УДК 512.54.01

А.И. Будкин

О доминионе полной подгруппы метабелевой группы

A.I. Budkin

On the Dominion of a Divisible Subgroup of a Metabelian Group

Доминион подгруппы H группы A в квазимногообразии $\mathcal{M}$ – это множество всех элементов $a \in A$, образы которых равны для всех пар гомоморфизмов, совпадающих на H, из A в каждую группу из $\mathcal{M}$. Доминион является оператором замыкания на решетке подгрупп данной группы. В работе исследуются замкнутые подгруппы относительно доминиона. Найдены условия, при которых доминион полной подгруппы метабелевой группы совпадает с этой подгруппой.

Ключевые слова: квазимногообразие, метабелева группа, доминион, n-замкнутая подгруппа, полная абелева группа.

The dominion of a subgroup H of a group A in a quasi-variety $\mathcal{M}$ is the set of all elements $a \in A$ with equal images under all pairs of homomorphisms from A into every group in $\mathcal{M}$ which coincide on H. The dominion is a closure operator on the lattice of subgroups of a given group. In this paper we study the closed subgroups with respect to this operator. We find conditions for the dominion of a divisible subgroup of a metabelian group to coincide with the subgroup.

Key words: quasi-variety, metabelian group, n-closed subgroup, divisible abelian group.

Введение. Понятие доминиона было введено в [1] для изучения эпиморфизмов. Согласно [1], доминионом подалгебры H универсальной алгебры A в полной категории $\mathcal{M}(A \in \mathcal{M})$, обозначаемым $\mathrm{dom}_A^{\mathcal{M}}(H)$, называется множество всех элементов $a \in A$ таких, что $a^\varphi = a^\psi$ для любых двух морфизмов $\varphi, \psi : A \to M \in \mathcal{M}$, совпадающих на H. Оказалось, что отображение $\varphi : A \to B$ $(A, B \in \mathcal{M})$ является эпиморфизмом в $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{dom}_B^{\mathcal{M}}(A^\varphi) = B$. Этот факт послужил началом исследования доминионов. Далее, понятие доминиона изучалось в различных классах алгебр [2–4] (см. также библиографию в [5]). В частности, была установлена тесная связь между доминионами и амальгамами. За подробностями мы отсылаем читателя к обзорной статье [2]. Целесообразность изучения доминионов в квазимногообразиях обосновывается в [5] тем, что, согласно [6], только квазимногообразия среди аксиоматизируемых классов обладают полной теорией определяющих соотношений, позволяющей определить свободное произведение с объединенной подалгеброй. Отметим, что доминионы рассмотрены в квазимногообразиях абелевых групп [3, 7, 8], а решетки доминионов введены и изучались в [5, 9, 10].

Пусть $\mathcal{M}$ – произвольное квазимногообразие групп. В этом случае для любой группы A из $\mathcal{M}$ и ее подгруппы H доминион $\mathrm{dom}_A^{\mathcal{M}}(H)$ подгруппы H в A (в $\mathcal{M}$) определяется так:

$$\mathrm{dom}_A^{\mathcal{M}}(H) = \{a \in A \mid \forall M \in \mathcal{M}\ \forall f, g : A \to M,$$

$$\text{если } f\,|_H = g\,|_H, \text{ то } a^f = a^g\}.$$

Здесь, как обычно, через $f, g : A \to M$ обозначены гомоморфизмы группы A в группу M, через $f\,|_H$ – ограничение f на H.

Несложно заметить, что $\mathrm{dom}_A^{\mathcal{M}}(-)$ является оператором замыкания на решетке подгрупп данной группы A, в том смысле, что он экстенсивный (доминион подгруппы H содержит H), идемпотентный (доминион доминиона подгруппы H равен доминиону H) и изотонный (если $H \subset B$, то доминион H содержится в доминионе B). Представляется интересным и естественным исследование замкнутых подгрупп. В [10] введено понятие n-замкнутой группы и показано [10, следствие 2], что изучение замкнутых групп сводится к изучению n-замкнутых групп. В частности, в [10, теорема 5] описаны все 1-замкнутые абелевы группы в каждом квазимногообразии нильпотентных групп без кручения ступени 2.

*Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы" (мероприятие 1).

Группа H называется *n-замкнутой* в классе $\mathcal{M}$, если для любой группы $A = \text{гр}(H, a_1, \ldots, a_n)$ из $\mathcal{M}$, содержащей H и порожденной по модулю H подходящими n элементами, справедливо равенство: $\text{dom}_A^{\mathcal{M}}(H) = H$.

Группа H называется *замкнутой* (либо *абсолютно замкнутой*) в классе $\mathcal{M}$, если для любой группы A из $\mathcal{M}$, содержащей H, справедливо равенство: $\text{dom}_A^{\mathcal{M}}(H) = H$.

Цель данной работы – изучение 1-замкнутых групп в многообразии метабелевых групп.

С основными понятиями теории квазимногообразий можно познакомиться в [11–14], а теории групп – в [15, 16].

2. Предварительные замечания. Напомним некоторые понятия и обозначения.

$\mathcal{A}^2$ – класс метабелевых (т.е. с абелевым коммутантом) групп.

Запись $A \leq B$ означает, что A является подгруппой группы B.

Через $\text{гр}(S)$ будем обозначать группу, порожденную множеством S, через (a) – циклическую группу, порожденную элементом a.

G' – коммутант группы G.

Через $G = A\lambda B$ обозначаем полупрямое произведение групп A и B (т.е. $G = AB$, $A \lhd G$, $A \cap B = (1)$).

Как обычно, $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$, $a^b = b^{-1}ab$.

Z, Q – аддитивные группы целых и рациональных чисел, соответственно. $\mathbb{Q}$ – поле рациональных чисел.

Вложением группы A в группу B будем называть любой гомоморфизм $\varphi : A \to B$, являющийся изоморфизмом A на A^{φ}. Если существует вложение A в B, то говорим, что A *вложима* в B.

Группа G называется *полной*, если для всякого целого числа $n > 0$ и любого элемента $g \in G$ уравнение $x^n = g$ имеет в группе G хотя бы одно решение.

Дадим определение метабелева квадрата группы с объединенной подгруппой. Пусть группа G имеет в $\mathcal{A}^2$ представление:

$$G = \text{гр}(\{x_i \mid i \in I\} \parallel \{r_j(\overline{x}) = r'_j(\overline{x}) \mid j \in J\}).$$

Возьмем две группы G_1, G_2, изоморфные группе G, и зафиксируем их представления в $\mathcal{A}^2$:

$$G_1 = \text{гр}(\{x_i \mid i \in I\} \parallel \{r_j(\overline{x}) = r'_j(\overline{x}) \mid j \in J\}),$$

$$G_2 = \text{гр}(\{y_i \mid i \in I\} \parallel \{r_j(\overline{y}) = r'_j(\overline{y}) \mid j \in J\}).$$

Предполагаем, что пересечение $X = \{x_i \mid i \in I\}$ и $Y = \{y_i \mid i \in I\}$ пусто.

Пусть H – подгруппа группы G. Берем произвольное множество $\{h_l(\overline{x}) \mid l \in L\}$ групповых слов в алфавите $X = \{x_i \mid i \in I\}$, множество $\{h_l(\overline{x}) \mid l \in L\}$ значений которых в G порождает H. Возьмем группу $F \in \mathcal{A}^2$, обладающую в $\mathcal{A}^2$ представлением:

$$F = \text{гр}(X \cup Y \parallel \{r_j(\overline{x}) = r'_j(\overline{x}) \mid j \in J\} \cup$$

$$\{r_j(\overline{y}) = r'_j(\overline{y}) \mid j \in J\} \cup \{h_l(\overline{x}) = h_l(\overline{y}) \mid l \in L\}).$$

Эта группа F обозначается через $G *_H^{\mathcal{A}^2} G$ и называется метабелевым произведением групп G_1 и G_2 с объединенными подгруппами H_1 и H_2 либо метабелевым квадратом группы G с объединенной подгруппой H. Отображения $\lambda : G \to F$, где $x_i^{\lambda} = x_i (i \in I)$; $\rho : G \to F$ $(x_i^{\rho} = y_i (i \in I))$ являются вложениями, и подгруппы $G^{\lambda}, G^{\rho}, H^{\lambda}$ снова обозначим через G_1, G_2, H соответственно.

