УДК 517.11:518.5

В.Р. Карымов

Арифметическая и гиперарифметическая вычислимость относительно вычислений с ограничениями

Ключевые слова: оракулы, гиперарифметические функции, относительная вычислимость.
Key words: oracles, functions, relative calculations.

Продолжаются исследования, начатые в [1], рассматриваются обобщенные вычисления на абстрактных вычислительных машинах с оракулом, работающих с ограничением на число тактов работы. Главная особенность машин с оракулами – наличие спрашивающих команд, выполнение которых означает нахождение ответа на заданный вопрос. В общем случае вопросы вычисляет машина механически согласно своей программе, а ответ дается машине извне, как значение некоторой нерекурсивной функции, называемой *оракулом*. При этом вопросы кодируются числами и могут содержать коды программ других таких же машин, а ответы связаны с поведением этих машин. В результате возникает язык программирования, в котором допустимы некоторые неалгоритмические шаги.

Введение различных ограничений в работу машины с оракулом осуществляется с целью максимально приблизить эти абстрактные вычисления к реальным вычислениям. Это позволит моделировать некоторые неалгоритмические процессы в современных языках программирования. С другой стороны, вычисления с ограничениями обладают специфическими особенностями по сравнению с обычными вычислениями, и потому их исследования имеют определенный интерес.

Фиксируется эффективная нумерация программ машин с оракулом, оракул F – некоторая числовая функция. *Кодом* машины называется номер ее программы. Через $\{z\}_t^F(\bar{x})$ обозначается значение, которое вычисляет машина с кодом z на аргументах $\bar{x}$, работающая с оракулом F и ограничением t. Считается, что если машина z не остановилась за t тактов, то значение $\{z\}_t^F(\bar{x})$ не определено. Запись $\bar{x}$ является сокращением записи кортежа $(x_1,\dots,x_n)$. *Инициальной машиной* называется геделевский номер пары $\langle z,x\rangle$, где z – код машины; x – ее аргумент. Если инициальная машина соединена с оракулом F и работает с ограничением t, то пишут $\langle z,x\rangle_t^F$. Если машина вычислила некоторый вопрос v и значение оракула $F(v)$ не определено, то ее дальнейшая работа не определена, говорят, что машина застряла на вопросе v. Через $\overline{B_t}(F)$ обозначается множество всех $\langle z,x\rangle$ таких, что $\langle z,x\rangle_t^F$ получает ответы на все свои вопросы; $B_t(F)$ – множество машин из $\overline{B_t}(F)$, которые останавливаются с некоторым результатом. Если соответствующие машины работают без каких либо ограничений, то в данных обозначениях символ t опускается.

Числовая функция $f(\bar{x})$ называется *F-вычислимой с ограничением t*, если существует машина z такая, что для всех $\bar{x}$ выполняется: $\{z\}_t^F(\bar{x}) \cong f(\bar{x})$. При этом код z называется F-кодом $f(\bar{x})$. Естественным образом определяются F-разрешимые множества и отношения и их F-коды. В качестве оракула можно использовать характеристическую функцию произвольного числового множества A. В этом случае оракул обозначается через A и используются термины: A-вычислимые функции и A-разрешимые множества и отношения.

В работе [1] доказывается, что числовые операции над F-вычислимыми с ограничением t функциями дают также F-вычислимые функции, но которые вычислимы уже с другим ограничением t_1, при этом t_1 находится рекурсивно по t и F-кодам исходных функций. В таких случаях говорят, что данное утверждение *выполняется равномерно по t* и F-кодам исходных функций. Для вычислений с ограничениями выполняются естественные аналоги теоремы о существовании универсальной функции, S-m-n-теоремы и теоремы о неподвижной точке. Кроме того, доказывается, что в случае всюду определенного оракула F существует F-вычислимая функция, которая не является F-вычислимой ни с каким ограничением.

В этой работе для дальнейшей характеристики рассматриваемых вычислений привлекаются известные конструкции, связанные с арифметическими и гиперарифметическими множествами.

1. Арифметическая вычислимость относительно ограничений

В данном разделе рассматриваются две формы определения множеств, арифметических относительно некоторого ограничения t: с помощью кванторных форм и вычислений относительно специальных числовых оракулов. Доказывается эквивалентность этих определений.

Определение 1. Пусть A – произвольное числовое множество и $A' = \{\langle x, y\rangle / \{x\}^A(y) - \textit{определено}\}$. Говорят, что A' есть результат применения *джамп-операции* к множеству A.

В этом определении машина $\langle x, y\rangle$ работает с оракулом A, но без ограничения. Главная особенность джамп-операции в том, что с оракулом A' разрешима проблема остановки для машин, работающих с оракулом A.

Индукцией по n определяется следующая последовательность оракулов:

$$E_0, E_1, \ldots, E_n, \ldots,$$

где $E_0 = \varnothing$ и $E_{n+1} = E_n'$.

