1$, то группа F нильпотентна ступени 4.

Рассмотрим многообразие $\mathcal{R}$, заданное в $\mathcal{N}_4$ тождеством (1) и следующими формулами:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)([x, y, z]^2 = 1), \tag{3}$$

$$(\forall x)(\forall y)([x, y, y, y] = 1). \tag{4}$$

Пусть $\widetilde{F} =$ гр(x_1, x_2) – свободная группа в $\mathcal{R}$. Тогда в $\widetilde{F}$ выполняются следующие соотношения: $[x_2, x_1]^4 = 1$, $[x_2, x_1, x_1]^2 = 1$, $[x_2, x_1, x_2]^2 = 1$, $[x_2, x_1, x_1, x_2]^2 = 1$, $[x_2, x_1, x_1, x_1] = 1$, $[x_2, x_1, x_2, x_2] = 1$. Несложно проверить, что $F \in \mathcal{R}$, значит, $F \cong \widetilde{F}$ и F – свободная группа в многообразии $\mathcal{R}$. Надо показать, что для любого $f \in F$ нормальное замыкание $(f)^F \in qH$ и, следовательно, $F \in L(qH)$.

Случай 1. Пусть сначала $f = x_1$. Тогда $(x_1)^F =$ гр$(x_1, [x_2, x_1], [x_2, x_1, x_1], [x_2, x_1, x_2], [x_2, x_1, x_1, x_2])$. В группе $(x_1)^F$ выполняются следующие соотношения: $[x_2, x_1]^4 = 1$, $[x_2, x_1, x_1]^2 = 1$, $[x_2, x_1, x_2]^2 = 1$, $[x_2, x_1, x_1, x_2]^2 = 1$, $[x_2, x_1, x_1, x_1] = 1$, $[x_2, x_1, x_2, x_2] = 1$.

По теореме Дика отображение $a \to x_1$, $b \to [x_2, x_1]$, $c \to [x_2, x_1, x_1]$, $d \to [x_2, x_1, x_2]$, $f \to [x_2, x_1, x_1, x_2]$ продолжаемо до гомоморфизма $\varphi : H \to (x_1)^F$. Несложно проверить, что $ker\varphi = (1)$. Следовательно, $(x_1)^F \in qH$.

Случай 2. Пусть теперь $f = x_1^{n_1} x_2^{n_2} [x_2, x_1]^l [x_2, x_1, x_1]^m [x_2, x_1, x_2]^s [x_2, x_1, x_2, x_1]^t$.

Из утверждения 1 следует, что $[x_2, x_1, f] = [x_2, x_1, x_1]^{n_1} [x_2, x_1, x_2]^{n_2}$, $[x_2, x_1, x_1, f] = [x_2, x_1, x_1, x_2]^{n_2}$ и $[x_2, x_1, x_2, f] = [x_2, x_1, x_1, x_2]^{n_1}$. Таким образом, если $n_i \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$, $i = 1, 2$, то $(f)^F$ — абелева подгруппа и $(f)^F \in qH$. Рассмотрим случай, когда существует i такое, что $n_i \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$. Можно считать, что $i = 1$.

Пусть $\overline{F} = F/F'$. Из того, что НОД$(n_1, 8) = 1$ следует, что найдется целое число v такое, что в $\overline{F}$ будет верно равенство $\overline{x}_1 = \overline{f}^v \overline{x}_2^{n_2 v}$. Значит, элемент $\overline{f}$ можно дополнить до системы порождающих группы $\overline{F}$. Из [8, гл. 6, § 1, теорема 3] следует, что тогда и элемент f можно дополнить до системы порождающих группы F.

Так как F – свободная в $\mathcal{R}$ группа, то отображение $x_1 \to f$ продолжаемо до изоморфизма $\psi : F \to F$. Следовательно, $(x_1)^F \cong (f)^F$ и поэтому $(f)^F \in qH$.

Получили, что для любого $f \in F$ нормальное замыкание $(f)^F \in qH$ и, следовательно, $F \in L(qH)$.

Нашли класс $\mathcal{K} = \{H\}$ такой, что во всякой группе из $\mathcal{K}$ централизатор любого элемента, не принадлежащего центру этой группы, – абелева подгруппа, но класс $L(q\mathcal{K})$ содержит нильпотентную группу ступени 4. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность профессору А.И. Будкину за полезные советы и постоянное внимание к работе.

Библиографический список

1. Kappe L.C. On Levi-formations // Arch. Math. – 1972. – №6.
2. Levi F.W. Groups in which the commutator operation satisfies certain algebraic condition // J. Indian Math. Soc. – 1942. – №6.
3. Morse R.F. Levi-properties generated by varieties // The mathematical legacy of Wilhelm Magnus. Groups, geometry and special functions (Contemp. Math., 169), Providence, RI, Am. Math. Soc. – 1994.
4. Будкин А.И. Квазимногообразия Леви // Сиб. матем. журнал. – 1999. – №2.
5. Kappe L.C. On three-Engel groups // Bull. Austral. Math. Soc. – 1972. – №3.
6. Будкин А.И., Таранина Л.В. О квазимногообразиях Леви, порожденных нильпотентными группами // Сиб. матем. журнал. – 2000. – №2.
7. Лодейщикова В.В. О квазимногообразиях Леви, порожденных нильпотентными группами // Известия Алтайского государственного университета. – 2009. – №1.
8. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. – М., 1972.
9. Будкин А.И., Горбунов В.А. К теории квазимногообразий алгебраических систем // Алгебра и логика. – 1975. – №2.
10. Будкин А.И. Квазимногообразия групп. – Барнаул, 2002.
11. Мальцев А.И. Алгебраические системы. – М., 1970.