УДК 514.765

Д.С. Воронов, О.П. Гладунова

Сигнатура оператора одномерной кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой

D.S. Voronov, O.P. Gladunova

The Signature of the One Dimensional Curvature Operator on Three Dimensional Lie Groups with Left-Invariant Riemannian Metric

В статье дается полная классификация возможных сигнатур оператора одномерной кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой.

Ключевые слова: алгебры и группы Ли, левоинвариантные римановы метрики, одномерная кривизна.

Complete classification of possible signatures of the one dimensional curvature operator on three dimensional Lie groups with left-invariant Riemannian metric is given in this paper.

Key words: Lie algebras and Lie groups, left-invariant Riemannian metrics, one dimensional curvature.

При исследовании римановых многообразий важную роль играет тензор одномерной кривизны A_{ij}. Он представляет собой целую часть от деления риманова тензора кривизны на метрический тензор относительно произведения Кулкарни-Номидзу [1] и определяется формулой

$$A_{ij} = \frac{1}{n-2}\left(R_{ij} - \frac{Rg_{ij}}{2(n-1)}\right), \qquad (1)$$

где R_{ij} – тензор Риччи; R – скалярная кривизна метрики ds^2; g_{ij} – метрический тензор.

В частности, для конформно-плоской метрики риманову кривизну двумерной площадки $\overrightarrow{\xi_1} \wedge \overrightarrow{\xi_2}$ можно представить в виде

$$K(\overrightarrow{\xi_1} \wedge \overrightarrow{\xi_2}) = (A\overrightarrow{\xi_1}, \overrightarrow{\xi_1}) + (A\overrightarrow{\xi_2}, \overrightarrow{\xi_2}).$$

Следовательно, изучение свойств оператора одномерной кривизны представляет интерес в понимании геометрического и топологического строения однородного риманова многообразия. Естественно попытаться отыскать общие свойства оператора одномерной кривизны. Один из вариантов – изучить возможные сигнатуры оператора одномерной кривизны однородного риманова многообразия.

В данной работе обобщены и уточнены результаты, полученные в [2], классифицированы возможные сигнатуры оператора одномерной кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой.

Напомним, что *метрической алгеброй Ли* называется пара $(\mathfrak{g}, Q)$, где $\mathfrak{g}$ – вещественная алгебра Ли, а Q – некоторое скалярное произведение на $\mathfrak{g}$. Произвольная левоинвариантная риманова метрика ρ на группе Ли G определяет скалярное произведение Q на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G, и наоборот, каждое скалярное произведение Q на $\mathfrak{g}$ индуцирует левоинвариантную метрику ρ на группе G. Если отождествить элементы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с левоинвариантными векторными полями на группе Ли G, то нетрудно получить в терминах метрической алгебры Ли $(\mathfrak{g}, Q)$ формулы для вычисления основных характеристик кривизны риманова многообразия [1].

Проблема определения возможных сигнатур оператора одномерной кривизны левоинвариантных римановых метрик на заданной группе Ли является локальной, поэтому естественно переформулировать ее в терминах метрических алгебр Ли. Именно, определить возможные значения сигнатур оператора одномерной кривизны для всевозможных скалярных произведений на заданной алгебре Ли.

Под *сигнатурой* симметрического оператора B, действующего на n-мерном евклидовом пространстве, будем понимать упорядоченный на-

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (№08-01-98001, №10-01-90000-Бел_а), Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых ученых и ведущих научных школ РФ (№НШ-5682.2008.1), а также ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт №02.740.11.0457).

бор $(\mathrm{sgn}(\tau_1), \mathrm{sgn}(\tau_2), \ldots, \mathrm{sgn}(\tau_n))$, где $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \ldots \leq \tau_n$ – собственные значения оператора B, и $\mathrm{sgn}(x)$ означает знак (вещественного) числа x. Для упрощения изложения занумеруем все возможные сигнатуры для трехмерного случая так, как это указано в таблице 1.

