

УДК 519.6

*О.П. Бушманова, А.В. Устюжанова***О математическом моделировании сдвиговых трещин вблизи отверстий****O.P. Bushmanova, A.V. Ustyuzhanova***On the Mathematical Modeling of Shear Cracks nearby Holes**

Исследуется напряженно-деформированное состояние упругого материала вблизи круговых отверстий и сдвиговых трещин. Трещины сдвига представлены в виде разрезов с условиями, допускающими вдоль разрезов возможность разрыва касательного перемещения. Для численного моделирования используется метод конечных элементов. Построены поля перемещений и напряжений в исследуемой области при различном расположении трещин сдвига в окрестности двух и трех отверстий.

Ключевые слова: сдвиговые трещины, концентрация напряжений, круговое отверстие.

Формирование поверхностей локализации сдвигов, в том числе и сдвиговых трещин вблизи отверстий, наблюдается в многочисленных экспериментах по изучению деформирования горных пород, сыпучих сред, металлов [1–4].

Исследованию концентрации напряжений в окрестности отверстий и трещин посвящено большое количество теоретических научных работ. Используются и развиваются аналитические методы, представленные, в частности, в монографиях [5–7], а также различные методы вычислительной математики [8–10].

Для математического моделирования разрывов сдвигового типа на основе метода конечных элементов разработаны алгоритмы и программы численного счета, реализующие возможность возникновения и распространения в плоской области произвольно направленных разрезов криволинейной формы [11–12].

В частности, получено численное решение задачи о деформировании упругого материала в окрестности кругового отверстия в условиях локализации сдвигов на дискретных системах одного семейства разрезов в форме логарифмических спиралей [13].

A stress-strain state of elastic material nearby circular holes and shear cracks is studied. The shear cracks are presented in the form of cuts with the conditions supposing an opportunity to break tangent displacement along cuts. The finite elements method is used for numerical modeling. The authors construct displacement and stress fields in investigated area at a various location of shear cracks nearby two and three holes.

Key words: shear crack, stress concentration, circular hole.

Представляет интерес применение разработанных алгоритмов для исследования напряженно-деформированного состояния плоской упругой области, ослабленной системами отверстий и сдвиговых трещин.

В рамках плоской деформации для прямоугольника с круговыми отверстиями и прямолинейными разрезами рассмотрим задачу определения полей перемещений $u_i(x_1, x_2)$ ($i = 1, 2$) и напряжений $\sigma_{ij}(x_1, x_2)$ ($i, j = 1, 2$), для которых выполняются уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0.$$

Будем считать, что вне разрезов поведение материала описывается законом Гука

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\varepsilon_{mm}),$$

где ε_{ij} ($i, j = 1, 2$) – компоненты тензора приращений деформаций:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}),$$

ν – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости; по m проводится суммирование от 1 до 2.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №08-05-00543).

В этом случае также имеем

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \quad \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}).$$

В качестве характерного линейного размера выберем горизонтальный размер прямоугольника, в качестве характерного напряжения – $10^{-2}E$. Вертикальный размер прямоугольника, отнесенный к горизонтальному, равен H .

Систему отверстий в прямоугольнике представим в виде K кругов, имеющих радиусы r_i ($i = 1, \dots, K$). Вдоль N отрезков длины l_i , наклоненных под углами β_i к оси x_1 ($i = 1, \dots, N$), расположим прямолинейные разрезы. Таким образом получим, что граница исследуемой области будет состоять из сторон прямоугольника, K окружностей и $2N$ берегов разрезов.

Рассмотрим граничные условия.

На всей границе прямоугольника касательное напряжение $\sigma_{12} = 0$.

Кроме того,

$$u_1(0, x_2) = u_1^0, \quad u_1(1, x_2) = -u_1^0,$$

$$u_2(x_1, 0) = 0, \quad u_2(x_1, H) = u_2^0.$$

Здесь $u_1^0 = const$, $u_2^0 = const$.