Если $H = (1)$, то возникшая группа F называется метабелевым произведением групп G_1 и G_2 и будет обозначаться через $F = G_1 * G_2$.

Хорошо известно (см., например, [2]), что $G_1 \cap G_2 = \text{dom}_{G_1}^{\mathcal{A}^2}(H)$.

В [17] найдено строение коммутанта метабелева произведения метабелевых групп. Нам понадобится следующий факт из доказательства теоремы [17].

Пусть G_1 и G_2 – метабелевы группы. Рассмотрим их метабелево произведение $F = G_1 * G_2$. Считаем, что G_1 и G_2 естественным образом вложены в F. Пусть $A = G_1/G'_1$, $B = G_2/G'_2$, $C = A \times B = F/F'$. F', G'_1, G'_2 рассматриваем как правые ZC-, ZA-, ZB-модули соответственно. В [17] построены ZC-, ZA-, ZB-модули $\mathbf{Q}$, P, S, содержащие в качестве подмодулей, соответственно, F', G'_1, G'_2, такие, что $\mathbf{Q}$, как Z-модуль, разлагается в прямую сумму Z-модулей:

$$\mathbf{Q} = \textstyle\sum_{b \in B}^{\oplus} P \cdot b \oplus \sum_{a \in A}^{\oplus} S \cdot a. \qquad (1)$$

3. Основные результаты. У нас всегда $G = \text{гр}(a, H)$, H – неединичная полная абелева группа без кручения ранга 1, $M = H^G = \text{гр}(H^{a^i} \mid i \in Z)$ – нормальная подгруппа, порожденная (как нормальная подгруппа) группой H. Считаем, что M – абелева группа без кручения. Будем предполагать, что M – векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел и a индуцирует линейное преобразование векторного пространства M (a действует на M сопряжениями). Часто будем использовать аддитивную запись.

Лемма 1. Пусть $H = Q$, M – конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$ размерности ≥ 2. Предположим, что минимальный многочлен преобразования a равен

$$f(x) = a_0+a_1x+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}(a_0 \neq 0, a_{n-1} = 1).$$

Если $\sum\limits_{i=0}^{n-1} h_ia^i = 0 (h_i \in H)$, то $a_jh_i = a_ih_j$ для всех i, j.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как H – локально циклическая группа, то зафиксируем $h \in H$ такой, что $h_i = k_ih$, где $k_i \in Z$. Считаем, что $h \neq 0$. Так как $h \sum\limits_{i=0}^{n-1} k_ia^i = 0$, то a – корень многочлена $g(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} k_ix^i$. С другй стороны, a – корень $f(x)$. Так как $f(x)$ – минимальный многочлен и $H \neq (0)$, то наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$ равен многочлену $f(x)$. Таким образом, $f(x) = cg(x)$ для некоторого $c \in Q$, $c \neq 0$. Отсюда $ck_i = a_i$ для каждого i, поэтому $ch_i = ck_ih = a_ih$. Значит, $a_jh_i = c^{-1}a_jch_i = c^{-1}a_ja_ih, a_ih_j = c^{-1}a_ich_j = c^{-1}a_ja_ih$, откуда $a_jh_i = a_ih_j$. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $G = \text{гр}(a, H)$, где $H = Q$, $H \leq G'$, $M = H^G$ – конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$. Если $G = M\lambda(a)$ – полупрямое произведение, $a^n = 1$ и минимальный многочлен линейного преобразования векторного пространства M, индуцированного элементом a, имеет степень $n-1$, то $\text{dom}_G^{\mathcal{A}^2}(H) = H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $M = H$, то $H \lhd G$. Рассмотрим естественный гомоморфизм $\varphi : G \to G/H$ и гомоморфизм $\psi : G \to G/H$, отображающий каждый элемент из G в единицу. Имеем: $\varphi\mid_H = \psi\mid_H$ и $g^\varphi \neq g^\psi$ для все $g \notin H$. Отсюда $\text{dom}_G^{\mathcal{A}^2}(H) = H$.

