УДК 519.714.3+517.972.6

А.В. Жариков

Модели стимулирования агентов промышленной корпорации в условиях асимметрии информированности*

A.V. Zharikov

Models Promoting Agents of Industrial Corporation in Terms of Awareness Asymmetry

Рассматриваются модели стимулирования в многоэлементных организационных системах при разной информированности активных элементов. Решена задача стимулирования на примере промышленной корпорации при асимметрии информированности активных элементов.

Ключевые слова: стимулирование, информированность, метод моментов.

The author considers incentive models in multistimulating organizational systems with various being kept informed of active elements. This problem was solved by the example of industrial corporations in the asymmetry of the awareness of active elements.

Key words: incentives, awareness, method of moments.

Традиционно в работах по корпоративному управлению рассматриваются системы с фиксированной структурой, в которой распределение ролей участников систем (центр, активные элементы или агенты) являются заданными. Организационное обеспечение производственного и финансового процесса корпорации предполагает формирование стратегии, определяющей траекторию развития производственной системы. Один из способов управления корпорацией – задача стимулирования организационными системами [1]. В данной работе рассматривается обобщение модели стимулирования для случая несовпадающей информированности активных элементов.

Рассмотрим многоэлементную двухуровневую иерархическую систему, состоящую из центра и n активных элементов (АЭ). Пусть $u=(u_1(x),...,u_n(x)) \in \in A' = \prod_{i=1}^{n} A_i$, $x \in X \subset R^m$ – вектор действий АЭ, где $u_i(x) \in A_i \subseteq C^1(X), \forall i \in M = \{1,2,\ldots,n\}$, $z = Q(u)$ – результат деятельности АЭ, где $Q : A' \to A_0$.

Действие каждого АЭ имеет собственную информационную структуру. Определим информационную структуру АЭ. Пусть $I = \{1,2,...,m\}$ – индексы всех компонент вектора $x \in X \subset R^m$, который имеет плотность распределения $P(x)$, $I_i, I_i \subseteq I$ – совокупность индексов, определяющих информационную структуру для i-го АЭ, тогда информационная структура i-го АЭ примет вид $d_i = (x_j)_{j \in I_i}$.

Отсутствие в выражении переменной $x_j, j \notin I_i$ означает равенство нулю первой частной производной по данной переменной [2, 3]:

$$\frac{\partial u_i(d_i)}{\partial x_j} = 0, j \notin I_i, i \in M . \quad (1)$$

Индивидуальные затраты i-го АЭ по выбору действия $u_i(x)$ зависят от действий всех активных элементов, т.е. $c_i(u(x)) = c_i(u_1,u_2,...,u_n)$, где $c_i(u(x))$ – функция затрат АЭ в точке x. Однако использование точечного значения не является объективным показателем затрат АЭ. Для оценки затрат будем использовать усредненное значение

$$\overline{c}_i(u(\cdot)) = M[c_i(u(x))] = \int_X c_i(u(x))P(x)\,dx ,$$

где $M[\cdot]$ – математическое ожидание.

Функционал $\overline{c}_i(u(x))$ является неубывающим по $u_i(x)$.

Аналогично функции затрат, определим стимулирование $\overline{\sigma}_i(u(\cdot),z)$ как усредненное значение $\sigma_i(u(\cdot),z)$.

Целевая функция i-го АЭ имеет вид

$$f_i(u,\sigma_i) = \int_X \sigma_i(u(x),Q(u(x))) - -c_i(u(x))P(x)dx \to \max_{u_i} . \quad (2)$$

Рассмотрим задачу стимулирования второго рода, тогда целевая функция центра представляет собой разность:

[*] Данная работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №10-01-98005 р_сибирь_а) и ведомственно-аналитической программы «Развитие научного потенциала высшей школы 2009–2010 гг.» (проект №2.2.2.4/4278).

$$\Phi(u(\cdot),\sigma(\cdot))=\int_X H(u(x),Q(u(x)))-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\sigma_i(u(\cdot),Q(u(x)))\Phi(x)dx\to\max_{o(\cdot)\in M}, \quad (3)$$

где $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)\in M$; M – множество допустимых систем стимулирования; $H(u,z)$ – результат деятельности системы.

В современной литературе [1] выделяют два класса механизмов стимулирования. Первый класс – механизмы стимулирования за индивидуальные результаты деятельности АЭ. Функции стимулирования не зависят от $z=Q(u)$. Второй класс характерен зависимостью стимулирования от результата деятельности АЭ.