Известно, что класс множеств, разрешимых с некоторым оракулом E_n, совпадает с классом арифметических множеств [2, с. 15]. Теперь вводится следующий аналог арифметических множеств, использующий вычисления с ограничениями.

Определение 2. Для данного числа t множество M называется *арифметическим относительно ограничения* t, если оно является разрешимым (без оракула) с ограничением t или может быть получено из некоторого множества S, разрешимого с ограничением t, путем последовательного применения конечного числа операций проектирования и взятия дополнения.

Аналогично соответствующим рассуждениям из [3, с. 388] доказывается, что множество M является арифметическим относительно t тогда и только тогда, когда оно разрешимо с ограничением t или может быть выражено в следующей кванторной форме:

$$M = \{x \,/\, (Q_1 y_1) \ldots (Q_m y_m) S(x, y_1, \ldots, y_m)\},$$

где Q_i – кванторы $\forall$ или $\exists$, а $S(x, y_1, \ldots, y_m)$ – отношение, являющееся F-разрешимым с ограничением t. Геделевский номер указанной кванторной формы называется *арифметическим кодом М*.

Теорема 1. Если отношение $S(x, y)$ E_n-разрешимо с некоторым ограничением t, то множества $\{x/(\exists y)S(x,y)\}$ и $\{x/(\forall y)S(x,y)\}$ являются E_{n+1}-разрешимыми с некоторым ограничением равномерно по t и E_n-разрешающему коду отношения $S(x, y)$.

Доказательство. Пусть машина z такая, что для любых x, y

$$\{z\}_t^{E_n}(x, y) = \begin{cases} 1, & \textit{если } S(x, y), \\ 0, & \textit{если } \neg S(x, y). \end{cases}$$

Строится машина p, которая с оракулом на аргументе x последовательно вычисляет значения $\{z\}_t^{E_n}(x,0), \{z\}_t^{E_n}(x,1), \ldots$ и останавливается, если встретится 1. Машина p работает без ограничений, но ее код находится рекурсивно по z. Тогда

$$\{p\}^{E_n}(x) \textit{ определено} \leftrightarrow (\exists y)S(x, y).$$

Теперь строится машина w, которая вычисляет вопрос $\langle p, x\rangle$ и выдает полученный ответ в качестве результата. Эта машина работает с некоторым ограничением, и она с оракулом E_{n+1} разрешает множество $\{x/(\exists y)S(x,y)\}$. Аналогично рассматривается второе множество. Теорема доказана.

Теорема 2. Каждое арифметическое относительно некоторого ограничения t множество M является E_n-разрешимым с ограничением t_1 равномерно по t и арифметическому коду M.

Доказательство использует теорему 1 и осуществляется индукцией по числу кванторов в определении M.

Теперь рассмотрим обратное утверждение.

Теорема 3. Каждый оракул E_n является арифметическим относительно некоторого ограничения t равномерно по n.

Доказательство. Вводится следующая процедура. Пусть $\langle z, x\rangle$ – произвольная инициальная машина и D_u, D_v – конечные множества чисел, имеющие геделевские номера u, v соответственно и такие, что $D_u \cap D_v = \varnothing$. Производится моделирование работы $\langle z, x\rangle$ за исключением тех моментов, когда она задает вопросы оракулу. Пусть w – некоторый вопрос машины $\langle z, x\rangle$, тогда, если $w \in D_u$, то ей дается ответ 1, а если $w \in D_v$ – ответ 0, в остальных случаях работа $\langle z, x\rangle$ не определена. Так как D_u, D_v – конечные множества, то данная процедура рекурсивная. Теперь вводится предикат $T(z, x, t, y, u, v)$, который истинен, если описанная процедура моделирования $\langle z, x\rangle$ заканчивается не более чем за t тактов и ее результат равен y. Ясно, что этот предикат разрешим с ограничением t. Легко видеть, что

$$\langle z, x\rangle \in E_{n+1} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\exists t, u, v, y)(T(z, x, t, y, u, v) \wedge$$
$$\wedge D_u \subseteq E_n \wedge D_v \subseteq \overline{E}_n \wedge D_u \cap D_v = \varnothing).$$

Далее индукцией по n доказывается утверждение теоремы. При $n = 0$ это утверждение очевидно. Пусть множество E_n является арифметическим относительно некоторого ограничения t_1, которое находится рекурсивно по n. Пусть $\langle z, x\rangle$ удовлетворяет правой части предыдущего соотношения при некоторых t, u, v, y. Тогда машина $\langle z, x\rangle$ с оракулом E_n работает не более t тактов, в частности, она задает конечное число вопросов. Следовательно, множества D_u, D_v содержат ограниченное число элементов и, по индукционному предположению, отношения $D_u \subseteq E_n$, $D_v \subseteq \overline{E}_n$, $D_u \cap D_v = \varnothing$ – арифметические относительно некоторого ограничения, которое находится рекурсивно по n. Отсюда, в силу так называемого алгоритма Тарского-Куратовского [3, с. 394], следует, что E_{n+1} является арифметическим относительно некоторого ограничения, которое находится рекурсивно по n. Теорема доказана.

