УДК 512.554.33

А.В. Кислицин

О тождествах пространств линейных преобразований над бесконечным полем

A.V. Kislitsin

On Identities of Spaces of Linear Transformations over Infinite Field

В данной работе построен пример линейной алгебры A, обладающей конечным базисом тождеств (как алгебры), которая является бесконечно базируемой, если ее рассматривать как векторное пространство. Векторное пространство A представляет собой прямую сумму двух векторных пространств, каждое из которых имеет конечный базис тождеств.

Ключевые слова: тождество, слабое тождество, базис тождеств, конечно базируемая алгебра, бесконечно базируемая алгебра.

The author constructs the example of linear algebra A that have finite identity basis. If A is considered as vector space, it is infinitively based algebra.

The space A is a direct sum of two vector subspaces each of which has the finite basis of identities.

Key words: identity, weak identity, identity basis, finitely based algebra, infinitely based algebra.

В 1976 г. С. В. Полин [1] для любого конечного поля P построил пример конечной неассоциативной линейной P-алгебры, удовлетворяющей тождеству $x(yz) = 0$, не имеющей конечного базиса тождеств. Этот результат показывает, что теорема Львова-Крузе о конечной базируемости тождеств конечного ассоциативного кольца не выполняется для произвольного (неассоциативного) кольца (линейной алгебры над конечным полем). В 1977 г. Ю. Н. Мальцевым и В. А. Парфеновым был приведен пример неассоциативной пятимерной алгебры над полем нулевой характеристики, с указанием ее бесконечного неприводимого базиса тождеств [2]. Позже, в 1978 г. И. В. Львовым был построен пример шестимерной неассоциативной бесконечно базируемой алгебры $\overline{V} = V \oplus E$, где V – конечномерное векторное пространство; $E \subseteq \mathrm{End}_F V$; F – некоторое поле [3]. Он также установил связь между базисами тождеств пространства E и алгебры $\overline{V}$. В 1989 г. И.М. Исаев доказал, что многообразие, порожденное неассоциативной пятимерной алгеброй $\overline{V} = V \oplus E$ (здесь $V = \langle v_1, v_2 \rangle_P$ – векторное пространство, $E = \langle e_{11}, e_{12}, e_{22} \rangle_P \subset \mathrm{End}_P V$, P – конечное поле), удовлетворяющей тождеству $x(yz) = 0$, является существенно бесконечно базируемым [4]. В [5] для любого конечного поля P строится линейная P-алгебра, не имеющая независимого базиса тождеств.

Введем основные определения, используемые в работе. Пусть F – некоторое поле; R – F-алгебра; $\vec{R}$ – алгебра R, рассматриваемая как векторное пространство над полем F; $F[X]$ – свободная ассоциативная алгебра от множества образующих X; $G \subseteq F[X]$ – некоторое непустое подмножество. Многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F[X]$ называется *тождеством* алгебры R, если $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$ при всех $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$. Пусть далее $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2 \ , \ldots, \sigma_t\}$ – множество операций, производных от операций алгебры R, $\widetilde{R} \neq \varnothing$ – подмножество R, замкнутое относительно операций Σ (например, $\Sigma = \{+, [\ ], \cdot\lambda\}$ – множество операций алгебры Ли; $\Sigma = \{+, \circ, \cdot\lambda\}$ – операции йордановой алгебры). Скажем, что полином $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F[X]$ – *слабое тождество* пары $(R, \widetilde{R})$, если f обращается в нуль в алгебре R при подстановке вместо переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ любых элементов из алгебры $\widetilde{R}$. В том случае, когда это не вызывает недоразумений, будем говорить, что некоторый полином f является тождеством векторного пространства $\vec{R}$, если f – слабое тождество пары $(R, \vec{R})$. Пусть $F[X]_\Sigma$ – алгебра, порожденная образующими множества X относительно операций Σ. Тогда идеал $I \triangleleft F[X]_\Sigma$ называется *слабым вербальным идеалом*, если из того что $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in I$ следует, что $f(y_1, y_2, \ldots, y_k) \in I$ при всех

$y_1, y_2, \dots, y_k \in F[X]_\Sigma$. Будем говорить, что слабое тождество $g(x_1, x_2, \dots, x_k)$ пары $(R, \vec{R})$ является следствием слабых тождеств $f_i = f_i(z_1, z_2, \dots, z_{l_i})$, $i = 1, 2, \dots, t$, если g лежит в слабом вербальном идеале, содержащем $f_1, f_2, \dots, f_t$.

