УДК 514.765

О.П. Гладунова, Е.Д. Родионов, В.В. Славский

Об операторе кривизны на четырехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой

O.P. Gladunova, E.D. Rodionov, V.V. Slavsky

About Curvature Operator on Four Dimensional Lie Groups with Left-Invariant Riemannian Metric

В статье дается полная классификация вещественных четырехмерных алгебр Ли групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой и нулевым произведением Кулкарни-Номидзу тензора одномерной кривизны и метрического тензора.

Ключевые слова: алгебры и группы Ли, левоинвариантные римановы метрики, оператор кривизны.

Complete classification of real four dimensional Lie algebras of Lie groups with left-invariant Riemannian metric and zero Kulkarni-Nomidzy product of one dimensional curvature tensor and metric tensor is given in this paper.

Key words: Lie algebras and Lie groups, left-invariant Riemannian metrics, curvature operator.

Пусть (M,g) – ориентированное риманово многообразие размерности n, X, Y, Z, V – векторные поля на M. Обозначим через ∇ связность Леви-Чивита и через $R(X,Y)Z = [\nabla_Y, \nabla_X]Z + \nabla_{[X,Y]}Z$ – тензор кривизны Римана. Тензор Риччи r и скалярную кривизну s определим соответственно как $r(X,Y) = \mathrm{tr}(V \to R(X,V)Y)$ и $s = \mathrm{tr}(r)$. Разделим тензор кривизны R на метрический тензор g в смысле произведения Кулкарни-Номидзу [1], получим тензор Вейля W и тензор одномерной кривизны A:

$$R = W + A \owedge g, \tag{1}$$

где $(A \owedge g)(X,Y,Z,V) = A(X,Z)g(Y,V) + A(Y,V)g(X,Z) - A(X,V)g(Y,Z) - g(Y,Z)P(X,V)$ и

$$A = \frac{1}{n-2}\left(r - \frac{sg}{2(n-1)}\right).$$

Будем считать, что $\dim M = 4$. Тогда риманова метрика g индуцирует скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на расслоении $\Lambda^2 M$ по правилу

$$\langle X_1 \wedge X_2, Y_1 \wedge Y_2 \rangle = \det(\langle X_i, Y_j \rangle).$$

Оператор Ходжа $* : \Lambda^2 M \to \Lambda^2 M$, задаваемый соотношением

$$\langle *\alpha, \beta \rangle \,\mathrm{vol} = \alpha \wedge \beta$$

для любых $\alpha, \beta \in \Lambda^2_x M$, $x \in M$), где vol – форма объема на M, обладает тем свойством, что $*^2 = \mathrm{Id}$. Отсюда

$$\Lambda^2 M = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-, \tag{2}$$

где Λ^+ и Λ^- обозначают соответственно собственные пространства, отвечающие собственным значениям $+1$ и -1 оператора $*$.

Риманов тензор кривизны в любой точке можно рассматривать как оператор

$$\mathcal{R} : \Lambda^2 M \to \Lambda^2 M,$$

определяемый равенством

$$\langle X \wedge Y, \mathcal{R}(Z \wedge T) \rangle = R(X,Y,Z,T), \tag{3}$$

где $R(X,Y,Z,T) = g(R(X,Y)Z,T)$.

Матрицу оператора кривизны $\mathcal{R}$ относительно разложения (2) можно представить в блочном виде [2]:

$$\mathcal{R} = \left(\begin{array}{c|c} W^+ + \frac{s}{12}\mathrm{Id} & Z \\ \hline Z^t & W^- + \frac{s}{12}\mathrm{Id} \end{array}\right), \tag{4}$$

где W^+ и W^- – матрицы *автодуальной* и *антиавтодуальной* составляющих тензора Вейля W.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (№08-01-98001, №10-01-90000-Бел_а), Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых ученых и ведущих научных школ РФ (№НШ-5682.2008.1), а также ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт №02.740.11.0457).

Согласно (1) можем записать

$$\mathcal{R} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{s}{12}\mathrm{Id} & Z \\ \hline Z^t & \frac{s}{12}\mathrm{Id} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c|c} W^+ & 0 \\ \hline 0 & W^- \end{array} \right), \quad (5)$$

где первая матрица соответствует произведению $A \owedge g$, а вторая – тензору Вейля W.