Теперь будем считать, что $M \neq H$, т.е. размерность M не меньше 2. Пусть $\varphi_i : G \to G_i (i = 1, 2)$ – изоморфизмы, $H_i = H^{\varphi_i}$, $a = a^{\varphi_1}$, $b = a^{\varphi_2}$, $F = G_1 * G_2$ – метабелево произведение групп G_1 и G_2. Считаем, что G_1, G_2 – подгруппы F. Пусть $\varphi : G_2 \to G_1$ – изоморфизм, при котором $\varphi_1 = \varphi_2\varphi$. Условимся всякому элементу $g \in G_2$ приписывать индекс 2 (т.е. $g = g_2$), а его образу при φ – индекс 1 (т.е. $g^\varphi = g_1$). Пусть $N = \text{гр}(h_1h_2^{-1} \mid h \in H)^F$ – нормальная подгруппа, порожденная всевозможными элементами вида $h_1h_2^{-1}, h_1 \in H_1$. Тогда группа F/N является метабелевым произведением групп G_1 и G_2 с объединенными подгруппами H_1 и H_2.

Возьмем произвольный элемент $p \in \text{dom}_G^{\mathcal{A}^2}(H)$ и покажем, что $p \in G'$. В самом деле, так как $H \leq G'$, то группа $\overline{F} = (F/N)/(F/N)'$ изоморфна прямому произведению абелевых групп G_1/G_1' и G_2/G_2'. Пусть $\xi : F \to \overline{F}$ – естественный гомоморфизм группы F на группу $\overline{F}$, ξ_1 – тождественное отображение $\overline{F}$ на $\overline{F}$, $\xi_2 : \overline{F} \to \overline{F}$ – гоморфизм, при котором все элементы отображаются в единицу. Так как $\varphi_1\xi\xi_1, \varphi_1\xi\xi_2$ совпадают на H, то, по определению доминиона, $p^{\varphi_1\xi\xi_1} = p^{\varphi_1\xi\xi_2}$, откуда $p \in G'$.

Итак, возьмем произвольный элемент $p \in \text{dom}_G^{\mathcal{A}^2}(H), p \neq 1$. Покажем, что $p \in H$. Так как $p \in \text{dom}_G^{\mathcal{A}^2}(H)$, то $p_1p_2^{-1} \in N$. Далее будем использовать аддитивную запись.

Напомним, что a действует на векторное пространство M сопряжениями. Пусть

$$f(x) = a_0+a_1x+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}(a_0 \neq 0, a_{n-1} = 1)$$

– минимальный многочлен преобразования a. Так как a^n действует на M тривиально, то $f(x)$ – делитель многочлена $x^n - 1$, поэтому $a_i = 1$ для всех i. Поскольку $p_1 - p_2 \in N$ и $f(x)$ – многочлен степени $n - 1$, то $p_1 - p_2$ представим в следующем виде:

$$p_1 - p_2 = \sum_{i,j=0}^{n-1} (h_{1ij} - h_{2ij})a^ib^j, \tag{2}$$

где $h_{kij} \in H_k (k = 1, 2), h_{2ij}^\varphi = h_{1ij}$. Если $h_{100} \neq 0$, то вместо p_1, p_2 будем рассматривать, соответственно, $p_1 - h_{100}, p_2 - h_{200}$. Итак, считаем, что

$$h_{100} = 0, h_{200} = 0.$$

Полагаем, что у нас есть модули $\mathbf{Q}, P, S$, введенные ранее, и имеет место разложение (1). Ясно, что $p_1, h_{1ij} \in P$, $p_2, h_{2ij} \in S$.