Таблица 1

Возможные сигнатуры оператора одномерной кривизны на трехмерных группах Ли

№	1	2	3	4	5
Сигнатура	$(-,-,-)$	$(-,-,0)$	$(-,-,+)$	$(-,0,0)$	$(-,0,+)$
№	6	7	8	9	10
Сигнатура	$(-,+,+)$	$(0,0,0)$	$(0,0,+)$	$(0,+,+)$	$(+,+,+)$

Унимодулярный случай

Пусть G – трехмерная унимодулярная группа Ли, $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы G, $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение на $\mathfrak{g}$. Тогда в $\mathfrak{g}$ существует [3] ортонормированный базис e_1, e_2, e_3 с коммутационными соотношениями

$$\begin{gathered}[e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, \quad [e_1, e_3] = \lambda_2 e_2, \\ [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \\ \text{где} \quad 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3. \end{gathered} \tag{2}$$

Кроме того, существует ровно шесть неизоморфных трехмерных алгебр Ли и соответствующих им типов унимодулярных трехмерных групп Ли. Все они приведены в таблице 2 (см. подробнее в [3]).

Таблица 2

Трехмерные унимодулярные группы Ли и соответствующие им алгебры Ли

Случай	Знаки $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$	Группа Ли	Алгебра Ли
(a)	$(+,+,+)$	$SU(2)$ или $SO(3)$	$su(2)$ – компактная, простая
(b)	$(+,+,-)$	$SL(2,\mathbb{R})$ или $O(1,2)$	$sl(2,\mathbb{R})$ – некомпактная, простая
(c)	$(+,+,0)$	$E(2)$	$e(2)$ – разрешимая
(d)	$(+,-,0)$	$E(1,1)$	$e(1,1)$ – разрешимая
(e)	$(+,0,0)$	H – группа Гейзенберга	h – нильпотентная
(f)	$(0,0,0)$	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^3$ – коммутативная

Из (1) следует, что квадратичная форма A в базисе (2) имеет диагональный вид, и ее главные значения равны:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{8}(5\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2 - 3\lambda_3^2 + 6\lambda_2\lambda_3 \\ &\quad - 2\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_1\lambda_2), \\ k_2 &= \frac{1}{8}(-3\lambda_1^2 + 5\lambda_2^2 - 3\lambda_3^2 + 6\lambda_1\lambda_3 \\ &\quad - 2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_2\lambda_3), \\ k_3 &= \frac{1}{8}(-3\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2 + 5\lambda_3^2 + 6\lambda_1\lambda_2 \\ &\quad - 2\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_2\lambda_3). \end{aligned} \tag{3}$$

Таким образом, определение сигнатуры оператора одномерной кривизны трехмерной унимодулярной алгебры Ли с левоинвариантной римановой метрикой сводится к нахождению всевозможных знаков главных значений k_1, k_2, k_3 в зависимости от знаков структурных констант $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Сформулируем основной результат в случае трехмерных унимодулярных алгебр Ли с левоинвариантной римановой метрикой.

Теорема 1. *Пусть G – унимодулярная трехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой, $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы G, s – произвольная сигнатура из таблицы 1. Тогда*

s реализуется в качестве сигнатуры оператора одномерной кривизны для некоторого скалярного произведения на $\mathfrak{g}$ в том и только том случае, если в таблице 3 на пересечении строки, соответствующей алгебре Ли $\mathfrak{g}$, и столбца, соответствующего сигнатуре s, находится знак "+".

Таблица 3

Возможные сигнатуры оператора одномерной кривизны левоинвариантных римановых метрик на трехмерных унимодулярных группах Ли

	№ сигнатуры									
Алгебра Ли	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$su(2)$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$
$sl(2,R)$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$
$e(2)$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$
$e(1,1)$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$
h	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
R^3	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$

Далее мы рассмотрим последовательно все трехмерные унимодулярные алгебры Ли, чем и докажем теорему 1.

Алгебра $\mathbf{su(2)}$.