Любой ортонормированный базис E_1, E_2, E_3, E_4 пространства T_xM определяет ортонормированный базис

$$\begin{gathered} \frac{1}{\sqrt{2}}(E_1 \wedge E_2 \pm E_3 \wedge E_4), \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(E_1 \wedge E_3 \pm E_4 \wedge E_2), \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(E_1 \wedge E_4 \pm E_2 \wedge E_3) \end{gathered} \quad (6)$$

пространства $\Lambda^{\pm}_x M$ (см., например: [1]).

Отметим, что элементы блока Z в ортонормированном базисе (6) находятся по формулам:

$$\begin{aligned} Z_{11} &= \frac{1}{2}(R_{1212} - R_{3434}), \\ Z_{22} &= \frac{1}{2}(R_{1313} - R_{2424}), \\ Z_{33} &= \frac{1}{2}(R_{1414} - R_{2323}), \\ Z_{12} &= \frac{1}{2}(R_{1213} - R_{1242} + R_{3413} - R_{3442}), \\ Z_{13} &= \frac{1}{2}(R_{1214} - R_{1223} + R_{3414} - R_{3423}), \\ Z_{23} &= \frac{1}{2}(R_{1314} - R_{1323} + R_{4214} + R_{4223}). \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть далее $M = G$ – группа Ли, $\mathfrak{g} = T_eG$ – алгебра Ли группы G. Фиксируем в $\mathfrak{g}$ базис E_1, E_2, E_3, E_4 левоинвариантных векторных полей в G. Положим

$$\begin{gathered} [E_i, E_j] = c^k_{ij} E_k, \ \nabla_{E_i} E_j = \Gamma^k_{ij} E_k, \\ \langle E_i, E_j \rangle = g_{ij}, \end{gathered} \quad (8)$$

где $\{c^k_{ij}\}$ – структурные константы алгебры Ли, $\{g_{ij}\}$ – метрический тензор.

Пусть $c_{ijs} = c^k_{ij} g_{ks}$. Тогда символы Кристоффеля первого и второго родов вычисляются соответственно по формулам

$$\begin{gathered} \Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}(c_{ijk} - c_{jki} + c_{kij}), \\ \Gamma^s_{ij} = \Gamma_{ij,k} g^{ks}, \end{gathered} \quad (9)$$

где $\|g^{ks}\|$ есть матрица, обратная к $\|g_{ks}\|$.

Из (8) и (9), очевидно, следует, что тензоры Римана R_{ijkt}, Риччи r_{ik}, скалярная кривизна s и тензор Вейля W_{ijkt} являются функциями структурных констант c^k_{ij} и компонент метрического тензора g_{ij} (см. также: [3]). Следовательно, тем же свойством обладают и компоненты Z.

Нам понадобятся следующие результаты работы [4].

Лемма 1. *Для произвольного скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на четырехмерной действительной разложимой унимодулярной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует $\langle\cdot,\cdot\rangle$-ортонормированный базис, в котором ненулевые структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеют вид:*

$$\begin{gathered} c^3_{1,2} = A, \ c^4_{1,2} = -AM, \ c^1_{2,3} = B, \ c^4_{2,3} = -BK, \\ c^2_{1,3} = -C, \ c^4_{1,3} = CL, \end{gathered}$$

где $K, L, M \in \mathbb{R}$ – произвольные, $A, B, C \in \mathbb{R}$ и $A \le B \le C$.

В зависимости от знаков чисел A, B и C получаются различные алгебры Ли. Все они, с точностью до изоморфизма, приведены в таблице 1, основанной на результатах Дж. Милнора о трехмерных унимодулярных алгебрах Ли [5]. Здесь $4A_1$ – коммутативная алгебра Ли, а каждая $A_{3,i}$ есть унимодулярная алгебра Ли размерности 3 (см.: [6]).