Через $T(G)$ обозначим T-идеал алгебры $F[X]$, порожденный множеством G, а через $L(G)$ – идеал $F[X]$, который порожден множеством полиномов, полученных из полиномов G только линейными заменами переменных. Скажем, что множество полиномов $G \subseteq F[X]$ называется *базисом тождеств* алгебры R (пространства $\vec{R}$), если все тождества R (соответственно $\vec{R}$) следуют из конечной совокупности G. Если все тождества алгебры R следуют из некоторой конечной совокупности тождеств этой алгебры, то алгебру R называют конечно базируемой (или короче, КБ-алгеброй). В противном случае говорят, что R – не конечно базируема или бесконечно базируема (коротко: НКБ-алгебра). Аналогичную терминологию будем применять к векторным пространствам.

В связи с рассмотрением некоторыми авторами слабых тождеств (например, в [6]) особый интерес представляет поиск базисов тождеств алгебр, рассматриваемых как векторные пространства, поскольку тождества таких структур в некотором смысле "самые слабые" (так как новых производных операций в этом случае не возникает). Оказывается, если в конструкции линейной алгебры "отказаться" от операции умножения (т. е. допускать в тождествах лишь линейные замены переменных) и рассматривать алгебру как векторное пространство над полем, то полученная структура может оказаться бесконечно базируемой, даже если она обладала конечным базисом тождеств, будучи алгеброй. В настоящей работе приведен пример конечно базируемой алгебры, являющейся бесконечно базируемым векторным пространством. Построенный пример является прямой суммой двух антиизоморфных алгебр, каждая из которых, рассматриваемая как векторное пространство, имеет конечный базис тождеств.

Некоторые вспомогательные утверждения. Сформулируем и докажем две следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть R – некоторая F-алгебра, $\vec{R}$ – алгебра R, рассматриваемая как векторное пространство над полем F. Если G – базис тождеств алгебры R, то G является базисом тождеств пространства $\vec{R}$ тогда и только тогда, когда $L(G) = T(G)$.*

Доказательство. Пусть G – базис тождеств пространства $\vec{R}$ и $g = 0$ – некоторое тождество $\vec{R}$. Тогда $g = 0$ следует из G как тождество пространства $\vec{R}$, т. е. $g \in L(G)$. Но вместе с этим $g = 0$ – тождество R, и $g = 0$ следует из G, как тождество алгебры R, т. е. $g \in T(G)$. Таким образом, $T(G) = L(G)$.

Пусть теперь $T(G) = L(G)$ и пусть $g = 0$ – произвольное тождество в R. Тогда $g = 0$ следует из G как тождество алгебры R. Получаем, что $g \in T(G) = L(G)$, т. е. $g \in L(G)$. Таким образом, $g = 0$ следует из G как тождество пространства $\vec{R}$, т. е. G – базис тождеств $\vec{R}$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть F – бесконечное поле, R – F-алгебра. Если для всех $x_1, x_2, \dots, x_d \in R$ выполняется $f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_d) = 0$, где $f(x_1, x_2, \dots, x_d) \in F[x_1, x_2, \dots, x_d]$ и $\deg_{x_k} = l$, то в R справедливы тождества $f_i(X) = \sum\limits_{\deg_{x_k} \omega(X)=i} \omega(X) = 0$ для любого $1 \le i \le l$.*

Доказательство. Пусть $f(X) = f_1(X) + f_2(X) + \dots + f_l(X)$, где $\deg_{x_k} f_j(X) = j$, $1 \le j \le l$. Сделаем замену $x_k \to \lambda x_k$, $\lambda \in F$. Получим $f(X) = \lambda f_1(X) + \lambda^2 f_2(X) + \dots + \lambda^l f_l(X)$.