На границах отверстий заданы нормальная σ_n и касательная σ_τ составляющие векторов напряжений

$$\sigma_n = 0, \quad \sigma_\tau = 0.$$

Возможность разрыва перемещений, а следовательно, сдвига берегов разрезов друг относительно друга зависит от условий, заданных на разрезах. Формирование разрыва в процессе нагружения обеспечивается за счет увеличения длины разреза при решении задачи в приращенных по параметру нагружения.

Граничные условия, описывающие взаимодействие берегов разрезов, представим в виде функциональных зависимостей между нормальными и касательными компонентами векторов напряжений и перемещений на берегах разрезов.

Такие условия на разрывах не определяют до решения задачи конкретные значения соответствующих составляющих векторов напряжений и перемещений.

Предположим, что на сдвиговых трещинах задано условие трения Кулона, связывающее нормальную и касательную составляющие вектора напряжений

$$|\sigma_\tau| + k_i \sigma_n = c_i, \quad (1)$$

k_i – коэффициент трения на i -м разрезе; c_i – сцепление ($i = 1, \dots, N$).

Будем считать, что разрыв (скачок) нормальной компоненты вектора перемещений на разрезах отсутствует

$$[u_n] = 0. \quad (2)$$

Кроме того, вектор напряжений на сдвиговых трещинах должен быть непрерывен

$$[\sigma_n] = 0, \quad [\sigma_\tau] = 0. \quad (3)$$

Если предположить, что сдвиг вдоль трещины приводит к некоторому разрыхлению материала (дилатансии), то условие (2) естественным образом заменяется на зависимость между разрывами нормальной и касательной компонент вектора перемещений

$$[u_n] = \lambda_i [u_\tau], \quad (4)$$

где λ_i – коэффициент пропорциональности.

Реализация различных типов условий на разрывах обеспечивается введением в рассмотрение проблемно-ориентированных адаптивных конечно-элементных сеток с двойными узлами. Такие сетки позволяют описывать разрывы перемещений в любой расчетной точке области путем рассмотрения в данной точке двух узлов, значения перемещений в которых могут быть различными.

При первоначальном разбиении области на треугольные конечные элементы учитываются данные о возможном расположении сдвиговых трещин в исследуемой задаче. Предполагается, что часть линий, соединяющих узлы сетки конечных элементов, проходит по линиям разрыва.

В ходе численного решения ряда задач получены поля перемещений и напряжений в исследуемых областях при различном расположении двух и трех круговых отверстий.

Исследование различных характеристик полученных полей, в зависимости от параметров задачи, позволяет изучить их особенности.

В частности, при вычислении максимального касательного напряжения, определяемого как полуразность максимального и минимального главных напряжений, существенное значение имеют изменения в ориентации главных осей и величинах главных напряжений.

Возможность изучения наиболее полного спектра нагружений достигается путем расширения рамок представления плоской постановки задачи до случая обобщенной плоской деформации.