Таблица 1

Вещественные четырехмерные унимодулярные разложимые алгебры Ли

Алгебра Ли	Знаки A, B, C
$4\ \mathbb{A}_1$	$0, 0, 0$
$\mathbb{A}_{3,1} \oplus \mathbb{A}_1$	$0, 0, +$
$\mathbb{A}_{3,4} \oplus \mathbb{A}_1$	$-, 0, +$
$\mathbb{A}_{3,6} \oplus \mathbb{A}_1$	$0, +, +$
$\mathbb{A}_{3,8} \oplus \mathbb{A}_1$	$-, +, +$
$\mathbb{A}_{3,9} \oplus \mathbb{A}_1$	$+, +, +$

Лемма 2. *Для произвольного скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на четырехмерной действительной неразложимой унимодулярной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует $\langle\cdot,\cdot\rangle$-ортонормированный базис с ненулевыми структурными константами, приведенными в таблице 2.*

Таблица 2

Вещественные четырехмерные унимодулярные неразложимые алгебры Ли

Алгебра Ли	Структурные константы	Ограничения
$\mathbb{A}_{4,1}$	$c^1_{2,4}=A,\ c^1_{3,4}=B,\ c^2_{3,4}=C$	$A>0,\ C>0$
$\mathbb{A}^{-2}_{4,2}$	$c^1_{1,4}=-2A,\ c^1_{2,4}=B,\ c^2_{2,4}=A,\ c^1_{3,4}=C,\ c^2_{3,4}=D,\ c^3_{3,4}=A$	$A>0,\ D>0$
$\mathbb{A}^{\alpha,\,-1-\alpha}_{4,5}$, $\alpha\in(-1,\frac{1}{2}]$	$c^1_{1,4}=A,\ c^1_{2,4}=B,\ c^2_{2,4}=C,\ c^1_{3,4}=D,\ c^2_{3,4}=F,$ $c^3_{3,4}=-A-C$	$A>0,\ C<0$
$\mathbb{A}^{-2\beta,\beta}_{4,6}$, $\beta\in(0,+\infty)$	$c^1_{1,4}=-2A,\ c^1_{2,4}=B,\ c^2_{2,4}=A+C,\ c^3_{2,4}=D,\ c^1_{3,4}=F,$ $c^2_{3,4}=G,\ c^3_{3,4}=A-C$	$A>0,\ D<0,\ G>0$
$\mathbb{A}_{4,8}$	$c^1_{2,3}=A,\ c^1_{2,4}=B,\ c^2_{2,4}=C,\ c^1_{3,4}=D,\ c^2_{3,4}=F,\ c^3_{3,4}=-C$	$A>0,\ C>0$
$\mathbb{A}_{4,10}$	$c^1_{2,3}=A,\ c^1_{2,4}=B,\ c^3_{2,4}=C,\ c^1_{3,4}=D,\ c^2_{3,4}=G$	$A>0,\ C<0,\ G>0$

Теорема 1. *Пусть G – действительная четырехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Тогда если $A \owedge g = 0$, то алгебра $\mathfrak{g}$ изоморфна либо алгебре Ли $4\mathbb{A}_1$, либо $\mathbb{A}_{3,6}\oplus\mathbb{A}_1$.*

Доказательство. Фиксируя базис работы [4] на 4-мерной унимодулярной разложимой алгебре Ли, находим скалярную кривизну

$$s=\frac{1}{2}(2AC-A^2-A^2M^2-C^2-B^2 - C^2L^2+2AB-B^2K^2+2CB).$$

Применяя формулы (7), определяем элементы блока Z в матрице оператора кривизны (5)

$$Z_{11}=\frac{1}{8}(2AC-3A^2+2AB-3A^2M^2+C^2 -2CB+B^2-C^2L^2-B^2K^2),$$

$$Z_{22}=\frac{1}{8}(2AC-3C^2+2CB-3C^2L^2+A^2 -2AB+B^2-A^2M^2-B^2K^2),$$

$$Z_{33}=\frac{1}{8}(A^2M^2+C^2L^2-2AB+3B^2 -2CB+3B^2K^2-A^2+2AC-C^2),$$

$$Z_{12}=\frac{1}{4}(AMCL+B^2K),$$

$$Z_{13}=\frac{1}{4}(AMBK-C^2L),$$

$$Z_{23}=\frac{1}{4}(-A^2M-BKCL).$$

Находим решения системы уравнений $Z=0, s=0$ относительно структурных констант A, B, C, K, L, M:

1. $A=B, B=B, C=0, K=0, L=L, M=0.$
2. $A=C, B=0, C=C, K=K, L=0, M=0.$
3. $A=0, B=C, C=C, K=0, L=0, M=M.$
4. $A=0, B=0, C=0, K=K, L=L, M=M.$

Сопоставляя полученные результаты с данными таблицы 1, получаем, что все четырехмерные действительные разложимые унимодулярные алгебры Ли, группы Ли которых наделены левоинвариантной римановой метрикой и $Z=0, s=0$, исчерпываются следующими алгебрами: $4\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_{3,6}\oplus\mathbb{A}_1$. с ограничениями из леммы 1.