Теперь сделаем замены $\lambda \to \lambda_1, \lambda \to \lambda_2, \dots, \lambda \to \lambda_l$, где $\lambda_i \in F$, $\lambda_i \ne \lambda_j$ при $i \ne j$. Получим систему равенств, которая в матричной форме записывается следующим образом: $\Lambda\Phi = 0$, где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1^2 \dots & \lambda_1^l \\ \lambda_2 & \lambda_2^2 \dots & \lambda_2^l \\ \dots & \dots \dots & \dots \\ \lambda_l & \lambda_l^2 \dots & \lambda_l^l \end{pmatrix} \text{ и } \Phi = \begin{pmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \\ \dots \\ f_l(X) \end{pmatrix}.$$

Матрица Λ имеет определитель Вандермонда: $|\Lambda| = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_l \prod\limits_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j) \ne 0$. Следовательно, она обратима. Умножив обе части равенства $\Lambda\Phi = 0$ на Λ^{-1} слева, будем иметь $E\Phi = \Phi = 0$, т. е. $f_1(X) = f_2(X) = \dots = f_l(X) = 0$.

Лемма доказана.

Замечание. *Из леммы 2 следует, что если основное поле бесконечно, то все тождества некоторой алгебры над этим полем можно считать однородными.*

Пусть F – бесконечное поле,

$$A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | a, b \in F \right\},$$

$$A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} | a, b \in F \right\}$$

и $A = A_1 \oplus A_2$ – F-алгебры; $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$ и $\vec{A}$ – алгебры A_1, A_2 и A соответственно, рассматриваемые как векторные пространства над полем F. Исследуем вопрос конечной базируемости тождеств указанных алгебр и пространств.

Основные результаты.

Теорема. *Векторное пространство* $\vec{A} = \vec{A}_1 \oplus \vec{A}_2$ *над полем* F *является НКБ-пространством с базисом тождеств*

$$\{x[y,u]v, [x,y][u,v], [x,y]z_1z_2\dots z_m[u,v] | m = 1,2,3,\dots\}.$$

При этом алгебра A *конечно базируема с базисом тождеств* $\{x[y,u]v, [x,y][u,v]\}$.

Рассмотрим многочлены

$$[x,y]z \tag{1}$$

$$x[y,z] \tag{2}$$

$$[x,y][u,v] \tag{3}$$

$$x[y,u]v \tag{4}$$

$$[x,y]z_1z_2\dots z_m[u,v], m = 1,2,3,\dots \tag{5}$$

Предложение 1. *Полином* (1) *образует базис тождеств пространства* $\vec{A}_1$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}_1 = \operatorname{var}\langle [x,y]z = 0\rangle$, $\mathfrak{A}_1 = \operatorname{var} A_1$. Докажем, что $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{M}_1$.

Легко видеть, что $e_{12}A_1 = 0$, и, если $x, y \in A_1$, то $[x,y] = \lambda e_{12}$, $\lambda \in F$. Таким образом, любая алгебра из $\mathfrak{A}_1$ удовлетворяет тождеству (1), т. е. $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{M}_1$.

Докажем обратное включение.

Пусть $\phi(X) = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum a_i x_{i_1}^{\alpha_{i_1}} x_{i_2}^{\alpha_{i_2}} \dots x_{i_n}^{\alpha_{i_n}} = 0$, где $a_i \in F$ – произвольное тождество $\mathfrak{A}_1$. Учитывая (1), его можно переписать как

$$\phi(X) = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum b_i x_1^{\beta_1(i)} x_2^{\beta_2(i)} \dots \widehat{x}_k \dots x_n^{\beta_n(i)} x_k^{\beta_k(i)} = 0, \quad k \in \{1,2,\dots,n\}.$$

Из леммы 2 следует, что $\phi(X) = 0$ можно считать однородным. Тогда, поскольку (1) – тождество A_1, то в алгебре A_1 выполняется соотношение

$$\sum_{k\in\{1,2,\dots,n\}} a_k x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \dots \widehat{x}_k \dots x_n^{\gamma_n} x_k^{\gamma_k} = 0.$$

Сделав подстановки $x_i \to e_{11}$ $(i = 1,2,\dots,t-1,t+1,\dots,n)$, $x_t \to e_{11} + e_{12}$ для некоторого $t \in \{1,2,\dots,n\}$, получим $a_t e_{12} = 0$, откуда следует, что $a_t = 0$, т. е. все a_k будут равны нулю. Таким образом, коэффициенты при всех одночленах $\phi(X)$ равны нулю, т. е.

