УДК 512.54.01

Ю.А. Авцинова

Об одной решетке квазимногообразий метабелевых групп без кручения[1]

Yu.A. Avtsinova

On a Lattice of Quasi-varieties of Torsion-free Metabelian Groups [1]

Пусть M – квазимногообразие всех групп без кручения, в которых квадраты элементов перестановочны. В работе построена решетка квазимногообразий, содержащихся в M и определимых данными квазитождествами от двух переменных.

Ключевые слова: решетка, квазимногообразие, метабелевы группы.

Let M be a quasi-variety of torsion-free groups in which squares of all elements are commutative. In this paper we constructed a lattice of quasi-varieties contained in M and defined by given quasiidentities in two variables.

Key words: lattice, quasivariety, metabelian groups.

Введение. Пусть $\mathcal{M}$ – квазимногообразие всех групп без кручения, удовлетворяющих тождеству

$$(\forall x)(\forall y)([x^2, y^2] = 1). \qquad (1)$$

В [1] доказано, что единственным собственным подквазимногообразием в $\mathcal{M}$, определимым коммутаторными квазитождествами от двух переменных, является квазимногообразие абелевых групп без кручения. Естественно, возникла задача изучения подквазимногообразий в $\mathcal{M}$, которые задаются квазитождествами произвольного вида от двух переменных. Рассмотрим следующий список квазитождеств:

$$\Psi_1 = (\forall x)(\forall y)(x^{-4} = [x, y][x, y]^x \ \& \ \& \ [x, y][x, y]^y = 1 \to [x, y]^x[x, y]^y = 1);$$

$$\Psi_2 = (\forall x)(\forall y)(x^{-4} = [x, y][x, y]^x \ \& \ \& \ [x, y]^x[x, y]^y = 1 \to [x, y][x, y]^y = 1);$$

$$\Psi_3 = (\forall x)(\forall y)(x^{-4} = [x, y][x, y]^x \to \to [x, y][x, y]^y = 1);$$

$$\Psi_4 = (\forall x)(\forall y)(x^{-4} = [x, y][x, y]^x \to \to [x, y]^x[x, y]^y = 1);$$

$$\Psi_5 = (\forall x)(\forall y)(x^{-4} = [x, y][x, y]^x \ \& \ \& \ y^4 = [x, y][x, y]^y \to [x, y] = 1).$$

Квазимногообразия, которые можно задать в $\mathcal{M}$ квазитождествами из этого списка, частично упорядочены относительно включения и образуют решетку. Цель данной работы – построение этой решетки квазимногообразий.

1. Основные обозначения и предварительные замечания. Введем следующие обозначения:

$\mathcal{M}$ – квазимногообразие, заданное в классе групп без кручения тождеством (1);

$\mathcal{R}$ – многообразие, заданное тождеством (1);

G' – коммутант группы G;

Z – множество целых чисел;

$ker\varphi$ – ядро гомоморфизма φ;

$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ – коммутатор элементов x и y; $x^y = y^{-1}xy$;

$[x, y]^{tx} = ([x, y]^t)^x = x^{-1}[x, y]^t x$ $(t \in Z)$;

гр$(a_1, a_2, \ldots)$ – группа, порожденная элементами $a_1, a_2, \ldots$;

(a) – циклическая группа, порожденная элементом a;

$H \leq G$ – H является подгруппой группы G.

Будем рассматривать группы G_3, G_4, G_5, имеющие в многообразии $\mathcal{R}$ следующие представления:

$G_3 = $ гр$(a, b, c \parallel [a, b] = b^2,\ [a, c] = c^2,\ [b, c] = c^2)$;
$G_4 = $ гр$(a, b \parallel a^{-4} = [a, b][a, b]^a)$;
$G_5 = $ гр$(a, b \parallel a^{-4} = [a, b][a, b]^a,\ b^4 = [a, b][a, b]^b)$.

Запись $G \vDash \Phi$ читается "в группе G истинно квазитождество Φ". Запись $G \nvDash \Phi$ означает противоположное высказывание.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы" (мероприятие 1).

Запись $\Psi \vdash \Phi$ означает, что квазитождество Φ является следствием квазитождества Ψ в $\mathcal{M}$. Если $\Psi \vdash \Phi$ и $\Phi \vdash \Psi$, то квазитождества Ψ и Φ называются эквивалентными в $\mathcal{M}$.

Будем использовать следующие хорошо известные тождества:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall t)([xy, zt] =$$
$$= [x,t]^y[y,t][x,z]^{yt}[y,z]^t), \tag{2}$$
$$(\forall x)(\forall y)((x^2)^y = x^2[x,y]^x[x,y]), \tag{3}$$

истинные в любой группе.

Если $G \in \mathcal{M}$ и $H = \text{гр}(x^2 \mid x \in G)$, то G/H – абелева группа. Отсюда справедливо

Замечание 1. В каждой группе из $\mathcal{M}$ истинны тождества:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall w)(\big[[x,y],[z,w]\big] = 1),$$
$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\big[[x,y],z^2\big] = 1),$$
$$(\forall x)(\forall y)([x,y]^{xy} = [x,y]^{yx}).$$

Применяя коммутаторные тождества к $[x^2, y^2]$, получаем следующее.

Замечание 2. В каждой группе из $\mathcal{M}$ истинно тождество

$$(\forall x)(\forall y)([x,y]^{xy} = [x,y]^{-x}[x,y]^{-1}[x,y]^{-y}). \tag{4}$$

При написании тождеств и квазитождеств кванторы всеобщности будем иногда опускать.

Доказательство следующего факта, которым будем далее пользоваться, принадлежит А.И. Будкину.