В данной работе в качестве основной модели, для случая несовпадающей информированности АЭ, будет рассмотрена модель индивидуального стимулирования (стимулирование АЭ зависит от действий всех АЭ, затраты не сепарабельны). Данная модель обусловлена наличием сильной связи между АЭ.

Определим равновесие по Нэшу и равновесие в доминантных стратегиях (РДС) игровой ситуации для АЭ.

Определение 1. Равновесие Нэша для задачи (1)–(3), будет множество

$$E_N(\overline{\sigma})=\{u^N\in A\,|\,\forall i\in I,\forall u_i\in A_i,\overline{\sigma}_i(u^N)-$$
$$-\overline{c}_i(u^N)\ge\overline{\sigma}_i(u_i,u_{-i}^N)-\overline{c}_i(u_i,u_{-i}^N)\}. \quad (4)$$

Определение 2. Равновесием в доминантных стратегиях для задачи (1) – (3) будет множество

$$E_d(\overline{\sigma})=\{u^d\in A\,|\,\forall i\in I,\forall u_i\in A_i,\overline{\sigma}_i(u_i^d,u_{-i})-$$
$$-\overline{c}_i(u_i^d,u_{-i})\ge\overline{\sigma}_i(u)-\overline{c}_i(u)\}. \quad (5)$$

Фиксируем произвольный вектор действий АЭ $u^*\in A'$ и рассмотрим следующую систему стимулирования для данной модели:

$$\overline{\sigma}_i(u^*,u)=\begin{cases}\overline{c}_i(u_i^*,u_{-i})+\delta_i, u_i=u_i^*\\ 0, u_i\ne u_i^*,\end{cases}$$
$$\delta_i\ge 0, i\in I. \quad (6)$$

Для данной системы стимулирования справедлива теорема.

Теорема 1. При использовании центром системы стимулирования (6) u^* реализует равновесие в доминантных стратегиях. Более того, если $\delta_i>0, i\in I$, то u^* – единственное равновесие в доминантных стратегиях.

Стимулирование каждого АЭ зависит только от его собственного действия. Зафиксируем произвольный вектор действий АЭ $u^*\in A'$ и рассмотрим следующую систему стимулирования:

$$\overline{\sigma}_i(u^*,u_i)=\begin{cases}\overline{c}_i(u_i^*,u^*_{-i})+\delta_i, u_i=u_i^*\\ 0, u_i\ne u_i^*,\end{cases}$$
$$\delta_i\ge 0, i\in I. \quad (7)$$

Отметим, что функция стимулирования (7) зависит только от действия i-го АЭ, а величина u^* входит в нее как параметр. Кроме того, при использовании центром системы стимулирования (7), в отличие от (6), каждый из АЭ имеет косвенную информацию обо всех компонентах того вектора действий, который хочет реализовать центр. Для того чтобы система стимулирования (6) реализовывала вектор u^* как равновесие в доминантных стратегиях, необходимо введение дополнительных предположений относительно функций затрат активных элементов.

Теорема 2. При использовании центром системы стимулирования (7) $u^*\in E_N(\overline{\sigma})$. Более того:

а) если выполнено условие:

$\forall u^1\ne u^2\in A'\exists i\in I:\ u_i^1\ne u_i^2$

и $\overline{c}_i(u^1)+\overline{c}_i(u^2)>\overline{c}_i(u_i^1,u_{-i}^2)-\delta_i$, (8)

то u^* – единственное равновесие Нэша;

б) если выполнено условие:

$\forall i\in I,\forall u^1\ne u^2\in A'$:

$\overline{c}_i(u^1)+\overline{c}_i(u^2)\ge\overline{c}_i(u_i^1,u_{-i}^2)-\delta_i$, (9)

то вектор действий u^* является равновесием в доминантных стратегиях;

в) если выполнено условие (2.8) и $\delta_i>0, i\in I$, то вектор действий u^* – единственное равновесие в доминантных стратегиях.

Доказательство теорем является аналогичным доказательству, приведенному в [4], и здесь рассматриваться не будет.

Решение (1)–(3) на практике – сложная задача, требующая решения системы интегральных уравнений с помощью численных методов.