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0 \pmod{T([x,y]z)}.$$

Следовательно, $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{A}_1$, и окончательно получаем $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{M}_1$. Это означает, что $\{[x,y]z\}$ – базис тождеств алгебры A_1. Учитывая соотношение $[xy,z] = x[y,z] + [x,z]y$ и антисимметричность коммутатора, получим, что

$$T([x,y]z) = L([x,y]z),$$

т. е. в силу леммы 1 тождество (1) образует базис тождеств векторного пространства $\vec{A}_1$. Предложение доказано.

Аналогично доказывается утверждение для антиизоморфного случая. А именно, справедливо следующее

Предложение 2. *Полином* (2) *образует базис тождеств пространства* $\vec{A}_2$.

Доказательство теоремы. Рассмотрим многообразия алгебр $\mathfrak{M} = \operatorname{var}\langle x[y,u]v = [x,y][u,v] = 0\rangle$ и $\mathfrak{A} = \operatorname{var} A$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что если $x, y, u, v \in A$, то $[x,y] = (\lambda_1 e_{12}, \lambda_2 e_{21})$, $\lambda_1, \lambda_2 \in F$, и $[x,y][u,v] = 0$, а также $A[x,y]A = 0$. Таким образом, любая алгебра из $\mathfrak{A}$ удовлетворяет тождествам (3) и (4), т. е. $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}$.

Докажем обратное включение.

Пусть $\psi(X) = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum a_i x_{i_1}^{\alpha_{i_1}} x_{i_2}^{\alpha_{i_2}} \dots x_{i_s}^{\alpha_{i_s}} = 0$, где $a_i \in F$ – произвольное тождество $\mathfrak{A}$. Из леммы 2 следует, что $\psi(X) = 0$ можно считать однородным. Поскольку $A = A_1 \oplus A_2$, то $\psi(X) = 0$ также является тождеством алгебр A_1 и A_2. Рассмотрим следующие случаи в зависимости от количества и степени переменных, входящих в $\psi(X)$.

Случай 1. $n = 1$.

В этом случае $\psi(X) = \psi(x_1) = a x_1^{\gamma_1} = 0$, т. е. для всех $x_1 \in A$ выполняется соотношение

$$a x_1^{\gamma_1} = 0,$$

из которого после подстановки $x_1 \to e_{11}$ следует, что $a = 0$.

Случай 2. $n = 2$, $\deg_{x_1} \psi(X) = \gamma_1 \geq 1$, $\deg_{x_2} \psi(X) = \gamma_2 \geq 1$.

По модулю тождества (4): $\psi(X) = \psi(x_1, x_2) = a x_1 x_2^{\gamma_2} x_1^{\gamma_1 - 1} + b x_2 x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2 - 1} + c x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} + d x_2^{\gamma_2} x_1^{\gamma_1} = 0$, т. е. для всех $x_1, x_2 \in A$ выполняется

$$a x_1 x_2^{\gamma_2} x_1^{\gamma_1 - 1} + b x_2 x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2 - 1} + c x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} + d x_2^{\gamma_2} x_1^{\gamma_1} = 0.$$

Далее, поскольку (3) является тождеством в A, для всех $x, y, u, v \in A$ имеем $xyuv = xyvu + yxuv - yxvu$. Подставляя в это соотношение

$x \to x_1$, $y \to x_2^{\gamma_2 - 1}$, $u \to x_2$, $v \to x_1^{\gamma_1 - 1}$, получим, используя (4):

$$x_1 x_2^{\gamma_2} x_1^{\gamma_1 - 1} = x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} + x_2^{\gamma_2} x_1^{\gamma_1} + x_2^{\gamma_2 - 1} x_1^{\gamma_1} x_2.$$

Таким образом, можно считать, что для всех $x_1, x_2 \in A$ имеет место соотношение

$$b x_2 x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2 - 1} + c x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} + d x_2^{\gamma_2} x_1^{\gamma_1} = 0.$$

Подставив $x_1 \to e_{11} + e_{12}$, $x_2 \to e_{11}$, получим $de_{12} = 0$, т. е. $d = 0$. Таким образом,

$$b x_2 x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2 - 1} + c x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} = 0.$$