ЛЕММА 1. *Пусть $F_2 =$ гр (x,y) – свободная группа в многообразии $\mathcal{R}$. Тогда запись любого элемента из F_2 в виде $x^{k_1}y^{k_2}[x,y]^{k_3}[x,y]^{k_4x}[x,y]^{k_5y}$, где $k_i \in Z$ $(i = 1,2,3,4,5)$, однозначна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из тождества (1) следует, что любой элемент $f \in F_2$ представим в виде

$$f = x^{k_1}y^{k_2}[x,y]^{k_3}[x,y]^{k_4x}[x,y]^{k_5y},$$

где все $k_i \in Z$. Покажем, что такое представление однозначно. Пусть
$f_1 = x^{k_1}y^{k_2}[x,y]^{k_3}[x,y]^{k_4x}[x,y]^{k_5y} \in F_2$,
$f_2 = x^{l_1}y^{l_2}[x,y]^{l_3}[x,y]^{l_4x}[x,y]^{l_5y} \in F_2$ и $f_1 = f_2$. Докажем, что $k_i = l_i$ $(i = 1,2,3,4,5)$.

Пусть $G = Z \times Z = (a) \times (b) \in \mathcal{R}$. Тогда существует гомоморфизм $\chi : F_2 \to G$, при котором $x \to a$, $y \to b$. Имеем: $\chi(f_1) = a^{k_1}b^{k_2}$, $\chi(f_2) = a^{l_1}b^{l_2}$. Так как $f_1 = f_2$, то $\chi(f_1) = \chi(f_2)$ и, следовательно, $k_1 = l_1$, $k_2 = l_2$.

Теперь достаточно показать, что запись единицы в следующем виде:

$$1 = [x,y]^{s_3}[x,y]^{s_4x}[x,y]^{s_5y}$$

однозначна.

Пусть $A = (\overline{a}) \times (\overline{b})$ – прямое произведение групп порядка 2 и $^{-} : G \to A$ – естественный гомоморфизм, при котором образ $g \in G$ обозначается через $\overline{g}$. Рассмотрим свободный ZA – модуль T с базой $\{t_1, t_2\}$, т.е.

$$T = \{u_1t_1 + u_2t_2 \mid u_1, u_2 \in ZA\},$$

где

$$ZA = \{c_1\overline{a} + c_2\overline{b} + c_3\overline{a}\overline{b} + c_4 \mid c_i \in Z \ (i = 1,2,3,4)\}$$

– целочисленное групповое кольцо группы A. На множестве M матриц

$$\left\{ \begin{pmatrix} g & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid g \in G, h \in T \right\}$$

введем операцию умножения так:

$$\begin{pmatrix} g_1 & h_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_2 & h_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1g_2 & \overline{g_1}h_2 + h_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Несложно проверить, что множество M с введенной операцией образует группу, которую будем снова обозначать буквой M, и $M \in \mathcal{R}$. Так как F_2 – свободная группа в $\mathcal{R}$, то отображение:

$$x \to \begin{pmatrix} a & t_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$y \to \begin{pmatrix} b & t_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

продолжается до гомоморфизма $\psi : F_2 \to M$. Легко проверить, что

$$E = \psi([x,y]^{s_3}[x,y]^{s_4x}[x,y]^{s_5y}) =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & r_1t_1 + r_2t_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $r_1 = (s_5 - s_3)\overline{a} + s_4\overline{b} + (s_3 - s_5)\overline{a}\overline{b} - s_4$,
$r_2 = -s_5\overline{a} + (s_3 - s_4)\overline{b} + (s_4 - s_3)\overline{a}\overline{b} + s_5$.

Отсюда, $r_1 = r_2 = 0$ и находим

$$s_3 = s_4 = s_5 = 0.$$

Следовательно, $k_i = l_i$ для всех i. Лемма доказана.

Всю необходимую информацию о группах можно найти в [2–4], о квазимногообразиях – в [5, 6], о решетках – в [7, 8].

Основной результат. ЛЕММА 2. *1) Квазитождества Ψ_1 и Ψ_2 эквивалентны в $\mathcal{M}$;*

2) Квазитождества Ψ_3 и Ψ_4 эквивалентны в $\mathcal{M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделав замену $y = xy$ в квазитождестве Ψ_1, получим эквивалентное в $\mathcal{M}$ квазитождество:

$$x^{-4} = [x, xy][x, xy]^x \ \& \ [x, xy][x, xy]^{xy} = 1 \to \\ \to [x, xy]^x [x, xy]^{xy} = 1.$$

Теперь, применяя тождества (2) и (4), получаем квазитождество Ψ_2. То есть квазитождество Ψ_1 эквивалентно квазитождеству Ψ_2.

Выполнив аналогичные действия с квазитождеством Ψ_3, получим эквивалентность квазитождеств Ψ_3 и Ψ_4. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. *Квазитождества Ψ_1 и Ψ_5 являются следствием квазитождества Ψ_4.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что $\Psi_4 \vdash \Psi_1$. Докажем, что $\Psi_4 \vdash \Psi_5$. Пусть $G \in \mathcal{M}$, $G \vDash \Psi_4$ и левая часть квазитождества Ψ_5 истинна в группе G при интерпретации $\tau : x \to a$, $y \to b$. Имеем:

$$a^{-4} = [a, b][a, b]^a, \ \ b^4 = [a, b][a, b]^b,$$

т.е. левая часть квазитождества Ψ_4 при интерпретации τ истинна в G. Так как $G \vDash \Psi_4$ и по лемме 2 квазитождества Ψ_4 и Ψ_3 (с одинаковыми левыми частями) эквивалентны, то правая часть Ψ_3 при интерпретации τ истинна в G, т.е. $1 = [a, b][a, b]^b$. Отсюда $b^4 = [a, b][a, b]^b = 1$, поэтому $b = 1$. Значит, правая часть квазитождества Ψ_5 истинна при интерпретации τ. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Пусть группа G_4 имеет в многообразии $\mathcal{R}$ следующее представление:*

$$G_4 = \text{гр } (a, b \parallel a^{-4} = [a, b][a, b]^a).$$

Тогда G_4 – неабелева группа без кручения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любой элемент из группы G_4 имеет вид:

$$a^{k_1} b^{k_2} [a, b]^{k_3} [a, b]^{k_4 a} [a, b]^{k_5 b},$$

где $k_1 = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ k_i \in Z (i = 2, 3, 4, 5)$.