Далее мы последовательно рассмотрим все вещественные четырехмерные унимодулярные неразложимые алгебры Ли, чем и завершим доказательство теоремы 1.

Алгебра $\mathbb{A}_{4,1}$. Фиксируем ортонормированный базис леммы 2 и вычислим скалярную кривизну и компоненты блока Z в разложении оператора кривизны. Соответственно имеем

$$s=-\frac{1}{2}(A^2+B^2+C^2).$$

$$Z_{11}=\frac{1}{8}(A^2+3B^2+3C^2),$$

$$Z_{22}=\frac{1}{8}(B^2+3A^2-C^2),$$

$$Z_{33}=\frac{1}{8}(A^2+B^2-C^2),$$

$$Z_{12}=-\frac{1}{4}AB,$$

$$Z_{23}=-\frac{1}{4}CB.$$

Ввиду того, что структурные константы A и C положительны, система уравнений $Z=0, s=0$ не имеет решений.

Алгебра $\mathbb{A}_{4,2}^{-2}$. Фиксируем ортонормированный базис леммы 2 и вычислим скалярную кривизну и компоненты блока Z в разложении оператора кривизны. Соответственно имеем

$$s=-\frac{1}{2}(12A^2+B^2+C^2+D^2).$$

$$\begin{aligned}
Z_{11}&=\frac{1}{8}(B^2+12A^2+3C^2+3D^2),\\
Z_{22}&=\frac{1}{8}(C^2+12A^2+3B^2-D^2),\\
Z_{33}&=\frac{1}{8}(-12A^2+B^2+C^2-D^2),\\
Z_{12}&=-\frac{1}{4}CB,\\
Z_{13}&=-\frac{1}{4}AC,\\
Z_{23}&=-\frac{1}{4}(DC+3AB).
\end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что при $A>0$ и $D>0$ система уравнений $Z=0, s=0$ не имеет решений.

Алгебра $\mathbb{A}_{4,5}^{\alpha,-1-\alpha}$, где $\alpha\in(-1,\frac{1}{2}]$. Фиксируем ортонормированный базис леммы 2 и вычислим скалярную кривизну и компоненты блока Z в разложении оператора кривизны. Соответственно имеем

$$s=-\frac{1}{2}(4A^2+B^2+4C^2+D^2+F^2+4AC).$$

$$\begin{aligned}
Z_{11}&=\frac{1}{8}(B^2+4AC+3D^2+3F^2+4A^2+4C^2),\\
Z_{22}&=\frac{1}{8}(D^2+4A^2+4AC+3B^2+4C^2-F^2),\\
Z_{33}&=\frac{1}{8}(-4A^2+B^2+D^2-F^2-4AC-4C^2),\\
Z_{12}&=-\frac{1}{4}(BD+AF+2CF),\\
Z_{13}&=-\frac{1}{4}D(C+2A),\\
Z_{23}&=-\frac{1}{4}(FD+AB+CB).
\end{aligned}$$

Очевидно, что система уравнений $Z=0, s=0$ не имеет решений в силу ограничений на структурные константы $A>0$, $C<0$.