Далее подставим $x_1 \to e_{11} + e_{21}$, $x_2 \to e_{11}$ и получим $ce_{21} = 0$, откуда следует, что $c = 0$. Получаем, что

$$b x_2 x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2 - 1} = 0.$$

После подстановки $x_1 \to e_{11}$, $x_2 \to e_{11}$ получим, что $be_{11} = 0$ и $b = 0$. Другими словами

$$\psi(x_1, x_2) \equiv 0 \pmod{T(x[y,u]v, [x,y][u,v])}.$$

Случай 3. $n \geq 3$, $\deg_{x_i} \psi(X) = \gamma_i \geq 1$. Применяя (4), можно утверждать, что для всех $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ выполняется

$$\sum_{\substack{k,l \in \{1,2,\ldots,n\} \\ k \neq l}} a_{kl} x_k^{\gamma_k} x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \ldots \widehat{x}_k \ldots \widehat{x}_l \ldots x_n^{\gamma_n} x_l^{\gamma_l} +$$

$$\sum_{m \in \{1,2,\ldots,n\}} b_m x_m x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \ldots \widehat{x}_m \ldots x_n^{\gamma_n} x_m^{\gamma_m - 1} = 0.$$

Поскольку для всех $x, y, u, v \in A$ справедливо соотношение $xyuv = xyvu + yxuv - yxvu$, то подставим $x \to x_t$, $y \to x_1^{\gamma_1}$, $u \to x_2^{\gamma_2} x_3^{\gamma_3} \ldots \widehat{x}_t \ldots x_n^{\gamma_n}$, $v \to x_t^{\gamma_t - 1}$ (при $t \neq 1$ и $t \neq n$) в предположении, что $\gamma_t \geq 2$ (в противном случае нет смысла рассматривать вторую сумму). Учитывая, что (4) – тождество в A, получим

$$\begin{gathered} x_t x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \ldots \widehat{x}_t \ldots x_n^{\gamma_n} x_t^{\gamma_t - 1} = \\ x_t^{\gamma_t} x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \ldots x_n^{\gamma_n} + x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \ldots x_n^{\gamma_n} x_t^{\gamma_t} - \\ x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \ldots x_t^{\gamma_t} \ldots x_n^{\gamma_n}. \end{gathered}$$

Если же $t = 1$, то, сделав замены $x \to x_1$, $y \to x_2^{\gamma_2}$, $u \to x_3^{\gamma_3} x_4^{\gamma_4} \ldots x_n^{\gamma_n}$, $v \to x_1^{\gamma_1 - 1}$, получим

$$\begin{gathered} x_1 x_2^{\gamma_2} \ldots x_n^{\gamma_n} x_1^{\gamma_1 - 1} = x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \ldots x_n^{\gamma_n} + \\ x_2^{\gamma_2} x_3^{\gamma_3} \ldots x_n^{\gamma_n} x_1^{\gamma_1} - x_2^{\gamma_2} x_1^{\gamma_1} x_3^{\gamma_3} \ldots x_n^{\gamma_n}. \end{gathered}$$

При $t = n$ подставим в исходное соотношение $x \to x_n$, $y \to x_1^{\gamma_1}$, $u \to x_2^{\gamma_2} x_3^{\gamma_3} \ldots x_{n-1}^{\gamma_{n-1}}$, $v \to x_n^{\gamma_n - 1}$. Будем иметь

$$\begin{gathered} x_n x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \ldots x_{n-1}^{\gamma_{n-1}} x_n^{\gamma_n - 1} = \\ x_n^{\gamma_n} x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \ldots x_{n-1}^{\gamma_{n-1}} + x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \ldots x_n^{\gamma_n} - \\ x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \ldots x_n^{\gamma_n} x_{n-1}^{\gamma_{n-1}}. \end{gathered}$$

Таким образом, можно предположить, что для всех $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ выполняется:

$$\sum_{\substack{k,l \in \{1,2,\ldots,n\} \\ k \neq l}} a_{kl} x_k^{\gamma_k} x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \ldots \widehat{x}_k \ldots \widehat{x}_l \ldots x_n^{\gamma_n} x_l^{\gamma_l} = 0.$$