Пусть $F_2 = \text{гр}(x, y)$ – свободная группа в $\mathcal{R}$. Существует гомоморфизм $\phi : F_2 \to G_4$, при котором $x \to a, y \to b$. Пусть $N = ker\phi$. Ввиду (3) и (4), несложно заметить, что элемент $x^4[x, y][x, y]^x$ содержится в центре группы F_2, поэтому $N = (x^4[x, y][x, y]^x)$. Значит, любой элемент из N можно записать в виде $(x^4[x, y][x, y]^x)^l = x^{4l}[x, y]^l[x, y]^{lx}$, где $l \in Z$.

Предположим, что в группе G_4 есть элементы конечного порядка. Пусть $g \in G_4$, $g^n = (a^{k_1} b^{k_2} [a, b]^{k_3} [a, b]^{k_4 a} [a, b]^{k_5 b})^n = 1$ и $n \neq 0$.

Тогда существует такой l, что

$$(x^{k_1} y^{k_2} [x, y]^{k_3} [x, y]^{k_4 x} [x, y]^{k_5 y})^n = x^{4l}[x, y]^l [x, y]^{lx}.$$

Отсюда, так как $(x^{k_1} y^{k_2} [x, y]^{k_3} [x, y]^{k_4 x} [x, y]^{k_5 y})^n = x^{nk_1} y^{nk_2} c$, где $c \in G_4'$, то, по лемме 1, из однозначности записи элементов в группе F_2 получаем $k_2 = 0$, $nk_1 = 4l$.

а) Если $k_1 = 0$, то из равенства $x^{4l}[x, y]^l[x, y]^{lx} = ([x, y]^{k_3} [x, y]^{k_4 x} [x, y]^{k_5 y})^n = [x, y]^{nk_3} [x, y]^{nk_4 x} [x, y]^{nk_5 y}$, ввиду леммы 1, имеем: $4l = 0$, $l = nk_3$, $l = nk_4$, $0 = nk_5$. Следовательно, $k_i = 0$ для всех i, т.е. $g = 1$.

б) Если $k_1 \neq 0$, то n – четное число. Имеем $(x^{k_1} [x, y]^{k_3} [x, y]^{k_4 x} [x, y]^{k_5 y})^2 = x^{2k_1} [x, y]^{k_3'} [x, y]^{k_4' x} [x, y]^{k_5' y}$, где $k_i' \in Z$ $(i = 3, 4, 5)$.

Тогда

$$x^{4l}[x, y]^l[x, y]^{lx} = (x^{k_1} [x, y]^{k_3} [x, y]^{k_4 x} [x, y]^{k_5 y})^n = \\ = x^{nk_1} [x, y]^{\frac{n}{2} k_3'} [x, y]^{\frac{n}{2} k_4' x} [x, y]^{\frac{n}{2} k_5' y}.$$

Из однозначности записи элементов в группе F_2, видим, что $nk_1 = 4l$, $\frac{n}{2} k_3' = l$, $\frac{n}{2} k_4' = l$, $\frac{n}{2} k_5' = 0$. Значит, $nk_1 = 4l = 2nk_3'$. Поэтому k_1 – четное число. Получаем

$$x^{4l}[x, y]^l[x, y]^{lx} = (x^{k_1} [x, y]^{k_3} [x, y]^{k_4 x} [x, y]^{k_5 y})^n = \\ = x^{nk_1} [x, y]^{nk_3} [x, y]^{nk_4 x} [x, y]^{nk_5 y}.$$

Отсюда, по лемме 1, $nk_1 = 4l$, $nk_3 = l$, $nk_4 = l$, $nk_5 = 0$. Имеем $nk_1 = 4l = 4nk_3$, поэтому $k_1 = 0$. Противоречие, так как $k_1 \neq 0$. Значит, этого случая быть не может.

Следовательно, неединичных элементов конечного порядка в группе G_4 нет. Из этих же рассуждений следует, что $[a, b] \neq 1$, поэтому группа G_4 неабелева. Лемма доказана.

Замечание 3. Квазитождество Ψ_4 ложно в группе G_4.

ЛЕММА 5. *Квазитождества Ψ_1 и Ψ_4 задают различные квазимногообразия в $\mathcal{M}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $G_4 \vDash \Psi_1$. Пусть левая часть квазитождества Ψ_1 истинна в группе G_4 при отображении τ :

$x \to a^{k_1} b^{k_2} [a, b]^{k_3} [a, b]^{k_4 a} [a, b]^{k_5 b}$,

$y \to a^{l_1} b^{l_2} [a, b]^{l_3} [a, b]^{l_4 a} [a, b]^{l_5 b}$.

Так как $(a^{k_1} b^{k_2} [a, b]^{k_3} [a, b]^{k_4 a} [a, b]^{k_5 b})^4 \in G_4'$, то $k_2 = 0$. Тогда, замечая, что для порождающих a, b группы G_4 выполнено

$$[a, b]^{a^t b^s} = [a, b]^{\frac{(-1)^t + (-1)^s}{2}} [a, b]^{\left(\frac{1-(-1)^t}{2}\right)(-1)^s a} \cdot \\ \cdot [a, b]^{\left(\frac{1-(-1)^s}{2}\right)(-1)^t b},$$

где $t, s \in Z$, имеем следующее:

$$\tau(x)^2 = a^{2k_1} [a, b]^{k_3'} [a, b]^{k_4' a} [a, b]^{k_5' b},$$

где $k'_i \in Z$;

$$\tau(x)^4 = a^{4k_1}[a,b]^{2k'_3}[a,b]^{2k'_4 a}[a,b]^{2k'_5 b} =$$

$$= [a,b]^{(2k'_3-k_1)}[a,b]^{(2k'_4-k_1)a}[a,b]^{2k'_5 b},$$

где $k'_i \in Z$;

$$[\tau(x),\tau(y)] = [a,b]^{t_1}[a,b]^{t_2 a}[a,b]^{t_3 b},$$

где $t_i \in Z$;

$$[\tau(x),\tau(y)]^{\tau(x)} =$$

$$= [a,b]^{t_1\left(\frac{(-1)^{k_1}+1}{2}\right)+(t_3-t_2)\left(\frac{(-1)^{k_1}-1}{2}\right)}\cdot$$