Алгебра $\mathbb{A}_{4,6}^{-2\beta,\beta}$, где $\beta\in(0,+\infty)$. Фиксируем ортонормированный базис леммы 2 и вычислим скалярную кривизну и компоненты блока Z в разложении оператора кривизны. Соответственно имеем

$$s=-\frac{1}{2}(12A^2+B^2+F^2+4C^2+2GD+D^2+G^2).$$

$$\begin{aligned}
Z_{11}&=\frac{1}{8}(B^2+12A^2+3F^2+3G^2+2GD\\
&+4C^2-D^2),\\
Z_{22}&=\frac{1}{8}(F^2+12A^2+3B^2+4C^2+2GD\\
&+3D^2-G^2),\\
Z_{33}&=\frac{1}{8}(-12A^2+B^2+F^2-2GD-G^2\\
&-D^2-4C^2),\\
Z_{12}&=-\frac{1}{4}(BF-2DC+2GC),\\
Z_{13}&=\frac{1}{4}(3AF-CF+BD),\\
Z_{23}&=-\frac{1}{4}(FG+3AB+CB).
\end{aligned}$$

Так как $A>0$, $D<0$ и $G>0$, то, как легко заметить, скалярная кривизна s не обращается в нуль. Следовательно, не имеет решений и система уравнений $Z=0, s=0$.

Алгебра $\mathbb{A}_{4,8}$. Фиксируем ортонормированный базис леммы 2 и вычислим скалярную кривизну и компоненты блока Z в разложении оператора кривизны. Соответственно имеем

$$s=-\frac{1}{2}(A^2+B^2+D^2+F^2+4\,C^2).$$

$$\begin{aligned}
Z_{11}&=\frac{1}{8}(A^2+B^2+3D^2+3F^2+4C^2),\\
Z_{22}&=\frac{1}{8}(A^2+D^2+3B^2+4C^2-F^2),\\
Z_{33}&=\frac{1}{8}(B^2+D^2+3A^2-F^2-4C^2),\\
Z_{12}&=-\frac{1}{4}(BD+2CF),\\
Z_{13}&=\frac{1}{4}D(A-C),\\
Z_{23}&=-\frac{1}{4}(AB+FD+CB).
\end{aligned}$$

Поскольку A и C положительны, то система уравнений $Z=0, s=0$ не имеет решений.

Алгебра $\mathbb{A}_{4,10}$. Фиксируем ортонормированный базис леммы 2 и вычислим скалярную кривизну и компоненты блока Z в разложении оператора кривизны. Соответственно имеем

$$s = -\frac{1}{2}(A^2 + B^2 + D^2 + G^2 + C^2 + 2\,GC),$$

$$Z_{11} = \frac{1}{8}(A^2 + B^2 + 3D^2 + 3G^2 + 2GC - C^2),$$

$$Z_{22} = \frac{1}{8}(A^2 + D^2 + 3B^2 + 2GC + 3C^2 - G^2),$$

$$Z_{33} = \frac{1}{8}(B^2 + D^2 + 3A^2 - 2GC - G^2 - C^2),$$

$$Z_{12} = -\frac{1}{4}BD,$$

$$Z_{13} = \frac{1}{4}(AD + CB),$$

$$Z_{23} = -\frac{1}{4}(AB + GD).$$

Очевидно, что система уравнений $Z = 0$, $s = 0$ не разрешима при заданных ограничениях на структурные константы $A > 0$, $C < 0$, $G > 0$.

Тем самым доказательство теоремы 1 завершено.

Заметим, что метрики, удовлетворяющие условиям теоремы 1, являются плоскими, в том смысле, что секционная кривизна данных многообразий тривиальна.

Кроме того, аналогично исследован случай действительных четырехмерных неунимодулярных групп Ли и доказана

Теорема 2. *Пусть G – действительная четырехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Тогда* $A \owedge g \neq 0$.

Отметим также, что при доказательстве теоремы 2 существенно использовались результаты работ [6, 7].

Библиографический список

1. Бессе А. Многообразия Эйнштейна: пер. с англ.: в 2 т. – М., 1990.
2. Singer I.M., Thorpe J.A. The curvature of 4-dimensional Einstein spaces // Global Analisis, Papers in Honour of K. Kodarira. – Tokyo, 1969.
3. Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. О гармонических тензорах на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой // ДАН. – 2008. – Т. 419, № 6.
4. Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай // Мат. труды. – 2008. – Т. 11, № 2.
5. Milnor J. Curvature of left invariant metric on Lie groups // Advances in mathematics. – 1976. – V. 21.
6. Мубаракзянов Г.М. О разрешимых алгебрах Ли // Изв. вузов. Математика. – 1963. – Т. 32, № 1.
7. Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай // Мат. труды. – 2009. – Т. 12, № 1.