Пусть промышленная корпорация (центр) обладает некоторым инвестиционным фондом R, который расходуется на стимулирование развития двух дочерних предприятий (агентов). Центр стимулирует агентов для достижения определенного уровня показателей (u,v) и получает доход $\Phi(u,v)$. Агенты имеют затраты $c_1(u,v), c_2(u,v)$. Рассмотрим задачу стимулирования второго рода с двумя АЭ. Пусть информационный вектор x распределен на множестве $X=X_1\times X_2\subseteq R^2$, с плотностью $P(x)$. Считаем, что $P(x)$ обладает стандартными свойствами плотности распределения.

Пусть функции затрат АЭ имеют вид:

$$\overline{c}_1(u,v)=\int_X c_1(u,v)P(x)dx=\int_X\frac{\left(u(x)+\alpha v(x)\right)^2}{2r_1(x)}P(x)dx,$$
$$\overline{c}_2(u,v)=\int_X c_2(u,v)P(x)dx=\int_X\frac{\left(v(x)+\alpha u(x)\right)^2}{2r_2(x)}P(x)dx, \quad (10)$$

где $\alpha\,(0\le\alpha\le1)$ – некоторый параметр воздействия АЭ друг на друга, $r_1(x)=A\cdot e^{-n(x_1+x_2+x_1x_2)}$,

$r_2(x) = B \cdot e^{-m(x_1+x_2+x_1x_2)}$ – функции квалификации АЭ, $\overline{r_1}(x), \overline{r_2}(x)$ – оценка квалификации АЭ $\overline{r_1}(x) = \int_X r_1(x)P(x)dx$, $\overline{r_2}(x) = \int_X r_2(x)P(x)dx$.

Пусть функция дохода центра $H(u,v) = \int_X (u(x)+v(x))P(x)dx$. При использовании центром системы стимулирования

$$\sigma(u^*,v^*,u,v) = \begin{cases} \overline{c}(u^*,v^*), (u^*,v^*) = (u,v), \\ 0, (u^*,v^*) \neq (u,v), \end{cases} \quad (11)$$

задача центра сводится к поиску оптимальных реализуемых действий:

$$\begin{cases} \Phi(u,v) = H(u,v) - \overline{c}_1(u,v) - \overline{c}_2(u,v) \to \max\limits_{u,v}, \\ \overline{c}_1(u,v) + \overline{c}_2(u,v) \le R. \end{cases} \quad (12)$$

Будем рассматривать случай асимметрии информированности АЭ, тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0.$$

Для поиска решения задачи (12) воспользуемся методом множителей Лагранжа. Запишем функцию Лагранжа и необходимые условия:

$$L(u,v,\lambda) = \int_X \Psi(u,v,\lambda)P(x)dx = \int_X (\lambda_0((u(x)+v(x)) -$$
$$-c_1(u,v) - c_2(u,v)) + P_1\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + P_2\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right) + \lambda(c_1(u,v) + \quad (13)$$
$$+c_2(u,v) - R))P(x)dx,$$

где $\lambda \ge 0$ – множитель Лагранжа, $\lambda_0 = 1$.

Необходимые условия существования решения:

$$\begin{cases} \int_{X_1} \frac{\partial \Psi}{\partial u} dx_1 = 0, \\ \int_{X_2} \frac{\partial \Psi}{\partial v} dx_2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u(x_2)\int_{X_1}\left(\frac{\alpha^2}{r_1(x)} + \frac{1}{r_2(x)}\right)P(x)dx_1 + \\ +\int_{X_1} v(x_1)\left(\frac{\alpha}{r_1(x)} + \frac{\alpha}{r_2(x)}\right)P(x)dx_1 = \frac{1}{1-\lambda}, \\ v(x_1)\int_{X_2}\left(\frac{\alpha}{r_1(x)} + \frac{\alpha}{r_2(x)}\right)P(x)dx_2 + \\ +\int_{X_2} u(x_2)\left(\frac{\alpha^2}{r_1(x)} + \frac{1}{r_2(x)}\right)P(x)dx_2 = \frac{1}{1-\lambda}. \end{cases} \quad (14)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} K_1(x_1,x_2) &= \left(\frac{\alpha}{r_1(x)} + \frac{\alpha}{r_2(x)}\right)P(x), \\ K_2(x_1,x_2) &= \left(\frac{\alpha^2}{r_1(x)} + \frac{1}{r_2(x)}\right)P(x), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \phi_1(x_1,x_2) &= \int_{X_1}\left(\frac{\alpha^2}{r_1(x)} + \frac{1}{r_2(x)}\right)P(x)dx_1, \\ \phi_2(x_1,x_2) &= \int_{X_2}\left(\frac{\alpha}{r_1(x)} + \frac{\alpha}{r_2(x)}\right)P(x)dx_2. \end{aligned} \quad (16)$$