$$\cdot[a,b]^{\left((t_1-t_3)\left(\frac{1-(-1)^{k_1}}{2}\right)+t_2\left(\frac{1+(-1)^{k_1}}{2}\right)\right)a}[a,b]^{t_3(-1)^{k_1}b};$$

$$[\tau(x),\tau(y)]^{\tau(y)} =$$

$$= [a,b]^{t_1\left(\frac{(-1)^{l_1}+(-1)^{l_2}}{2}\right)+(t_3-t_2)\left(\frac{(-1)^{l_1}-(-1)^{l_2}}{2}\right)}\cdot$$

$$\cdot[a,b]^{\left((t_1-t_3)\left(\frac{1-(-1)^{l_1}}{2}\right)(-1)^{l_2}+t_2\left(\frac{1+(-1)^{l_1}}{2}\right)(-1)^{l_2}\right)a}\cdot$$

$$\cdot[a,b]^{\left((t_1-t_2)\left(\frac{1-(-1)^{l_2}}{2}\right)(-1)^{l_1}+t_3\left(\frac{1+(-1)^{l_2}}{2}\right)(-1)^{l_1}\right)b}.$$

Случай 1. k_1 – четное число. Тогда $[\tau(x),\tau(y)] = [\tau(x),\tau(y)]^{\tau(x)}$, и из истинности левой части квазитождества Ψ_1 в группе G_4 при τ следует истинность правой части Ψ_1 в G_4 при данном отображении.

Случай 2. k_1 – нечетное число. Из истинности левой части квазитождества Ψ_1 в группе G_4 получаем систему из шести равенств:

$$2k'_3 - k_1 + t_1 + t_2 - t_3 = 0, \tag{5}$$

$$2k'_4 - k_1 + t_1 + t_2 - t_3 = 0, \tag{6}$$

$$2k'_5 = 0, \tag{7}$$

$$t_1 + (t_3 - t_2)\Big(\frac{(-1)^{l_1} - (-1)^{l_2}}{2}\Big) + t_1\Big(\frac{(-1)^{l_1} + (-1)^{l_2}}{2}\Big) = 0, \tag{8}$$

$$t_2 + (t_1 - t_3)\Big(\frac{1-(-1)^{l_1}}{2}\Big)(-1)^{l_2} + t_2\Big(\frac{1+(-1)^{l_1}}{2}\Big)(-1)^{l_2} = 0, \tag{9}$$

$$t_3 + (t_1 - t_2)\Big(\frac{1-(-1)^{l_2}}{2}\Big)(-1)^{l_1} + t_3\Big(\frac{1+(-1)^{l_2}}{2}\Big)(-1)^{l_1} = 0. \tag{10}$$

а) l_1, l_2 – четные числа. Тогда из (8), (9), (10) следует, что $t_1 = t_2 = t_3 = 0$. Из (5) k_1 – четное число, противоречие.

б) l_1, l_2 – нечетные числа. Из (9) $t_1 = t_2 + t_3$, по (5) k_1 – четное число, противоречие.

в) l_1 – четное число, l_2 – нечетное число. Тогда из (8) выводим $t_2 = t_1 + t_3$. Ввиду (5), получаем противоречие.

г) l_1 – нечетное число, l_2 – четное число. Из (8) следует, что $t_3 = t_1 + t_2$. Из (5) получаем противоречие с тем, что k_1 – нечетное число.

Следовательно, случай 2 невозможен и $G_4 \models \Psi_1$. Отсюда и из замечания 3 получаем, что группа G_4 принадлежит квазимногообразию, заданному квазитождеством Ψ_1, и не принадлежит квазимногообразию, заданному квазитождеством Ψ_4. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. *Пусть группа G_5 имеет в многообразии $\mathcal{R}$ следующее представление:*

$$G_5 = \text{гр}\ (a, b \parallel a^{-4} = [a,b][a,b]^a, b^4 = [a,b][a,b]^b).$$

Тогда G_5 – неабелева группа без кручения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любой элемент из группы G_5 имеет вид:

$$a^{k_1}b^{k_2}[a,b]^{k_3}[a,b]^{k_4 a}[a,b]^{k_5 b},$$

где $k_1 = 0,1,2,3$, $k_2 = 0,1,2,3$, $k_i \in Z (i = 3,4,5)$.

Пусть $F_2 = \text{гр}(x,y)$ – свободная группа в $\mathcal{R}$. Существует гомоморфизм $\sigma : F_2 \to G_5$, при котором $x \to a, y \to b$. Пусть $N = ker\sigma$. Ввиду (3) и (4), несложно заметить, что элементы $x^4[x,y][x,y]^x$ и $y^{-4}[x,y][x,y]^y$ содержатся в центре группы F_2, поэтому любой элемент из N можно записать в виде

$$(x^4[x,y][x,y]^x)^l(y^{-4}[x,y][x,y]^y)^q =$$

$$= x^{4l}y^{-4q}[x,y]^{l+q}[x,y]^{lx}[x,y]^{qy},$$

где $l, q \in Z$.

Предположим, что в группе G_5 есть элементы конечного порядка. Пусть $g \in G_5$, $g^n = (a^{k_1}b^{k_2}[a,b]^{k_3}[a,b]^{k_4 a}[a,b]^{k_5 b})^n = 1$ и $n \neq 0$.

Тогда существуют такие l и q, что

$$(x^{k_1}y^{k_2}[x,y]^{k_3}[x,y]^{k_4 x}[x,y]^{k_5 y})^n =$$

$$= x^{4l}y^{-4q}[x,y]^{l+q}[x,y]^{lx}[x,y]^{qy}.$$

Случай 1. $k_1 = 0,\ k_2 = 0$. Из равенства

$$x^{4l}y^{-4q}[x,y]^{l+q}[x,y]^{lx}[x,y]^{qy} =$$

$$= [x,y]^{nk_3}[x,y]^{nk_4 x}[x,y]^{nk_5 y},$$

ввиду леммы 1, имеем:
$4l = 0,\ -4q = 0,\ l + q = nk_3,\ l = nk_4,\ q = nk_5$.
Следовательно, $k_i = 0$ для всех i, т.е. $g = 1$.

