

УДК 517.5+532.5

С.С. Кузиков

**К методам решения обратных задач трансзвуковой газовой динамики**

*Ключевые слова:* газовая динамика, обратная задача, разностная схема, численный расчет.

*Key words:* gas dynamics, inverse problem, differential scheme, numerical calculation.

В статье рассматриваются обратные задачи для плоских стационарных околосвуковых течений газа, т.е. задачи, заключающиеся в определении формы профиля, обтекаемого потоком газа по заданному на его контуре распределению давления или модуля скорости. Исследованиям различных вариантов обратных задач и приближенным методам решения посвящено большое количество работ, подробный обзор которых можно найти в [1, 2]. Данный тип задач имеет большое прикладное значение, так как методы их решения могут быть использованы при построении сопел, эжекторов, аэродинамических труб, лопаточных машин, являющихся частью энергетических установок, а также при определении форм крылового профиля как изолированного, так и являющегося элементом решетки.

В данной статье с помощью специального выбора независимых переменных и искомым функций исходная задача приводится к построению решения квазилинейной симметрической системы уравнений первого порядка. Предлагается численный метод решения задачи построения обтекаемых непроницаемых кривых с заданными на них модулями скорости или давления.

Рассматривается плоское установившееся безвихревое течение газа в канале  $D$ , ограниченном непроницаемыми стенками  $\Gamma_1 : y = f_1(x)$  и  $\Gamma_2 : y = f_2(x)$ , являющимися искомыми и на которых задаются модули скорости

$$\begin{aligned} q|_{\Gamma_1} &= q_1(s) \text{ и } s \in [0, s_1], \\ q|_{\Gamma_2} &= q_2(s) \text{ и } s \in [0, s_2] \end{aligned} \quad (1)$$

как функции параметра длины дуги  $s$ .

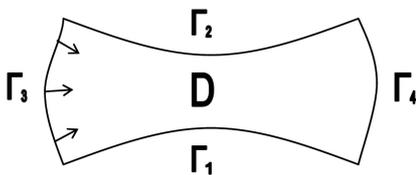


Рис. 1. Область течения

Предполагается, что функции  $q_1(s)$  и  $q_2(s)$  монотонно возрастающие и непрерывно дифференцируемые, т.е. выполнены условия

$$\frac{dq_1}{ds}(s) > 0, \quad \frac{dq_2}{ds}(s) > 0. \quad (2)$$

Кроме того, считаем, что  $q_1(0) = q_2(0) = Q_0$  и  $q_1(s_1) = q_2(s_2) = Q_1$ . Условия (2) означают, что существуют обратные функции:  $s|_{\Gamma_1} = s_1(q)$ ,  $s|_{\Gamma_2} = s_2(q)$ .

Следовательно,  $\frac{dq_1}{ds}(s_1(q))$  и  $\frac{dq_2}{ds}(s_2(q))$  являются функциями модуля скорости  $q$ . Участки границы  $\Gamma_3$  и  $\Gamma_4$  – линии уровня модуля скорости, т.е.

$$q|_{\Gamma_3} = Q_0 \text{ и } q|_{\Gamma_4} = Q_1 \quad (3)$$

и до решения также неизвестны.

Пусть  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  – соответственно потенциал и функция тока течения;  $q = (\varphi_x^2(x, y) + \varphi_y^2(x, y))^{\frac{1}{2}}$  – модуль скорости;  $\theta$  – угол наклона вектора скорости к оси  $OX$ ;  $\rho = \rho(q)$  – плотность;  $M = M(q)$  – число Маха;  $1 - M^2 = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dq}(q \cdot \rho)$ .