Далее, заменяя в (3) $x \to x_r$, $y \to x_1$, $u \to x_1^{\gamma_1 - 1} x_2^{\gamma_2} \ldots x_r^{\gamma_1 - 1} \ldots x_s^{\gamma_s - 1} \ldots x_n^{\gamma_n}$, $v \to x_s$ ($r \neq 1, s \neq n$), получим:

$$\begin{gathered} x_r x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \ldots x_r^{\gamma_r - 1} \ldots x_s^{\gamma_s - 1} \ldots x_n^{\gamma_n} x_s = \\ x_r x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \ldots x_r^{\gamma_r - 1} \ldots x_n^{\gamma_n} + \\ x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \ldots x_s^{\gamma_s - 1} \ldots x_n^{\gamma_n} x_s - x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \ldots x_n^{\gamma_n}. \end{gathered}$$

Таким образом, мы можем считать, что для всех $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ имеет место следующее соотношение:

$$\begin{gathered} a x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \ldots x_n^{\gamma_n} + \\ \sum_{k \in \{2,3,\ldots,n\}} b_k x_k x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \ldots x_k^{\gamma_k - 1} \ldots x_n^{\gamma_n} + \\ \sum_{l \in \{1,2,\ldots,n-1\}} c_l x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \ldots x_l^{\gamma_l - 1} \ldots x_n^{\gamma_n} x_l = 0 \end{gathered}$$

Выполнив подстановку $x_t \to e_{11} + e_{12}$ для некоторого $t \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, $x_i \to e_{11}$ ($i = 1, 2, \ldots, t-1, t+1, \ldots, n$), получим, что $c_t e_{12} = 0$, откуда следует, что $c_t = 0$, т. е. все c_l будут равны нулю. Будем иметь:

$$\begin{gathered} a x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \ldots x_n^{\gamma_n} + \\ \sum_{k \in \{2,3,\ldots,n\}} b_k x_k x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \ldots x_k^{\gamma_k - 1} \ldots x_n^{\gamma_n} = 0. \end{gathered}$$

Теперь подставим $x_t \to e_{11} + e_{21}$ для некоторого $t \in \{2, 3, \ldots, n\}$, $x_i \to e_{11}$ ($i \neq t$). Получим: $b_t e_{12} = 0$ и $b_t = 0$, т. е. все b_k будут равны нулю. Тогда имеет место следующее равенство:

$$a x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \ldots x_n^{\gamma_n} = 0,$$

и после подстановки $x_i \to e_{11}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, получим, что $ae_{11} = 0$ и $a = 0$. Таким образом,

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod{T(x[y,u]v, [x,y][u,v])}.$$

Следовательно, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{A}$, и окончательно получаем $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}$. Тогда $\{x[y,u]v, [x,y][u,v]\}$ – базис тождеств алгебры A.

Далее из соотношения $[xy,z] = x[y,z] + [x,z]y$ и антисимметричности коммутатора следует, что

$$T([x,y][u,v], x[y,u]v, [x,y]z_1, z_2, \dots, z_m[u,v]) = L([x,y][u,v], x[y,u]v, [x,y]z_1, z_2, \dots, z_m[u,v]), \quad m = 1, 2, \dots,$$

откуда по лемме 1 получим, что полиномы (3)–(5) образуют базис тождеств векторного пространства $\vec{A}$. Докажем теперь, что векторное пространство $\vec{A}$ является НКБ-пространством. Пусть $G_l = \{[x,y][u,v], x[y,u]v, [x,y]z_1z_2\dots z_m[u,v] | m = 1,2,\dots,l\}$ и $g_{l+1} = [x,y]z_1z_2\dots z_{l+1}[u,v]$. Предположим, что все тождества пространства $\vec{A}$ следуют из некоторой конечной совокупности тождеств $\{f_1, f_2, \dots, f_t\}$. Тогда $f_1 \in L(G_{k_1})$, $f_2 \in L(G_{k_2})$, $\dots$, $f_t \in L(G_{k_t})$. Пусть $k = \max\{k_1, k_2, \dots, k_t\}$. Тогда $f_1, f_2, \dots, f_t \in L(G_k)$ и, поскольку $g_{k+1} = 0$ – тождество $\vec{A}$, то $g_{k+1} \in L(G_k)$. Другими словами, полином $g_{k+1} = 0$ следует из множества полиномов G_k. Рассмотрим векторное пространство $\vec{V} = \langle a, b_1, b_2, \dots, b_{k+3}\rangle_F$, вложимое в алгебру $V = \langle a, b_1, b_2, \dots, b_{k+3}\rangle_F$ с определяющими соотношениями $a^2 = ab_{i_1}b_{i_2}\dots b_{i_m}a = b_iab_j = [b_i, b_j] = 0$, $m \le k+2$. Легко видеть, что все полиномы из G_k являются тождествами в этом пространстве. Однако, выполнив подстановку $x \to a$, $v \to a$, $y \to b_1$, $u \to b_2$, $z_i \to b_{i+2}$, $i = 1, 2, \dots, k+1$, получим, что $g_{k+1} = ab_1b_2\dots b_{k+3}a \ne 0$. Значит, $g_{k+1} = 0$ не следует из тождеств множества G_k. Полученное противоречие показывает, что $\vec{A}$ – НКБ-пространство.