Случай 2. $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$. Так как

$$x^{4l}y^{-4q}[x,y]^{l+q}[x,y]^{lx}[x,y]^{qy} =$$

$$= x^{nk_1}y^{nk_2}c,\ \text{где}\ c \in G'_5,$$

то, по лемме 1, из однозначности записи элементов в группе F_2 получаем $nk_1 = 4l$, $nk_2 = -4q$. Поэтому n – четное число. Имеем

$$(x^{k_1}y^{k_2}[x,y]^{k_3}[x,y]^{k_4x}[x,y]^{k_5y})^2 =$$

$$= x^{2k_1}y^{2k_2}[x,y]^{k_3'}[x,y]^{k_4'x}[x,y]^{k_5'y},$$

где $k_i' \in Z$ $(i = 3,4,5)$.

Тогда

$$x^{4l}y^{-4q}[x,y]^{l+q}[x,y]^{lx}[x,y]^{qy} =$$

$$= (x^{k_1}y^{k_2}[x,y]^{k_3}[x,y]^{k_4x}[x,y]^{k_5y})^n =$$

$$= x^{nk_1}y^{nk_2}[x,y]^{\frac{n}{2}k_3'}[x,y]^{\frac{n}{2}k_4'x}[x,y]^{\frac{n}{2}k_5'y}.$$

Из однозначности записи элементов в группе F_2, видим, что $nk_1 = 4l$, $nk_2 = -4q$, $\frac{n}{2}k_3' = l+q$, $\frac{n}{2}k_4' = l$, $\frac{n}{2}k_5' = q$.

Значит, $nk_1 = 4l = 2nk_4'$, $nk_2 = -4q = -2nk_5'$. Поэтому k_1, k_2 – четные числа. Получаем

$$x^{4l}y^{-4q}[x,y]^{l+q}[x,y]^{lx}[x,y]^{qy} =$$

$$= x^{nk_1}y^{nk_2}[x,y]^{nk_3}[x,y]^{nk_4x}[x,y]^{nk_5y}.$$

Отсюда, по лемме 1, $nk_1 = 4l$, $nk_2 = -4q$, $nk_3 = l+q$, $nk_4 = l$, $nk_5 = q$. Имеем: $nk_1 = 4l = 4nk_4$ и $nk_2 = -4q = -4nk_5$, поэтому $k_1 = k_2 = 0$, противоречие. Значит, этого случая быть не может.

Следовательно, неединичных элементов конечного порядка в группе G_5 нет. Из этих же рассуждений следует, что $[a,b] \neq 1$, поэтому группа G_5 неабелева. Лемма доказана.

Замечание 4. Квазитождество Ψ_5 ложно в группе G_5.

ЛЕММА 7. *Квазитождества Ψ_1 и Ψ_5 задают несравнимые квазимногообразия в $\mathcal{M}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко заметить, что группа $G_3 \in \mathcal{M}$. Покажем сначала, что квазитождество Ψ_5 истинно в группе G_3. Предположим, что левая часть Ψ_5 истинна в G_3 при интерпретации $x \to a^{k_1}b^{k_2}c^{k_3}$, $y \to a^{l_1}b^{l_2}c^{l_3}$. Имеем $(a^{k_1}b^{k_2}c^{k_3})^4 \in G_3'$ и $(a^{l_1}b^{l_2}c^{l_3})^4 \in G_3'$, поэтому $k_1 = 0$ и $l_1 = 0$. Так как $\text{гр}(b,c)' \leq (c)$, то $(b^{k_2}c^{k_3})^4 \in (c)$ и $(b^{l_2}c^{l_3})^4 \in (c)$. Отсюда $k_2 = 0$ и $l_2 = 0$. Следовательно, $[a^{k_1}b^{k_2}c^{k_3}, a^{l_1}b^{l_2}c^{l_3}] = 1$. Значит, правая часть Ψ_5 при данной интерпретации истинна в группе G_3.

Докажем, что квазитождество Ψ_1 ложно в $G_3 \in \mathcal{M}$. Рассмотрим отображение $\tau: \ x \to b,\ y \to ac$.

Видим, что $b^{-4} = [b,ac][b,ac]^b = b^{-2}c^2b^{-2}c^{-2}$ и $[b,ac][b,ac]^{ac} = b^{-2}c^2b^2c^{-2} = 1$, но $[b,ac]^b[b,ac]^{ac} = b^{-2}c^{-2}b^2c^{-2} = c^{-4} \neq 1$. Следовательно, $G_3 \nvDash \Psi_1$.

Теперь покажем, что $G_5 \vDash \Psi_1$. Пусть левая часть квазитождества Ψ_1 истинна в группе G_5 при отображении τ :

$x \to a^{k_1}b^{k_2}[a,b]^{k_3}[a,b]^{k_4a}[a,b]^{k_5b}$,

$y \to a^{l_1}b^{l_2}[a,b]^{l_3}[a,b]^{l_4a}[a,b]^{l_5b}$.

Несложно проверить, что для порождающих a,b группы G_5 выполнено следующее равенство: $[a,b]^{a^tb^s} = [a,b]^{\frac{(-1)^t+(-1)^s}{2}}[a,b]^{\left(\frac{1-(-1)^t}{2}\right)(-1)^s a}\cdot$

$$\cdot[a,b]^{\left(\frac{1-(-1)^s}{2}\right)(-1)^t b}.$$

Имеем:

$$\tau(x)^2 = a^{2k_1}b^{2k_2}[a,b]^{k_3'}[a,b]^{k_4'a}[a,b]^{k_5'b},$$

где $k_i' \in Z$;

$$\tau(x)^4 = [a,b]^{(2k_3'-k_1+k_2)}[a,b]^{(2k_4'-k_1)a}[a,b]^{(2k_5'+k_2)b},$$

где $k_i' \in Z$;

$$[\tau(x),\tau(y)] = [a,b]^{t_1}[a,b]^{t_2a}[a,b]^{t_3b},$$

где $t_i \in Z$;

$$[\tau(x),\tau(y)]^{\tau(x)} =$$

$$= [a,b]^{t_1\left(\frac{(-1)^{k_1}+(-1)^{k_2}}{2}\right)+(t_3-t_2)\left(\frac{(-1)^{k_1}-(-1)^{k_2}}{2}\right)}\cdot$$