Так как (1) – разложение в прямую сумму Z-модулей, то из (2) получаем

$$\sum_{i=0}^{n-1} h_{1ij}a^i = 0 (j \neq 0), \tag{3}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} h_{2ij}b^j = 0 (i \neq 0). \tag{4}$$

Применяя к (4) изоморфизм φ, выводим равенство

$$\sum_{i=0}^{n-1} h_{1ji}a^i = 0 (j \neq 0). \tag{5}$$

Теперь (3) и (5) дают

$$\sum_{i=0}^{n-1} (h_{1ij} - h_{1ji})a^i = 0 (j \neq 0). \tag{6}$$

По лемме 1, примененной к (3), для любых k, i имеем:

$$h_{1ij} = h_{1kj} (j \neq 0). \quad (7)$$

Аналогично из (5) следует, что для любых l, i

$$h_{1ji} = h_{1jl} (j \neq 0). \quad (8)$$

В частности, из (7) получаем, что

$$h_{1ij} = h_{1jj} (j \neq 0),$$

а из (8)

$$h_{1ji} = h_{1jj} (j \neq 0).$$

Отсюда

$$h_{1ji} = h_{1ij} \quad (9)$$

для любых $i, j (j \neq 0)$. Легко заметить, что это равенство (9) также выполнено при $j = 0$.

Учитывая, что $h_{100} = 0$, из (2) следует равенство

$$p_1 = \sum_{i=1}^{n-1} h_{1i0} a^i,$$

откуда

$$p_1 = \sum_{i=1}^{n-1} h_{1i0} a^i =_{(\text{по } 9)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} h_{10i} a^i =_{(\text{по } 7)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} h_{1,n-1,i} a^i = \sum_{i=0}^{n-1} h_{1,n-1,i} a^i - h_{1,n-1,0} =$$

$$=_{(\text{по } 5)} -h_{1,n-1,0}.$$

Следовательно $p_1 = -h_{1,n-1,0} \in H_1$. Лемма доказана. Теперь несложно доказать следующую теорему.

Теорема 1. Пусть $G = \text{гр}(a, H)$, где $H = Q$, $H \leq G'$, $M = H^G$ – группа без кручения. Если $a^n \in M$ и минимальный многочлен линейного преобразования векторного пространства M, индуцированного элементом a, имеет степень $n-1$, то $\text{dom}_G^{\mathcal{A}^2}(H) = H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как M – полная группа, то выберем элемент $h \in M$, для которого $h^n = a^n$. Тогда $(a^{-1}ha)^n = h^n$. Поскольку $a^{-1}ha, h \in M$ и M – группа с однозначным извлечением корня, то $a^{-1}ha = h$. Отсюда $(ah^{-1})^n = a^n h^{-n} = 1$. Элемент ah^{-1} действует на M сопряжениями так же, как элемент a, следовательно, их минимальные многочлены совпадают. Так как рассматриваемый минимальный многочлен имеет степень $n-1$, то получаем, что ah^{-1} – элемент порядка n. Теперь видим, что $G = M\lambda(ah^{-1})$ и по лемме 2 $\text{dom}_G^{\mathcal{A}^2}(H) = H$. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $G = \text{гр}(a, H)$, где $H = Q$, $H \leq G'$, $M = H^G$ – группа без кручения. Если $a^p \in M$ для некоторого простого числа p, то $\text{dom}_G^{\mathcal{A}^2}(H) = H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В этом случае соответствующий минимальный многочлен равен $x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$ и можно воспользоваться теоремой 1.

Пусть теперь $G = \text{гр}(a, H)$ и H – циклическая группа простого порядка p. Тогда на абелеву группу $M = H^G$ можно смотреть как на векторное пространство над полем из p элементов. Почти дословное повторение доказательств лемм 1, 2 и теоремы 1 позволяет получить следующую теорему.

Теорема 2. Пусть $G = \text{гр}(a, H)$, где H – циклическая группа простого порядка , $H \leq G'$, $M = H^G$. Если $G = M\lambda(a)$, $a^n = 1$ и минимальный многочлен линейного преобразования векторного пространства M, индуцированного элементом a, имеет степень $n-1$, то $\text{dom}_G^{\mathcal{A}^2}(H) = H$.

