УДК 515.123

А.Н. Саженков

О достаточном условии исчерпываемости для топологических мер

Ключевые слова: плотная исчерпывающая топологическая мера.
Key words: dense exhaustive topological measure.

В работе [1] введено понятие σ-топологического пространства как пары (X, $\boldsymbol{F}$), где X – множество, $\boldsymbol{F}$ – совокупность подмножеств X, замкнутая относительно конечных объединений и счетных пересечений, пустое множество и все X являются элементами $\boldsymbol{F}$. Элементы $\boldsymbol{F}$ названы замкнутыми множествами пространства X. Пусть алгебра множеств $\boldsymbol{B}$ содержит систему $\boldsymbol{F}$. Скалярная функция μ, определенная на $\boldsymbol{B}$, называется регулярной, если для любых $\varepsilon > 0$ и $A \in \boldsymbol{B}$ существует $K \in \boldsymbol{F}$, $K \subset A$ такое, что $\left|\mu(A \setminus K)\right| < \varepsilon$. Известно, что ограниченность конечно аддитивной функции множеств (далее – меры) на произвольном кольце множеств эквивалентна свойству исчерпываемости меры, т.е. для дизъюнктивной последовательности $\{A_n\}$ ($A_k \cap A_m = \varnothing$, если $k \neq m$) имеет место $\mu(A_n) \to 0$. В данной заметке исследуется связь между исчерпываемостью и счетной аддитивностью на $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{B}$.

Исчерпываемость меры на $\boldsymbol{B}$ влечет [1] более сильное свойство регулярности:

$$|\mu|(A \setminus K) < \varepsilon,$$

где $|\mu|(A \setminus K) = \sup\left\{\left|\mu(C)\right| : C \subset A \setminus K, C \in \boldsymbol{B}\right\}$.

В работе [2] приведен пример, показывающий, что обратное утверждение неверно. Вместе с тем в [3] доказано, что если (X, $\boldsymbol{F}$) – нормальное пространство, то для сильной регулярности достаточно исчерпываемости на системе открытых множеств и слабой регулярности меры. Далее в тексте регулярность считается сильной, кроме того, будем рассматривать также меры со свойством плотности: для любых $\varepsilon > 0$ и $A \in \boldsymbol{B}$ существует $K \in \boldsymbol{F}$ такое, что $|\mu|(A \triangle K) < \varepsilon$, здесь $A \triangle K$ – симметрическая разность множеств.

Теорема. Пусть μ – плотная мера на $\boldsymbol{B}$. Тогда, если μ – счетно аддитивная на $\boldsymbol{B}$, то μ – исчерпывающая на $\boldsymbol{B}$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{U} = \{X \setminus K : K \in \boldsymbol{F}\}$ – система открытых множеств. Тогда плотность меры равносильна выполнению следующего свойства: для любых $\varepsilon > 0$ и $A \in \boldsymbol{B}$ существует $V \in \boldsymbol{U}$ такое, что $|\mu|(A \triangle V) < \varepsilon$. Очевидно также, что система открытых множеств замкнута относительно конечных пересечений и счетных объединений.

Пусть $\{A_k\} \subset \boldsymbol{B}$ – произвольная дизъюнктивная последовательность. Обозначим $\varepsilon_k = \varepsilon / 2^{k+2}$, выберем $V_k \in \boldsymbol{U}$ так, что $|\mu|(A_k \triangle V_k) < \varepsilon_k$. Обозначим $V = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} V_k$, $C_1 = V_1$, $C_k = V_k \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k-1} V_i$ ($k > 1$). Достаточно очевидно, что $\{C_k\} \subset \boldsymbol{B}$ – дизъюнктивная последовательность, причем $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} C_k = V$. Поскольку μ – счетно аддитивная на $\boldsymbol{B}$, получаем $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(C_k) = \mu(V)$ и $\mu(C_k) \to 0$. Пусть $\left|\mu(C_k)\right| < \varepsilon_0$ для $k \geq n$. Поскольку $C_k = V_k \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k-1} V_i$ и $C_k \cap \left(V_k \cap \left(\bigcup\limits_{i=1}^{k-1} V_i\right)\right) = \varnothing$, имеет место равенство $\mu(V_k) = \mu(C_k) + \mu\left(V_k \cap \left(\bigcup\limits_{i=1}^{k-1} V_i\right)\right)$.

Нетрудно заметить включение $V_k \cap \left(\bigcup\limits_{i=1}^{k-1} V_i\right) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k}(V_i \triangle A_i)$.

Далее, поскольку функция множеств $|\mu|(P)$ является монотонной и полуаддитивной, получаем:

$$\left|\mu(A_k)\right| \leq \left|\mu(A_k) - \mu(V_k)\right| + \left|\mu(V_k)\right| \leq 2|\mu|(A_k \triangle V_k) + $$
$$+ \left|\mu(C_k)\right| + \sum_{i=1}^{k} |\mu|(V_i \triangle A_i) < 2\varepsilon_k + \varepsilon_0 + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i < 4\varepsilon_0 = \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Для регулярных мер теорема доказана в работе [4].

Заметим, что если $\boldsymbol{B}$ – кольцо измеримых по Лебегу ограниченных множеств в R^n, $\boldsymbol{F}$ – совокупность компактов, то мера Лебега является регулярной счетно аддитивной, но не исчерпывающей на $\boldsymbol{B}$. Таким образом, условие $X \in \boldsymbol{F}$ не может быть опущено. Обращение теоремы не имеет места, поскольку во всяком некомпактном нормальном σ-топологическом пространстве существует регулярная ограниченная мера, не являющаяся счетно аддитивной.

Библиографический список

1. Александров, А.Д. Аддитивные функции множеств в абстрактных пространствах / А.Д. Александров // Математический сборник. – 1941. – Т. 9 (51).
2. Саженков, А.Н. Счетная аддитивность, исчерпываемость и регулярность топологических мер / А.Н. Саженков // V Всероссийский семинар по теории функций. – Сыктывкар, 1993.
3. Саженков, А.Н. Регулярность слабо регулярной меры / А.Н. Саженков // Геометрия многомерных пространств. – Барнаул, 1991.
4. Саженков, А.Н. Принцип равномерной ограниченности для топологических мер / А.Н. Саженков // Математические заметки. – 1982. – Т. 31, №2.