$$\cdot[a,b]^{\left((t_1-t_3)\left(\frac{1-(-1)^{k_1}}{2}\right)(-1)^{k_2}+t_2\left(\frac{1+(-1)^{k_1}}{2}\right)(-1)^{k_2}\right)a}\cdot$$

$$\cdot[a,b]^{\left((t_1-t_2)\left(\frac{1-(-1)^{k_2}}{2}\right)(-1)^{k_1}+t_3\left(\frac{1+(-1)^{k_2}}{2}\right)(-1)^{k_1}\right)b}.$$

$$[\tau(x),\tau(y)]^{\tau(y)} =$$

$$= [a,b]^{t_1\left(\frac{(-1)^{l_1}+(-1)^{l_2}}{2}\right)+(t_3-t_2)\left(\frac{(-1)^{l_1}-(-1)^{l_2}}{2}\right)}\cdot$$

$$\cdot[a,b]^{\left((t_1-t_3)\left(\frac{1-(-1)^{l_1}}{2}\right)(-1)^{l_2}+t_2\left(\frac{1+(-1)^{l_1}}{2}\right)(-1)^{l_2}\right)a}\cdot$$

$$\cdot[a,b]^{\left((t_1-t_2)\left(\frac{1-(-1)^{l_2}}{2}\right)(-1)^{l_1}+t_3\left(\frac{1+(-1)^{l_2}}{2}\right)(-1)^{l_1}\right)b}.$$

Из истинности левой части квазитождества Ψ_1 в группе G_5 получаем систему из шести равенств:

$$2k_3' - k_1 + k_2 + t_1 + t_1\Big(\frac{(-1)^{k_1}+(-1)^{k_2}}{2}\Big) + $$
$$+ (t_3-t_2)\Big(\frac{(-1)^{k_1}-(-1)^{k_2}}{2}\Big) = 0, \qquad (11)$$

$$2k_4' - k_1 + t_2 + (t_1-t_3)\Big(\frac{1-(-1)^{k_1}}{2}\Big)(-1)^{k_2} + $$
$$+ t_2\Big(\frac{1+(-1)^{k_1}}{2}\Big)(-1)^{k_2} = 0, \qquad (12)$$

$$2k_5' + k_2 + t_3 + (t_1-t_2)\Big(\frac{1-(-1)^{k_2}}{2}\Big)(-1)^{k_1} + $$
$$+ t_3\Big(\frac{1+(-1)^{k_2}}{2}\Big)(-1)^{k_1} = 0, \qquad (13)$$

$$t_1+(t_3-t_2)\Big(\frac{(-1)^{l_1}-(-1)^{l_2}}{2}\Big)+$$
$$+t_1\Big(\frac{(-1)^{l_1}+(-1)^{l_2}}{2}\Big)=0, \qquad (14)$$

$$t_2+(t_1-t_3)\Big(\frac{1-(-1)^{l_1}}{2}\Big)(-1)^{l_2}+$$
$$+t_2\Big(\frac{1+(-1)^{l_1}}{2}\Big)(-1)^{l_2}=0, \qquad (15)$$

$$t_3+(t_1-t_2)\Big(\frac{1-(-1)^{l_2}}{2}\Big)(-1)^{l_1}+$$
$$+t_3\Big(\frac{1+(-1)^{l_2}}{2}\Big)(-1)^{l_1}=0. \qquad (16)$$

Случай 1. k_1, k_2 – четные числа. Тогда $[\tau(x),\tau(y)]=[\tau(x),\tau(y)]^{\tau(x)}$, и из истинности левой части квазитождества Ψ_1 в группе G_5 при τ следует истинность правой части Ψ_1 в G_5 при данном отображении.

Случай 2. k_1 – нечетное число, k_2 – четное число.

а) l_1, l_2 – четные числа. Тогда из (14), (15), (16) следует, что $t_1=t_2=t_3=0$. Из (12) k_1 – четное число, противоречие.

б) l_1, l_2 – нечетные числа. Из (15) $t_1=t_2+t_3$, из (12) k_1 – четное число, противоречие.

в) l_1 – четное число, l_2 – нечетное число. Тогда из (14) выводим $t_2=t_1+t_3$. Ввиду (12), получаем противоречие.

г) l_1 – нечетное число, l_2 – четное число. Из (14) следует, что $t_3=t_1+t_2$. Из (12) получаем противоречие с тем, что k_1 – нечетное число.

Следовательно, случай 2 невозможен.

Случай 3. k_1 – четное число, k_2 – нечетное число.

а) l_1, l_2 – четные числа. Тогда из (14), (15), (16) следует, что $t_1=t_2=t_3=0$. Из (13) k_2 – четное число, противоречие.

б) l_1, l_2 – нечетные числа. Из (15) $t_1=t_2+t_3$, по (13) k_2 – четное число, противоречие.

в) l_1 – четное число, l_2 – нечетное число. Тогда из (14) выводим $t_2=t_1+t_3$. Ввиду (13), получаем противоречие.

г) l_1 – нечетное число, l_2 – четное число. Из (14) следует, что $t_3=t_1+t_2$. Из (13) получаем противоречие с тем, что k_2 – нечетное число.

Следовательно, случай 3 невозможен.

Случай 4. k_1, k_2 – нечетные числа.

а) l_1, l_2 – четные числа. Тогда из (14), (15), (16) следует, что $t_1=t_2=t_3=0$. Из (13) k_2 – четное число, противоречие.

б) l_1, l_2 – нечетные числа. Из (15) $t_1=t_2+t_3$, по (13) k_2 – четное число, противоречие.

в) l_1 – четное число, l_2 – нечетное число. Тогда из (14) выводим $t_2=t_1+t_3$. Ввиду (13), получаем противоречие.

г) l_1 – нечетное число, l_2 – четное число. Из (14) следует, что $t_3=t_1+t_2$. Из (13) получаем противоречие с тем, что k_2 – нечетное число.

Следовательно, случай 4 также невозможен.