В абелевой группе M простой экспоненты p извлечение корня n-й степени, когда n не делится на p, – однозначная операция. Следовательно, доказательство теоремы 1 может быть повторено для группы M экспоненты p. Таким образом, справедлив следующий факт.

Теорема 3. Пусть $G = \text{гр}(a, H)$, где H – циклическая группа простого порядка p, $H \leq G'$, $M = H^G$. Если $a^n \in M$, n не делится на p и минимальный многочлен линейного преобразования векторного пространства M, индуцированного элементом a, имеет степень $n-1$, то $\text{dom}_G^{\mathcal{A}^2}(H) = H$.

Замечание 1. Пусть $H \leq G \in \mathcal{A}^2$, $H \cap G' = (1)$. Если H – полная абелева группа, то $\text{dom}_G^{\mathcal{A}^2}(H) = H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi : G \to G/G'$ – естественный гомоморфизм. Так как H^φ – полная абелева группа, то она выделяется в G/G' прямым сомножителем. Отсюда существует гомоморфизм $\psi : G/G' \to H^\varphi$, тождественный на H^φ. Пусть $\xi : H^\varphi \to H \leq G$ – изоморфизм, при котором для любого элемента $h \in H$ имеем: $h^{\varphi\psi\xi} = h$. Тождественное отображение $\iota : G \to G$ и гомоморфизм $\varphi\psi\xi$ совпадают на H. Кроме того, $g^\iota \neq g^{\varphi\xi\psi}$ для любого $g \notin H$. Получаем, что $\text{dom}_G^{\mathcal{A}^2}(H) = H$. Замечание доказано.

Библиографический список

1. Isbell, J.R. Epimorphisms and dominions // Proc. of the Conference on Categorical Algebra, La Jolla 1965, Lange and Springer. – New York, 1966.

2. Higgins, P.M. Epimorphisms and amalgams // Colloq. Math.– 1988. – V. 56, №1.

3. Шахова С.А. О решетках доминионов в квазимногообразиях абелевых групп // Алгебра и логика. – 2005. – Т. 44, №2.

4. Magidin, A. Dominions in varieties of nilpotent groups // Comm. Algebra. – 2000. – V. 28, №3.

5. Budkin, A.I. Dominions in Quasivarieties of Universal Algebras // Studia Logica. – 2004.– V. 78, №1/2.

6. Мальцев А.И. Квазипримитивные классы абстрактных алгебр // Доклады АН СССР. – 1956. – Т. 108, №2.

7. Шахова С.А. Условия дистрибутивности решеток доминионов в квазимногообразиях абелевых групп // Алгебра и логика. – 2006. – Т. 45, №4.

8. Шахова С.А. Об одном свойстве операции пересечения в решетках доминионов квазимногообразий абелевых групп // Известия АлтГУ. – 2010. – №1.

9. Будкин А.И. Решетки доминионов универсальных алгебр // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46, №1.

10. Будкин А.И. Доминионы универсальных алгебр и проективные свойства // Алгебра и логика. – 2008. – Т. 47, №5.

11. Будкин А.И. Квазимногообразия групп. – Барнаул, 2002.

12. Будкин А.И., Горбунов В.А. К теории квазимногообразий алгебраических систем // Алгебра и логика. – 1975. – Т. 14, №2.

13. Горбунов В.А. Алгебраическая теория квазимногообразий. – Новосибирск, 1999.

14. Мальцев А.И. Алгебраические системы. – М., 1970.

15. Каргаполов М.И., Мерздяков Ю.И. Основы теории групп. – М., 1982.

16. Будкин А.И. О доминионах в квазимногообразиях метабелевых групп // Сиб. матем. журнал. – 2010. – Т. 51, №3.

17. Ремесленников В.Н., Романовский Н.С. О метабелевых произведениях групп // Алгебра и логика. – 2004. – Т. 43, №3.