Предложение 1. *В качестве сигнатуры оператора одномерной кривизны на алгебре $su(2)$ реализуются только сигнатуры $(-,-,+)$, $(-,0,+)$, $(-,+,+)$, $(0,0,+)$, $(0,+,+)$, $(+,+,+)$, т.е. сигнатуры 3, 5, 6, 8, 9 и 10 таблицы 1.*

Доказательство. В таблице 4 приведены значения параметров λ_1, λ_2, λ_3, при которых реализуются сигнатуры, указанные в формулировке предложения.

Таблица 4

Наборы структурных констант алгебры Ли $su(2)$ и соответствующие им сигнатуры оператора одномерной кривизны левоинвариантных римановых метрик

№	сигнатура	λ_1	λ_2	λ_3
3	$(-,-,+)$	1	1	$\frac{5}{3}$
5	$(-,0,+)$	$\frac{7}{15}$	$\frac{4}{5}$	1
6	$(-,+,+)$	1	1	$\frac{2}{5}$
8	$(0,0,+)$	1	1	$\frac{4}{3}$
9	$(0,+,+)$	$\frac{4}{5}$	1	1
10	$(+,+,+)$	1	1	1

Докажем, что остальные сигнатуры нереализуемы. Для этого рассмотрим k_3

$$k_3 = \frac{1}{8}(5\lambda_3^2 - 3\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2 + 6\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_2\lambda_3)$$
$$= \frac{1}{8}(-4\lambda_1^2 + 4\lambda_1\lambda_2 - 4\lambda_2^2 + 4\lambda_3^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$
$$+2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_2\lambda_3) = \frac{1}{8}(-4\lambda_1^2 + 4\lambda_1\lambda_2$$
$$-4\lambda_2^2 + 4\lambda_3^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)^2) > 0.$$

Поскольку $k_3 > 0$, то сигнатуры 1, 2, 4 и 7 из таблицы 1 нереализуемы.

Алгебра $\mathbf{sl(2,R)}$.

Предложение 2. *В качестве сигнатуры оператора одномерной кривизны на алгебре $sl(2,R)$ реализуются только сигнатуры $(-,-,+)$, $(-,0,+)$, $(-,+,+)$, т.е. сигнатуры 3, 5 и 6 таблицы 1.*

Доказательство. В [2] показано, что при заданных ограничениях на структурные константы ($0 < \lambda_1 \le \lambda_2$, $\lambda_3 < 0$) алгебры Ли $sl(2,R)$ выполняются следующие неравенства:

1) $k_1 < 0$, $k_3 > 0$, если $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$,

2) $k_1 < 0$, $k_3 > 0$, если $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \le \lambda_1 + |\lambda_3|$,

3) $k_1 < 0$, $k_2 > 0$, если $0 < \lambda_1 < \lambda_1 + |\lambda_3| < \lambda_2$.

Таким образом, сигнатуры 1, 2, 4, 7–10 из таблицы 1 нереализуемы. В таблице 5 приведены значения параметров λ_1, λ_2, λ_3, при которых реализуются сигнатуры, указанные в формулировке предложения.

Таблица 5

Наборы структурных констант алгебры Ли $sl(2,R)$ и соответствующие им сигнатуры оператора одномерной кривизны левоинвариантных римановых метрик

№	сигнатура	λ_1	λ_2	λ_3
3	$(-,-,+)$	1	1	-1
5	$(-,0,+)$	$\frac{19+4\sqrt{31}}{15}$	$\frac{4}{5}$	-1
6	$(-,+,+)$	$\frac{1}{3}$	1	-1

Алгебра e(2).

Предложение 3. *В качестве сигнатуры оператора одномерной кривизны на алгебре* $e(2)$ *реализуются только сигнатуры* $(-,-,+)$, $(0,0,0)$, *т.е. сигнатуры 3 и 7 таблицы 1.*

Доказательство. Рассмотрим, чему в данном случае равны главные кривизны оператора одномерной кривизны. Подставим $\lambda_3 = 0$ в (3), и после упрощения получим

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \frac{1}{8}(5\lambda_1 + 3\lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2),\\
k_2 &= -\frac{1}{8}(3\lambda_1 + 5\lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2),\\
k_3 &= -\frac{3}{8}(\lambda_1 - \lambda_2)^2.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Очевидно, что возможны только два случая, при которых сигнатуры оператора одномерной кривизны будут различны: 1) $0 < \lambda_1 = \lambda_2$ и 2) $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. В первом случае получаем сигнатуру $(0,0,0)$, во втором – сигнатуру $(-,-,+)$.