Значит $G_5 \models \Psi_1$. Итак, получаем, что группа G_5 принадлежит квазимногообразию, заданному квазитождеством Ψ_1 и, ввиду замечания 4, не принадлежит квазимногообразию, заданному квазитождеством Ψ_5, а группа G_3, наоборот, принадлежит квазимногообразию, заданному квазитождеством Ψ_5 и не принадлежит квазимногообразию, заданному квазитождеством Ψ_1. Лемма доказана.

ЛЕММА 8. *Квазитождества Ψ_4 и Ψ_5 задают различные квазимногообразия в $\mathcal{M}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что $G_4 \models \Psi_5$. Пусть левая часть квазитождества Ψ_5 истинна в группе G_4 при отображении τ :

$x \to a^{k_1}b^{k_2}[a,b]^{k_3}[a,b]^{k_4 a}[a,b]^{k_5 b}$,

$y \to a^{l_1}b^{l_2}[a,b]^{l_3}[a,b]^{l_4 a}[a,b]^{l_5 b}$.

Так как $(a^{k_1}b^{k_2}[a,b]^{k_3}[a,b]^{k_4 a}[a,b]^{k_5 b})^4 \in G_4'$ и $(a^{l_1}b^{l_2}[a,b]^{l_3}[a,b]^{l_4 a}[a,b]^{l_5 b})^4 \in G_4'$, то $k_2=0$ и $l_2=0$. Несложно проверить, что для порождающих a, b группы G_4 выполнено следующее равенство:

$$[a,b]^{a^t b^s}=[a,b]^{\frac{(-1)^t+(-1)^s}{2}}[a,b]^{\left(\frac{1-(-1)^t}{2}\right)(-1)^s a}\cdot$$
$$\cdot[a,b]^{\left(\frac{1-(-1)^s}{2}\right)(-1)^t b};$$

Имеем:

$$\tau(x)^2=a^{2k_1}[a,b]^{k_3'}[a,b]^{k_4' a}[a,b]^{k_5' b},$$

где $k_i' \in Z$;

$$\tau(x)^4=[a,b]^{(2k_3'-k_1)}[a,b]^{(2k_4'-k_1)a}[a,b]^{2k_5' b},$$

где $k_i' \in Z$;

$$\tau(y)^2=a^{2l_1}[a,b]^{l_3'}[a,b]^{l_4' a}[a,b]^{l_5' b},$$

где $l_i' \in Z$;

$$\tau(y)^4=[a,b]^{(2l_3'-l_1)}[a,b]^{(2l_4'-l_1)a}[a,b]^{2l_5' b},$$

где $l_i' \in Z$.

Используя формулу (2), выводим:

$$[\tau(x),\tau(y)]=$$
$$[a^{k_1}[a,b]^{k_3}[a,b]^{k_4 a}[a,b]^{k_5 b}, a^{l_1}[a,b]^{l_3}[a,b]^{l_4 a}[a,b]^{l_5 b}]=$$
$$=[a^{k_1},[a,b]^{l_3}[a,b]^{l_4 a}[a,b]^{l_5 b}]\cdot$$
$$\cdot[[a,b]^{k_3}[a,b]^{k_4 a}[a,b]^{k_5 b}, a^{l_1}]=$$
$$=([a,b]^{l_3}[a,b]^{l_4 a}[a,b]^{l_5 b})^{-a^{k_1}}\cdot$$

$$\cdot[a,b]^{l_3}[a,b]^{l_4 a}[a,b]^{l_5 b}\cdot$$
$$\cdot[a,b]^{-k_3}[a,b]^{-k_4 a}[a,b]^{-k_5 b}\cdot$$
$$\cdot([a,b]^{k_3}[a,b]^{k_4 a}[a,b]^{k_5 b})^{a^{l_1}} =$$
$$= [a,b]^{-l_3 a^{k_1}}[a,b]^{-l_4 a^{k_1+1}}[a,b]^{-l_5 a^{k_1} b}\cdot$$
$$\cdot[a,b]^{l_3-k_3}[a,b]^{(l_4-k_4)a}[a,b]^{(l_5-k_5)b}\cdot$$
$$\cdot[a,b]^{k_3 a^{l_1}}[a,b]^{k_4 a^{l_1+1}}[a,b]^{k_5 a^{l_1} b} =$$
$$= [a,b]^{-l_3\left(\frac{(-1)^{k_1}+1}{2}\right)}[a,b]^{-l_3\left(\frac{1-(-1)^{k_1}}{2}\right)a}\cdot$$
$$\cdot[a,b]^{l_4\left(\frac{(-1)^{k_1}-1}{2}\right)}[a,b]^{-l_4\left(\frac{1+(-1)^{k_1}}{2}\right)a}\cdot$$
$$\cdot[a,b]^{-l_5\left(\frac{(-1)^{k_1}-1}{2}\right)}[a,b]^{l_5\left(\frac{1-(-1)^{k_1}}{2}\right)a}\cdot$$
$$\cdot[a,b]^{-l_5(-1)^{k_1} b}\cdot$$
$$\cdot[a,b]^{l_3-k_3}[a,b]^{(l_4-k_4)a}[a,b]^{(l_5-k_5)b}\cdot$$
$$\cdot[a,b]^{k_3\left(\frac{(-1)^{l_1}+1}{2}\right)}[a,b]^{k_3\left(\frac{1-(-1)^{l_1}}{2}\right)a}\cdot$$
$$\cdot[a,b]^{-k_4\left(\frac{(-1)^{l_1}-1}{2}\right)}[a,b]^{k_4\left(\frac{1+(-1)^{l_1}}{2}\right)a}\cdot$$
$$\cdot[a,b]^{k_5\left(\frac{(-1)^{l_1}-1}{2}\right)}[a,b]^{-k_5\left(\frac{1-(-1)^{l_1}}{2}\right)a}\cdot$$
$$\cdot[a,b]^{k_5(-1)^{l_1} b}.$$