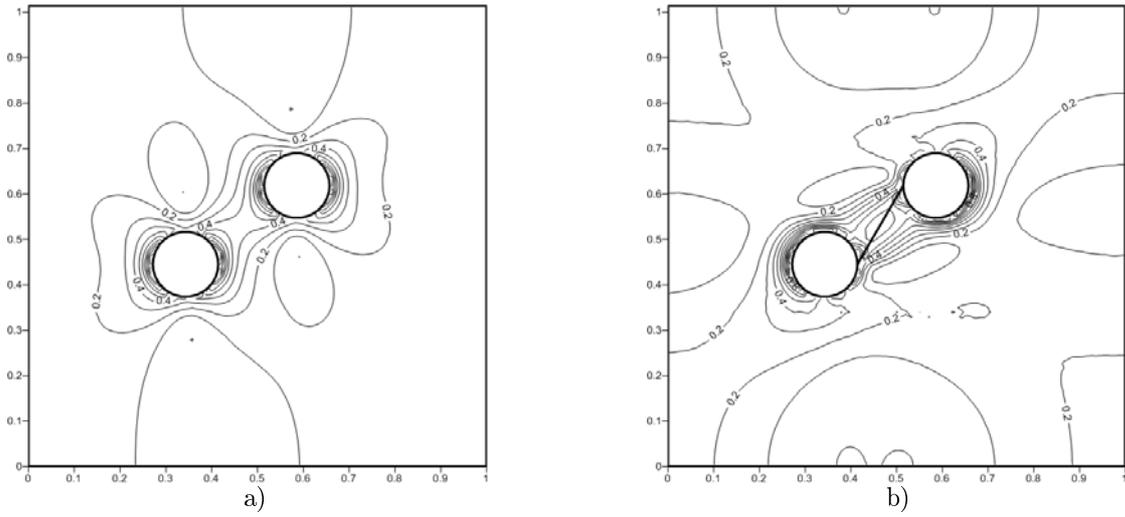


Рис. 1. Изолинии функции течения ($K = 2, N = 0; 1, \beta_1 = 60^\circ$)

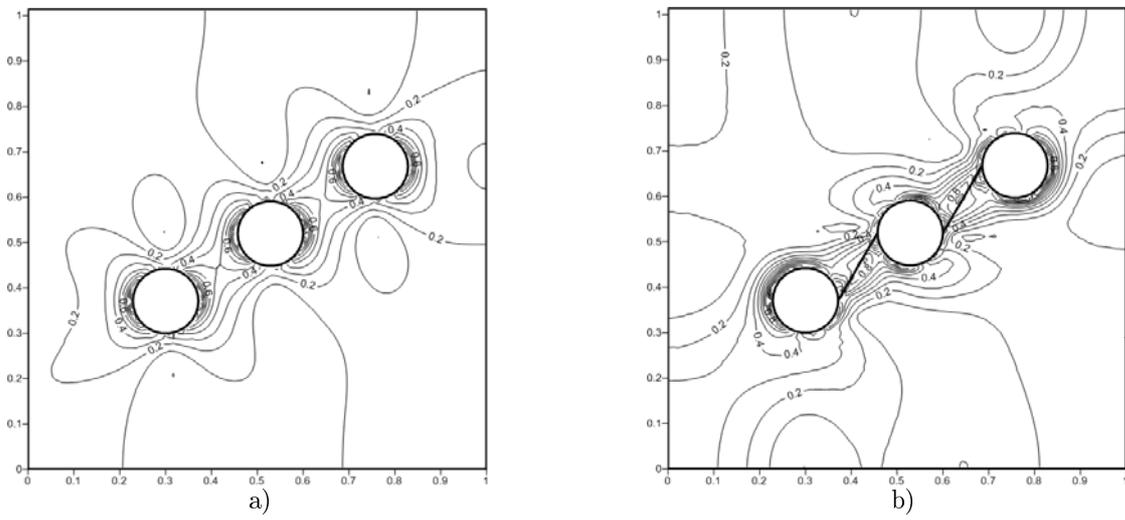


Рис. 2. Изолинии функции течения ($K = 3, N = 0; 2, \beta_1 = 60^\circ, \beta_2 = 60^\circ$)