Теорема доказана.

Некоторые следствия. В работе [3] рассматривался вопрос конечной базируемости тождеств алгебры $\overline{V} = V \oplus E$ (V – векторное пространство, $E \subseteq \mathrm{End}_F V$, F – поле) из многообразия $\mathrm{var}\langle x(yz) = 0\rangle$. Ненулевые произведения алгебры $\overline{V}$ задаются правилом $(v_1 + e_1)(v_2 + e_2) = v_1e_2$ (v_1e_2 – результат действия преобразования $e_2 \in E$ на вектор $v_1 \in V$). В частности, в [3] доказано, что некоторое множество ассоциативных полиномов $G = \{g_1, g_2, \dots\}$ является базисом тождеств векторного пространства E тогда и только тогда, когда множество неассоциативных полиномов $zG = \{zg_1, zg_2, \dots\}$ (расстановка скобок – правонормированная) образует базис тождеств алгебры $\overline{V} = V \oplus E$. Из этого следует, что неассоциативная линейная алгебра $\overline{V} = V \oplus E$ имеет конечный базис тождеств тогда и только тогда, когда векторное пространство E имеет конечный базис тождеств.

Положим $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle_F$, $E = \langle e_{11}, e_{12}, e_{33}, e_{43}\rangle_F \cong \vec{A} = \vec{A}_1 \oplus \vec{A}_2$. Определим на $\overline{V}$ умножение, при котором все ненулевые произведения базисных элементов задаются правилом $v_ie_{ij} = v_j$. Легко видеть, что определенная таким образом алгебра $\overline{V} = V \oplus \vec{A}$ принадлежит многообразию $\mathrm{var}\langle x(yz) = 0\rangle$.

Таким образом, из доказанной теоремы и работы [3] вытекает

Следствие. *Неассоциативная алгебра $\overline{V} = V \oplus \vec{A}$, где $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle_F$ и $\vec{A} = \vec{A}_1 \oplus \vec{A}_2$ является НКБ-алгеброй с базисом тождеств*

$$\{x(yz), z[x,y][u,v], zx[y,u]v, z[x,y]z_1z_2\dots z_k[u,v] | k = 1, 2, \dots\}$$

(*расстановка скобок в словах, где это не указано, предполагается правонормированной*).

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доценту И.М. Исаеву за постановку задачи, помощь при написании работы и тщательное вычитывание текста, а также профессору Ю.Н. Мальцеву за ценные советы, замечания и постоянное внимание к работе.

Библиографический список

1. Полин С.В. О тождествах конечных алгебр // Сибирский математический журнал. – 1976. – Т. XVII, № 6.
2. Мальцев Ю.Н., Парфенов В.А. Пример неассоциативной алгебры, не допускающей конечного базиса тождеств // Сибирский математический журнал. – 1977. – Т. XVIII, № 6.
3. Львов И.В. Конечномерные алгебры с бесконечными базисами тождеств // Сибирский математический журнал. – 1978. – Т. XIX, №1.
4. Исаев И.М. Существенно бесконечно базируемые многообразия алгебр // Сибирский математический журнал. – 1989. – Т. 30, № 6.
5. Isaev I.M. Finite algebras with no independent basis of identities // Algebra Universalis. – 1997. – Vol. 37.
6. Размыслов Ю.П. О конечной базируемости тождеств матричной алгебры второго порядка над полем характеристики нуль // Алгебра и логика. – 1973. – Т. 12, № 1.