Сделаем замену переменных в (14), имеем:

$$\begin{cases} u(x_2) - \int_{X_1} v(x_1)\frac{K_1(x_1,x_2)}{\phi_1(x_2)}dx_1 = \frac{1}{1-\lambda}, \\ v(x_1) - \int_{X_2} u(x_2)\frac{K_2(x_1,x_2)}{\phi_2(x_1)}dx_2 = \frac{1}{1-\lambda}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow U(x) - \int_{X_2} K(x,y)U(y)dy = f, \quad (17)$$

где $U(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix}$, $U(y) = \begin{pmatrix} u(y) \\ v(y) \end{pmatrix}$, $K(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{K_1(x,y)}{\phi_1(y)} \\ \frac{K_2(x,y)}{\phi_2(x)} & 0 \end{pmatrix}$ и $f = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\lambda} \\ \frac{1}{1-\lambda} \end{pmatrix}$.

Решение (17) найдем с помощью обобщенного метода моментов систем интегральных уравнений [5].

Приближенное решение уравнения (17) ищется в виде конечной суммы

$$U(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{k} c_i\phi_i(x), \quad (18)$$

где $\varphi_i(x)$ – некоторые известные линейно независимые функции (координатные функции) и $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – неопределенные коэффициенты. Коэффициенты c_i определяются из условия

$$\sum_{j=1}^{k} c_j(a_{ij} - \beta_{ij}) = \gamma_{ij} \ (i = 1,2,...,k), \quad (19)$$

где $a_{ij} = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx$, $\beta_{ij} = \int_a^b dx \int_a^b K(x,s)\varphi_i(x)\varphi_j(s)ds$,

$\gamma_i(x) = \int_a^b dx \int_a^b K(x,s)\varphi_i(x)f(s)ds$.

Пусть в качестве линейно независимой системы возьмем:

$$\vec{\varphi}_i(x) = \begin{pmatrix} \varphi_i^1(x) \\ \varphi_i^2(x) \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}, \cos 2\pi x, \sin 2\pi x \\ 1, x, x^2 \end{Bmatrix}. \quad (20)$$

Решение (17) будем искать для конкретных значений параметров задачи. Возьмем $A = 2$, $B = 1$, $m = n = \alpha = \frac{1}{2}$ и $X = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $P(x)$=1.

Вычислим коэффициенты $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_i$:

$\alpha_{11} = 1{,}25, \alpha_{12} = 0, \alpha_{13} = 0{,}083, \alpha_{21} = 0, \alpha_{22} = 0{,}58, \alpha_{23} = = 0, \alpha_{31} = 0{,}083, \alpha_{32} = 0, \alpha_{33} = 0{,}51;$

$\beta_{11} = 1{,}083, \beta_{12} = -0{,}0045, \beta_{13} = 0{,}115, \beta_{21} = -0{,}01;$

$\beta_{22} = -0,0023, \beta_{23} = 0,0034;$

$\beta_{31} = 0,146, \beta_{32} = 0,009, \beta_{33} = 0,014;\ \gamma_1 = \dfrac{1,4}{1-\lambda};$

$\gamma_2 = -\dfrac{0,01}{1-\lambda};\ \gamma_3 = \dfrac{0,174}{1-\lambda}.$

Получим систему уравнений для нахождения c_j:

$$\begin{cases} 0,167c_1 + 0,0045c_2 - 0,032c_3 = \dfrac{1,4}{1-\lambda}, \\ 0,01c_1 + 0,58c_2 - 0,0034c_3 = -\dfrac{0,01}{1-\lambda}, \\ -0,0629c_1 - 0,0094c_2 + 0,498c_3 = \dfrac{0,174}{1-\lambda}. \end{cases}$$

Решением данной системы являются:

$$c_1 = \frac{2,06-0,94\lambda}{1-\lambda}, c_2 = \frac{0,015\lambda - 0,033}{1-\lambda},$$

$$c_3 = \frac{0,33-0,177\lambda}{1-\lambda}.$$

Общий вид решения (17) примет вид.