Алгебра *e*(1, 1).

Предложение 4. *В качестве сигнатуры оператора одномерной кривизны на алгебре* $e(1,1)$ *реализуются только сигнатуры* $(-,-,+)$, $(-,0,+)$, $(-,+,+)$, *т.е. сигнатуры 3, 5 и 6 таблицы 1.*

Доказательство. Следуя работе [2], заменим в (4) λ_2 на $-|\lambda_2|$ и получим

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \frac{1}{8}(5\lambda_1 - 3|\lambda_2|)(\lambda_1 + |\lambda_2|),\\
k_2 &= -\frac{1}{8}(3\lambda_1 - 5|\lambda_2|)(\lambda_1 + |\lambda_2|),\\
k_3 &= -\frac{3}{8}(\lambda_1 + |\lambda_2|)^2.
\end{aligned}
$$

Нетрудно заметить, что возможны только три случая различных сигнатур:

1) если $0 < \lambda_1 < \frac{3}{5}|\lambda_2|$ или $\lambda_1 > \frac{5}{3}|\lambda_2|$, то сигнатура $(-,-,+)$,

2) если $\lambda_1 = \frac{3}{5}|\lambda_2|$ или $\lambda_1 = \frac{5}{3}|\lambda_2|$, то сигнатура $(-,0,+)$,

3) если $\frac{3}{5}|\lambda_2| < \lambda_1 < \frac{5}{3}|\lambda_2|$, то сигнатура $(-,+,+)$.

Алгебра h.

Предложение 5. *В качестве сигнатуры оператора одномерной кривизны на алгебре* h *реализуется только сигнатура* $(-,-,+)$, *т.е. сигнатура 3 таблицы 1.*

Доказательство. Главные кривизны оператора одномерной кривизны имеют вид

$$
k_1 = \frac{5}{8}\lambda_1^2, \quad k_2 = -\frac{3}{8}\lambda_1^2, \quad k_3 = -\frac{3}{8}\lambda_1^2.
$$

Так как $\lambda_1 > 0$, то сигнатура $(-,-,+)$ является единственно возможной сигнатурой оператора одномерной кривизны.

Алгебра $\mathbf{R}^3$.

Для абелевой алгебры R^3 все структурные константы нулевые $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, поэтому нулевым является и оператор одномерной кривизны. Таким образом, мы получаем следующее очевидное

Предложение 6. *В качестве сигнатуры оператора одномерной кривизны на алгебре* R^3 *реализуется только сигнатура* $(0,0,0)$, *т.е. сигнатура 7 таблицы 1.*

Итак, теорема 1 доказана.

Неунимодулярный случай

Пусть G – трехмерная неунимодулярная группа Ли, $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы G. $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение на $\mathfrak{g}$. Тогда в $\mathfrak{g}$ существует [3] положительно ориентированный ортонормированный базис e_1, e_2, e_3 с коммутационными соотношениями

$$
[e_1, e_2] = \alpha e_1 + \beta e_2,\ [e_1, e_3] = \gamma_2 e_2 + \delta\, e_3,
$$
$$
[e_2, e_3] = 0,
$$

где $\alpha + \delta \neq 0$ и $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$.

Следуя [3], обозначим $\alpha = 1+\xi$, $\beta = (1+\xi)\eta$, $\gamma = -(1-\xi)\eta$, $\delta = 1-\xi$, где $\xi \geq 0$, $\eta \geq 0$. Квадратичная форма A диагонализируема в этом базисе и ее главные значения равны

$$
\begin{aligned}
k_1 &= -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{3}{2}\eta^2\xi^2,\\
k_2 &= -\frac{1}{2} - 2\xi - 2\eta^2\xi + \frac{1}{2}\xi^2\eta^2 + \frac{1}{2}\xi^2,\\
k_3 &= -\frac{1}{2} + 2\xi + 2\eta^2\xi + \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\eta^2\xi^2.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Таким образом, определение сигнатуры оператора одномерной кривизны трехмерной неунимодулярной алгебры Ли с левоинвариантной римановой метрикой сводится к нахождению всевозможных знаков ее главных значений k_1, k_2, k_3 в зависимости от знаков структурных констант $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Сформулируем основной результат в случае трехмерных неунимодулярных алгебр Ли с левоинвариантной римановой метрикой.