Система уравнений для  $\varphi$  и  $\psi$ , описывающая это движение, на плоскости годографа записывается в виде [3]:

$$\varphi_\theta = \frac{q}{\rho} \psi_q, \quad \varphi_q = \frac{1 - M^2}{\rho q} \psi_\theta. \quad (4)$$

Выберем в качестве независимых переменных  $\psi$  и  $q$  и преобразуем (4) к уравнениям для  $\theta(q, \psi)$  и  $\varphi(q, \psi)$ :

$$\frac{q}{\rho} \theta_q = -\varphi_\psi, \quad \theta_\psi = -\frac{\rho k + \varphi_\psi^2}{q \varphi_q}, \quad k(q) = \frac{1 - M^2}{\rho^2} \quad (5)$$

Полагая, наконец,  $\varphi_q = \frac{\rho}{uq}$ ,  $\varphi_\psi = -\frac{v}{u}$ , приходим к следующей симметрической системе уравнений для функций  $u$  и  $v$ :

$$ku_q + \frac{v}{u} v_q + \frac{\rho}{qu} v_\psi + k'u = 0, \quad \frac{v}{u} u_q - v_q + \frac{\rho}{qu} u_\psi = 0. \quad (6)$$

Система (6) эллиптическая при  $q < q_{кр}$  ( $k(q) > 0$ ), гиперболична при  $q > q_{кр}$  ( $k(q) < 0$ ) и вырождается

при  $q = q_{кр}$ , где  $q_{кр} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{1}{2}}$  – критическая скорость;  $\gamma$  – показатель адиабаты.

На линиях тока  $\psi = const$  имеет место соотношение  $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dx} \frac{dx}{ds} + \frac{d\varphi}{dy} \frac{dy}{ds} = q \cos^2 \theta + q \sin^2 \theta = q$ .

Отсюда для функций  $u$  и  $v$  получим следующие выражения:

$$u = \frac{\rho}{q\varphi_q} = \frac{\rho}{q \left( \frac{d\varphi}{ds} \frac{ds}{dq} \right)} = \frac{\rho}{q^2} \frac{dq}{ds}; \quad (7)$$

$$v = \frac{q}{\rho} \theta_q u = \frac{q}{\rho} \theta_s \frac{ds}{dq} u = \frac{\theta_s}{q}. \quad (8)$$

Легко показать, что связь между плоскостью  $XOY$  и  $qO\psi$  описывается соотношениями:

$$dz = \left( \frac{\rho}{qu} dq - \left( \frac{v}{u} - \frac{i}{\rho} \right) d\psi \right) \frac{e^{i\theta}}{q}, z = x + iy; \quad (9)$$

$$\theta_\psi = -\frac{ku^2 + v^2}{u}, \theta_q = \frac{\rho v}{qu}. \quad (10)$$

Так как кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  являются линиями тока, на которых  $\psi|_{\Gamma_1} = \psi_1 = const$  и  $\psi|_{\Gamma_2} = \psi_2 = const$ ,  $\psi_1 < \psi_2$ , а  $\Gamma_3$  и  $\Gamma_4$  – линиями уровня модуля скорости (3), где  $Q_0 < Q_1$ , то область  $D$  в плоскости  $XOY$  посредством соотношения (9) отображается на прямоугольник  $\Omega = \{(q, \psi) : Q_0 \leq q \leq Q_1, \psi_1 \leq \psi \leq \psi_2\}$  плоскости  $qO\psi$  с соответствующими участками границы  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ . Считая, что  $Q_0 < q_{кр} < Q_1$ , в области  $\Omega$  для системы уравнений (6) ставится следующая краевая задача:

$$\begin{aligned} u(q, \psi_1) &= \frac{\rho}{q^2} \frac{dq_1(s_1(q))}{ds} = U_1(q) \text{ на } \gamma_1; \\ u(q, \psi_2) &= \frac{\rho}{q^2} \frac{dq_2(s_2(q))}{ds} = U_2(q) \text{ на } \gamma_2; \\ v(Q_0, \psi) &= 0 \text{ на } \gamma_3, \quad ku^2 + v^2 \leq 0 \text{ на } \gamma_4. \end{aligned} \quad (11)$$

Последнее условие гарантирует, что характеристики системы (6) на  $\gamma_4$  не входят справа в область  $\Omega$ , а это означает независимость решения в области  $\Omega$  от условий справа от  $\gamma_4$ . Следуя работе [4], можно показать знакоопределенность оператора задачи (6), (11) по К. Фридрихсу. Обозначая посредством  $a(q, \psi) = \frac{v}{u}$  и  $b(q, \psi) = \frac{\rho}{qu}$ , заметим, что на решение системы (6) из второго уравнения следует равенство  $\frac{\partial a}{\partial q} + \frac{\partial b}{\partial \psi} = 0$ , которое используется при построении разностной схемы.