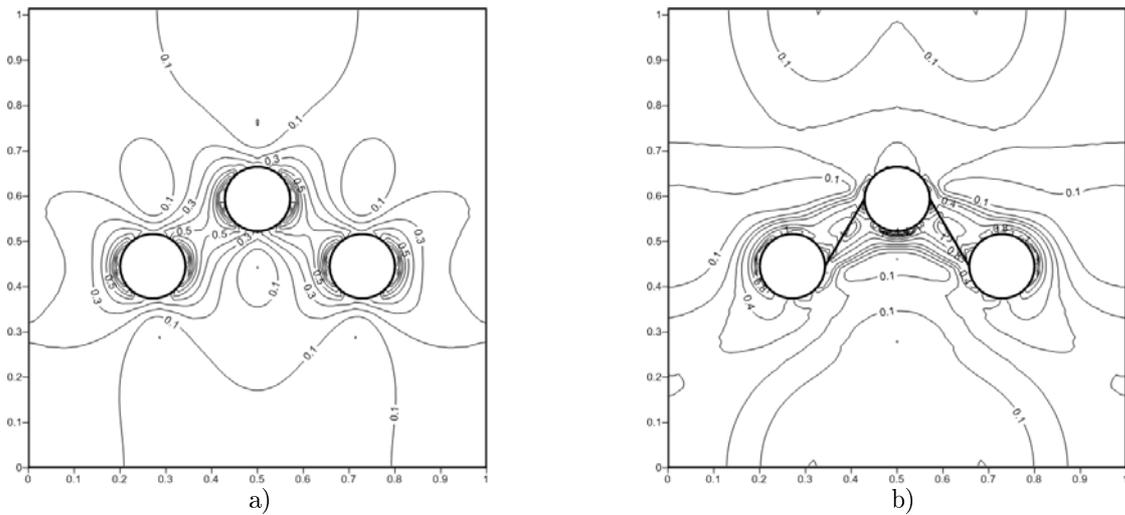


Рис. 3. Изолинии функции течения ($K = 3, N = 0; 2, \beta_1 = 60^\circ, \beta_2 = -60^\circ$)

Известное распределение максимального касательного напряжения в исследуемой области используется для оценки возможности хрупкого или вязкого разрушения.

В качестве критерия хрупкого разрушения рассматривается достижение максимальным касательным напряжением в некоторых точках среды определенной величины (прочности при сдвиге), кроме того, считается, что нормальное напряжение, действующее в плоскости разрушения, может повышать сопротивление материала сдвигу на величину, пропорциональную нормальному напряжению [8].

Построены также поля среднего давления σ и интенсивности касательных напряжений T

$$\sigma = \frac{\sigma_{mm}}{3}, \quad T = \sqrt{\frac{s_{ij}s_{ij}}{2}},$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma, \quad i, j, m = 1, 2, 3.$$

Распределения указанных величин использу-

ются при определении в каждой точке исследуемой области функции текучести [14]

$$F = T + \alpha\sigma.$$

На рисунках 1–3 представлены изолинии функции F для прямоугольной области с двумя и тремя круговыми отверстиями без разрезов (а) и с прямолинейными разрезами (б).

При расчетах принимались следующие значения параметров: $\nu = 0.3$, $H = 1.02$, $r_1 = r_2 = r_3 = 0.0714$, $u_1^0 = 0.001$, $u_2^0 = -0.01$, $c_i = 0$, $k_i = 0.27$, $\lambda_i = 0$, $\alpha = 0.27$.

Численное моделирование на основе разработанных алгоритмов и комплекса программ позволяет провести подробный анализ напряженно-деформированного состояния в исследуемой области, на основе которого возможно прогнозирование появления областей пластического поведения или хрупкого разрушения материала при различных условиях нагружения.

Библиографический список

1. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. – М., 1969. – Т. 2.
2. Разрушение неметаллов и композитных материалов / под ред. Г. Либовица. – М., 1976. – Т. 7.
3. Ревуженко А.Ф. Механика сыпучих сред. – Новосибирск, 2003.
4. Гольдштейн Р.В., Кулинич Ю.В., Осипенко Н.М. Разрушение горных пород вблизи отверстия при сжатии: препринт ИПМех РАН. – 2005. – №778.
5. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М., 1966.
6. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. – Киев, 1968.
7. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев, 1981.
8. Zienkiewicz O.C., R.L. Taylor. The Finite Element Method. Butterworth-Heinemann. – 2000. – V. 2.
9. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. – М., 1987.
10. Сиратори М., Миеси Т., Мацусита Х. Вычислительная механика разрушения: пер. с японск. – М., 1986.
11. Бушманова О.П. Моделирование локализации сдвигов // ПМТФ. – 2003. – №6.
12. Бушманова О.П., Бушманов С.Б. Численное моделирование процесса деформирования материала в сходящемся канале в условиях возникновения линий локализации // ФТПРПИ. – 2009. – №4.
13. Бушманова О.П., Ревуженко А.Ф. Напряженное состояние породного массива вокруг выработки в условиях локализации сдвигов // ФТПРПИ. – 2002. – №2.
14. Друккер Д., Прагер В. Механика грунтов и пластический анализ или предельное проектирование // Определяющие законы механики грунтов. – М., 1975.