Теорема 2. *Пусть* G *– неунимодулярная трехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой,* $\mathfrak{g}$ *– алгебра Ли группы* G*. Тогда в качестве сигнатур оператора одномерной кривизны на* $\mathfrak{g}$ *реализуемы только сигнатуры* $(-,-,-)$, $(-,-,0)$, $(-,-,+)$, $(-,0,+)$, $(-,+,+)$, *т.е. сигнатуры 1, 2, 3, 5 и 6 таблицы 1.*

Доказательство. В таблице 6 приведены значения параметров α, β, γ, δ, при которых реализуются сигнатуры, указанные в формулировке теоремы.

Таблица 6

Возможные сигнатуры оператора одномерной кривизны левоинвариантных римановых метрик на трехмерных неунимодулярных группах Ли

№ сигнатуры	сигнатура	α	β	γ	δ
1	$(-,-,-)$	$\frac{11}{10}$	$\frac{11}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{9}{10}$
2	$(-,-,0)$	$-1+\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$-1+\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$-3+\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$3-\frac{3\sqrt{2}}{2}$
3	$(-,-,+)$	3	3	1	-1
5	$(-,0,+)$	$3+\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$3+\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$1+\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$-1-\frac{3\sqrt{2}}{2}$
6	$(-,+,+)$	6	6	4	-4

Докажем теперь, что остальные сигнатуры не могут быть сигнатурами оператора одномерной кривизны. Заметим, что $k_1 < 0$. Следовательно, сигнатуры 7–10 нереализуемы. Покажем, что сигнатура 4 также не может быть сигнатурой оператора одномерной кривизны трехмерной неунимодулярной алгебры Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Для этого решим уравнения $k_2 = 0$ и $k_3 = 0$ системы равенств (5) относительно ξ:

$$k_2 = 0: \quad \xi_1 = \frac{2\eta^2+2+\sqrt{4\eta^4+9\eta^2+5}}{\eta^2+1} > 0,$$
$$\xi_2 = \frac{2\eta^2+2-\sqrt{4\eta^4+9\eta^2+5}}{\eta^2+1} < 0.$$

$$k_3 = 0: \quad \xi_1' = -\frac{2\eta^2+2-\sqrt{4\eta^4+9\eta^2+5}}{\eta^2+1} > 0,$$
$$\xi_2' = -\frac{2\eta^2+2-\sqrt{4\eta^4+9\eta^2+5}}{\eta^2+1} < 0.$$

Очевидно, что сигнатура $(-,0,0)$ может быть сигнатурой оператора одномерной кривизны в том и только том случае, если $\xi_1 = \xi_1'$. Имеем

$$\xi_1 - \xi_1' = \frac{2\eta^2+2+\sqrt{4\eta^4+9\eta^2+5}}{\eta^2+1}$$
$$+\frac{2\eta^2+2-\sqrt{4\eta^4+9\eta^2+5}}{\eta^2+1} = 4 \neq 0.$$

Следовательно, сигнатура $(-,0,0)$ нереализуема в качестве сигнатуры оператора одномерной кривизны трехмерной неунимодулярной алгебры Ли с левоинвариантной римановой метрикой.

Теорема 2 доказана.

Библиографический список

1. Бессе А. Многообразия Эйнштейна: пер. с англ.: в 2 т. – М., 1990.

2. Rodionov E.D., Slavskii V.V. Curvature estimations of left invariant Riemannian metrics on three dimensional Lie groups // Differential Geometry and Application. Proceeding of the 7^{th} International Conference. – Brno, 1999.

3. Milnor J. Curvature of left invariant metric on Lie groups // Advances in mathematics. – 1976. – V. 21.