Для численного решения задачи (6), (11) в области  $\Omega$  строим сетку

$$\begin{aligned} \omega_{h,\tau} &= \{(q_n, \psi_m) : q_n = Q_0 + hn, \psi_m = \psi_1 + \tau m, \\ n &= 0, 1, \dots, N; m = 0, 1, \dots, M; \\ h &= (Q_1 - Q_0)/N; \tau = (\psi_2 - \psi_1)/M\}. \end{aligned}$$

Используя стандартные обозначения, запишем разностную схему, аппроксимирующую дифференциальную задачу следующим образом:

$$\begin{aligned} & (k_{n+\frac{1}{2}} u_{n+1,m} - k_{n-\frac{1}{2}} u_{n-1,m}) / 2h + \\ & + (a_{n+\frac{1}{2},m} u_{n+1,m} - a_{n-\frac{1}{2},m} u_{n-1,m}) / 2h + \\ & + (b_{n,m+\frac{1}{2}} v_{n,m+1} - b_{n,m-\frac{1}{2}} v_{n,m-1}) / 2\tau + \frac{1}{2} k'_n u_{n,m} = 0, \\ & (a_{n+\frac{1}{2},m} u_{n+1,m} - a_{n-\frac{1}{2},m} u_{n-1,m}) / 2h - \\ & - (v_{n+1,m} - v_{n-1,m}) / 2h + \\ & + (b_{n,m+\frac{1}{2}} u_{n,m+1} - b_{n,m-\frac{1}{2}} u_{n,m-1}) / 2\tau = 0, \\ & 1 \leq n \leq N-1; \quad 1 \leq m \leq M-1; \\ & (a_{n+\frac{1}{2},0} u_{n+1,0} - a_{n-\frac{1}{2},0} u_{n-1,0}) / 2h + \\ & + (v_{n+1,0} - v_{n-1,0}) / 2h + \\ & + (b_{n,\frac{1}{2}} u_{n,1} - b_{n,0} u_{n,0}) / \tau = 0, \\ & (a_{n+\frac{1}{2},M} u_{n+1,M} - a_{n-\frac{1}{2},M} u_{n-1,M}) / 2h - \\ & - (v_{n+1,M} - v_{n-1,M}) / 2h + \\ & + (b_{n,M} u_{n,M} - b_{n,M-\frac{1}{2}} u_{n,M-1}) / \tau = 0, \\ & 1 \leq n \leq N-1; \\ & (k_{\frac{1}{2}} u_{1,m} - k_0 u_{0,m}) / h + (a_{\frac{1}{2},m} u_{1,m} - a_{0,m} u_{0,m}) / h + \\ & + (b_{0,m+\frac{1}{2}} v_{0,m+1} - b_{0,m-\frac{1}{2}} v_{0,m-1}) / 2\tau + \frac{1}{2} k'_0 u_{0,m} = 0, \\ & (k_N u_{N,m} - k_{N-\frac{1}{2}} u_{N-1,m}) / h + \\ & + (a_{N,m} u_{N,m} - a_{N-\frac{1}{2},m} u_{N-1,m}) / h + \\ & + (b_{N,m+\frac{1}{2}} v_{N,m+1} - b_{N,m-\frac{1}{2}} v_{N,m-1}) / 2\tau + \\ & + \frac{1}{2} k'_N u_{N,m} = 0, \\ & (a_{N,m} u_{N,m} - a_{N-\frac{1}{2},m} u_{N-1,m}) / h - \\ & - (v_{N,m} - v_{N-1,m}) / h + \\ & + (b_{N,m+\frac{1}{2}} u_{N,m+1} - b_{N,m-\frac{1}{2}} u_{N,m-1}) / 2\tau = 0, \\ & 1 \leq m \leq M-1; \\ & (a_{N,1} u_{N,1} - a_{N-\frac{1}{2},1} u_{N-1,1}) / h - (v_{N,1} - v_{N-1,1}) / h + \\ & + (b_{N,\frac{3}{2}} u_{N,2} - b_{N,1} u_{N,1}) / 2\tau = 0, \\ & (a_{N,M} u_{N,M} - a_{N-\frac{1}{2},M} u_{N-1,M}) / h - (v_{N,M} - v_{N-1,M}) / h + \\ & + (b_{N,M} u_{N,M} - b_{N,M-\frac{1}{2}} u_{N,M-1}) / 2\tau = 0, \\ & u_{n,0} = U_1(q_n), u_{n,M} = U_2(q_n), v_{0,m} = 0, \quad (12) \\ & 0 \leq n \leq N, \quad 0 \leq m \leq M. \end{aligned}$$