Обозначим:

$$t_1 = -l_3\Big(\frac{(-1)^{k_1}+1}{2}\Big)+(l_4-l_5)\Big(\frac{(-1)^{k_1}-1}{2}\Big)+$$
$$+l_3-k_3+k_3\Big(\frac{(-1)^{l_1}+1}{2}\Big)+(k_5-k_4)\Big(\frac{(-1)^{l_1}-1}{2}\Big);$$
$$t_2 = k_4\Big(\frac{1+(-1)^{l_1}}{2}\Big)+(l_5-l_3)\Big(\frac{1-(-1)^{k_1}}{2}\Big)+$$
$$+l_4-k_4-l_4\Big(\frac{1+(-1)^{k_1}}{2}\Big)+(k_3-k_5)\Big(\frac{1-(-1)^{l_1}}{2}\Big);$$
$$t_3 = k_5((-1)^{l_1}-1)+l_5(1-(-1)^{k_1}).$$

Тогда

$$[\tau(x),\tau(y)] = [a,b]^{t_1}[a,b]^{t_2 a}[a,b]^{t_3 b}.$$
$$[\tau(x),\tau(y)]^{\tau(x)} =$$
$$= [a,b]^{t_1\left(\frac{(-1)^{k_1}+1}{2}\right)+(t_3-t_2)\left(\frac{(-1)^{k_1}-1}{2}\right)}\cdot$$
$$\cdot[a,b]^{\left((t_1-t_3)\left(\frac{1-(-1)^{k_1}}{2}\right)+t_2\left(\frac{1+(-1)^{k_1}}{2}\right)\right)a}\cdot$$
$$\cdot[a,b]^{t_3(-1)^{k_1} b};$$
$$[\tau(x),\tau(y)]^{\tau(y)} =$$
$$= [a,b]^{t_1\left(\frac{(-1)^{l_1}+1}{2}\right)+(t_3-t_2)\left(\frac{(-1)^{l_1}-1}{2}\right)}\cdot$$
$$\cdot[a,b]^{\left((t_1-t_3)\left(\frac{1-(-1)^{l_1}}{2}\right)+t_2\left(\frac{1+(-1)^{l_1}}{2}\right)\right)a}\cdot$$
$$\cdot[a,b]^{t_3(-1)^{l_1} b}.$$

Случай 1. k_1 – четное число.

а) l_1 – четное число. Тогда $t_1 = t_2 = t_3 = 0$. То есть правая часть квазитождества Ψ_5 истинна в группе G_4 при данном отображении.

б) l_1– нечетное число. Заметим, что в этом случае

$$t_1 + t_2 - t_3 =$$
$$= -l_3 + l_3 - k_3 - k_5 + k_4 + l_4 -$$
$$-k_4 - l_4 + k_3 - k_5 + 2k_5 = 0.$$

Так как левая часть квазитождества Ψ_5 истинна в группе G_4 при данном отображении, то из второго соотношения в левой части Ψ_5, приравнивая показатели при $[a,b]$, получаем равенство:

$$-2l_3' + l_1 + t_1 + t_2 - t_3 = 0.$$

Отсюда следует противоречие с тем, что l_1 – нечетное число.

Случай 2. k_1 – нечетное число. Легко проверить, что

$$t_1 = l_3 - l_4 + l_5 - k_3 + k_3\Big(\frac{(-1)^{l_1}+1}{2}\Big)+$$
$$+k_5\Big(\frac{(-1)^{l_1}-1}{2}\Big)-k_4\Big(\frac{(-1)^{l_1}-1}{2}\Big);$$
$$t_2 = k_4\Big(\frac{1+(-1)^{l_1}}{2}\Big)+l_5-l_3+l_4-k_4+$$
$$+k_3\Big(\frac{1-(-1)^{l_1}}{2}\Big)-k_5\Big(\frac{1-(-1)^{l_1}}{2}\Big);$$
$$t_3 = k_5((-1)^{l_1}-1)+2l_5;$$

т.е. $t_1 + t_2 - t_3 = 0$. Из истинности левой части квазитождества Ψ_5 в группе G_4, приравнивая показатели при $[a,b]$, получаем равенство:

$$2k_3' - k_1 + t_1 + t_2 - t_3 = 0.$$

Отсюда следует противоречие с тем, что k_1 – нечетное число. Следовательно, случай 2 невозможен.

Имеем $G_4 \models \Psi_5$. Отсюда и из замечания 3 получаем, что группа G_4 принадлежит квазимногообразию, заданному квазитождеством Ψ_5, и не принадлежит квазимногообразию, заданному квазитождеством Ψ_4. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Квазитождество Ψ_4 и формула Ψ_1& Ψ_5 задают различные квазимногообразия в $\mathcal{M}$.*

Доказательство следует из лемм 5, 8 и замечания 3.

Обозначим:

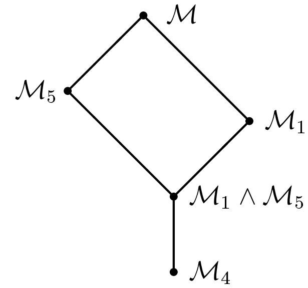
$\mathcal{M}_1$ – квазимногообразие, заданное в $\mathcal{M}$ квазитождеством Ψ_1;

$\mathcal{M}_4$ – квазимногообразие, заданное в $\mathcal{M}$ квазитождеством Ψ_4;

$\mathcal{M}_5$ – квазимногообразие, заданное в $\mathcal{M}$ квазитождеством Ψ_5;

Из всего вышесказанного получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. *Множество квазимногообразий, которые можно задать в $\mathcal{M}$ квазитождествами из списка: $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Psi_5$, частично упорядочено относительно теоретико-множественного включения и образует 5-элементную дистрибутивную решетку, которая изображена на рисунке.*



В заключение автор выражает благодарность профессору А.И. Будкину, под руководством которого выполнена данная работа.

Библиографический список

1. Авцинова Ю.А. О квазимногообразиях метабелевых групп без кручения аксиоматического ранга два // Известия Алтайского государственного университета. – 2010. –№1(65).

2. Курош А.Г. Теория групп. – М., 1967.

3. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. – М., 1977.

4. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. – М., 1974.

5. Будкин А.И. Квазимногообразия групп. – Барнаул, 2002.

6. Горбунов В.А. Алгебраическая теория квазимногообразий. – Новосибирск, 1999.

7. Биркгоф Г. Теория решеток. – М., 1984.

8. Гретцер Г. Общая теория решеток. – М., 1982.