$$U(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1-\lambda}\left(2,03-0,24\lambda + \left(0,015\lambda - 0,03\right)\cos(2\pi x_2) + \right. \\ \left. +\left(0,3-0,17\lambda\right)\sin(2\pi x_2)\right) \\ \dfrac{1}{1-\lambda}\left(3,06-0,49\lambda + \left(0,015\lambda - 0,03\right)x_1 + \right. \\ \left. +\left(0,3-0,17\lambda\right)x_1^2\right) \end{bmatrix}.$$

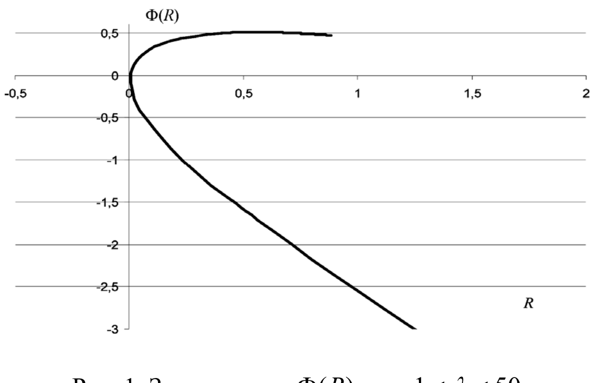

Рис. 1. Зависимость $\Phi(R)$ при $1 < \lambda < 50$

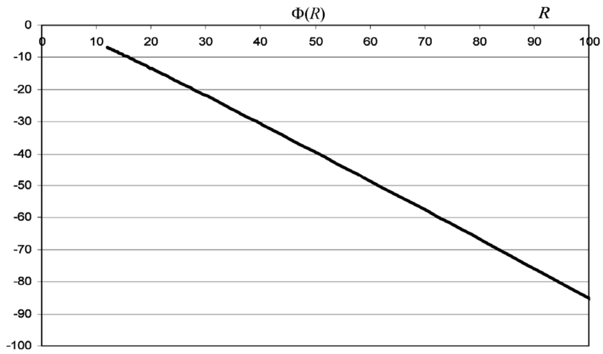

Рис. 2. Зависимость $\Phi(R)$ при $0 \le \lambda < 1$

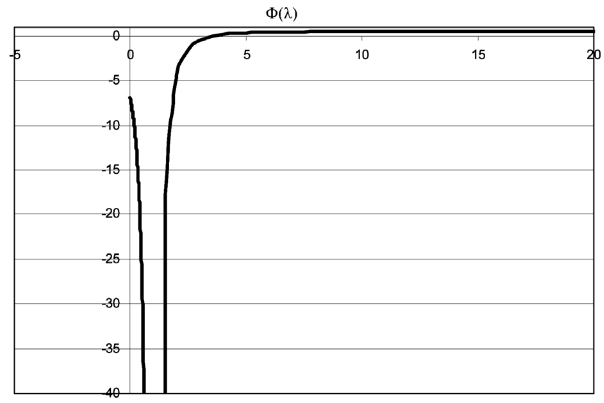

Рис. 3. Зависимость $\Phi(\lambda)$ при $\lambda \ge 0, \lambda \ne 1$

С помощью математического пакета Matlab была получена эмпирическая зависимость $\Phi(\lambda)$ и $\Phi(R)$.

Проанализировав рисунки 1–3, видно, что центру невыгодно увеличивать инвестиционный фонд. Увеличение R влечет уменьшение функции центра $\Phi(R)$. Максимальная прибыль центра достигается при R = 0,57, $\Phi = 0,5$ ($\lambda = 11,51$). Если ограничение фонда R не является активным ($\lambda = 0$), то прибыль центра составит $\Phi = -6,9$.

Полученные результаты могут быть применены для решения практических задач управления в реальных промышленных корпорациях. Рассмотренный пример показывает сложность вычислений и уникальность каждой задачи стимулирования, поэтому решение (1)–(3) не может быть записано в общем виде.

Библиографический список

1. Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. – М., 2005.

2. Жариков А.В., Максимов А.В. О решении частной задачи управления в случае разной информированности субъектов // Известия АлтГУ. – 2006 – №1.

3. Максимов А.В., Оскорбин Н.М. Многопользовательские информационные системы: основы теории и методы исследования. – Барнаул, 2005.

4. Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы стимулирования в многоэлементных организационных системах. – М., 2000.

5. Демидович Б.П. и др. Численные методы анализа. – М., 1967.