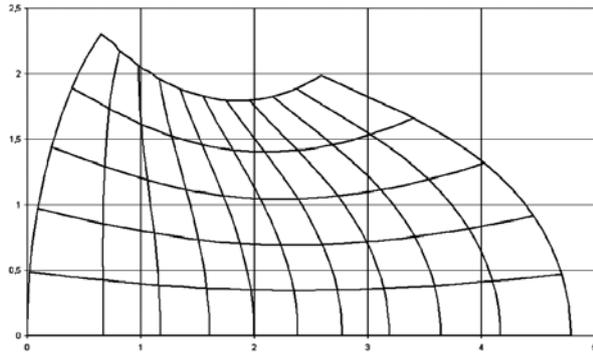


Рис. 2. Линии тока и линии уровня модуля скорости

Алгебраическая система (12) сохраняет свойства знакоопределенности оператора, т.е. матрица этой системы знакоопределена, это позволило применить для ее решения известный итерационный метод вариационного типа – метод минимальных невязок. В качестве иллюстрации проведенных расчетов приведены рисунки 2 и 3 (кривые на этих рисунках соответ-

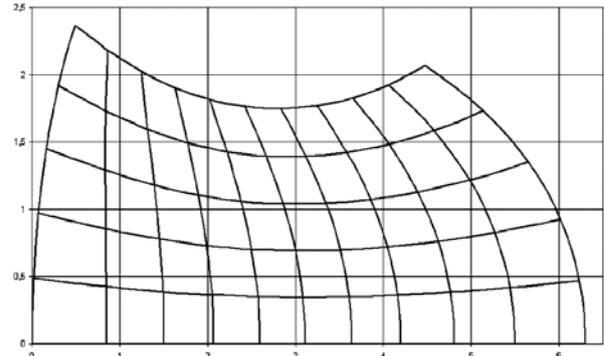


Рис. 3. Линии тока и линии уровня модуля скорости

ствуют линиям тока и линиям уровня модуля скорости). Течение предполагалось симметричным, и поэтому краевое условие на  $\gamma_1$  ставилось как  $v(q, \psi_1) = 0$ . В обоих случаях  $\psi_1 = 0$ ,  $\psi_2 = 1$ ,  $Q_0 = 0,5$ ,  $Q_1 = 1,5$  на рисунке 2  $s = 2q$  на  $\Gamma_2$ , а на рисунке 3 –  $s = 4q$  на  $\Gamma_2$ .

### Библиографический список

1. Елизаров, А.М. Обратные краевые задачи аэродинамики / А.М. Елизаров, Н.Б. Ильинский, А.В. Поташев. – М., 1994.
2. Елизаров, А.М. Основные методы, результаты, приложения и нерешенные проблемы теории обратных краевых задач аэрогидродинамики / А.М. Елизаров, Н.Б. Иль-

- инский, А.В. Поташев, Г.Ю. Степанов // Труды Математического центра Н.И. Лобачевского. – 2001. – Т. 10.
3. Берс, Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики / Л. Берс. – М., 1961.
4. Кузиков, С.С. Об одном методе расчета околозвуковых течений в плоских соплах / С.С. Кузиков // Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1976. – Т. 25.