Теорема 4. Каждое E_n-разрешимое с некоторым ограничением t множество M является арифметическим относительно некоторого ограничения t_1 равномерно по t и E_n-коду M.

Доказательство. Пусть M удовлетворяет условию теоремы и z – его E_n-код. Работа машины z осуществляется рекурсивным способом, кроме моментов, когда она задает вопросы оракулу E_n. В силу предыдущей теоремы, такие шаги представимы формулами, являющимися арифметическими относительно некоторых ограничений, которые находятся рекурсивно по n и задаваемым вопросам. А так как работа z ограничена одним и тем же числом, то стандартным способом доказывается, что множество M является арифметическим относительно некоторого общего ограничения, которое вычислимо по t и E_n-коду M. Теорема доказана.

Таким образом, замена рекурсивной вычислимости на вычислимость с рассматриваемым ограничением в определении арифметических множеств сохраняет эквивалентность двух известных форм этого определения. Дальнейшая цель работы проверить такую согласованность подобной замены на примере гиперарифметической вычислимости.

2. Гиперарифметическая вычислимость относительно ограничений.

Известно, что классические гиперарифметические множества охватывают полностью класс классических арифметических множеств. В данном разделе сначала исследуются соотношения между гиперарифметическими и арифметическими множествами, определенных относительно некоторого ограничения t.

Пусть $\mathfrak{I}$ – множество всех одноместных всюду определенных функций вида $N \to N$, и буквы f, g обозначают переменные, пробегающие $\mathfrak{I}$.

Определение 3. Функционал $G(f,\overline{x})$ вида $\mathfrak{I}\times N\times N\times\ldots\times N \to N$ называется *вычислимым с ограничением* t, если существует машина z с оракулом такая, что для любых допустимых значений $f,\overline{x}$ выполняется соотношение: $\{z\}_t^f(\overline{x}) \cong G(f,\overline{x})$. Другими словами, функция f используется в качестве оракула. При этом код машины z называется *кодом функционала* $G(f,\overline{x})$.

Естественным образом определяются предикаты от функциональной переменной f и числовых переменных $\overline{x}$. Предикат $R(f,\overline{x})$ называется *разрешимым с ограничением* t, если его характеристическая функция является функционалом, вычислимым с ограничением t. Для таких предикатов вводятся кванторные формы вида: $(\exists f)(\forall)yR(f,x,y)$ и $(\forall f)(\exists y)R(f,x,y)$, и фиксируется эффективная нумерация таких форм.

Определение 4. а) *Класс* Π_t^1 есть класс множеств M, представимых в виде: $M=\{x\,/\,(\forall f)(\exists y)R(f,x,y)\}$, где $R(f,x,y)$ – некоторый разрешимый с ограничением t предикат; при этом номер формы, указанной в определении M, называется Π_t^1*-кодом* M.

б) *Класс* Σ_t^1 есть класс множеств M, представимых в виде: $M=\{x\,/\,(\exists f)(\forall y)R(f,x,y)\}$, где $R(f,x,y)$ – некоторый разрешимый с ограничением t предикат; при этом номер формы, указанной в определении M, называется Σ_t^1*-кодом* M.

в) *Класс* $\Delta_t^1 = \Sigma_t^1 \cap \Pi_t^1$. Множество M, принадлежащее классу Δ_t^1, называется *гиперарифметическим относительно ограничения* t, при этом $\langle z_1, z_2\rangle$ называется Δ_t^1*-кодом* множества M, где z_1, z_2 – его Σ_t^1-код, Π_t^1-код соответственно.

Аналогично определяются гиперарифметические относительно t отношения.

Теорема 5. Каждое арифметическое относительно ограничения t множество M является гиперарифметическим относительно того же ограничения t.

Доказательство. Согласно определению 2, множество M представимо в виде (1). Можно считать, что в соответствующий предикат $S(x,\overline{y})$ фиктивно входит функциональная переменная f, и тогда M представимо следующими кванторными формами:

$$M=\{x\,/\,(\exists f)\,(Q_1y_1)\,\ldots\,(Q_my_m)S(x,\overline{y})\,\}=$$
$$=\{x\,/\,(\forall f)\,(Q_1y_1)\,\ldots\,(Q_my_m)S(x,\overline{y})\,\}.$$

Следовательно, множество M является гиперарифметическим относительного того же ограничения t. Теорема доказана.

Теорема 6. Существует гиперарифметическое относительно некоторого ограничения t множество, которое не является арифметическим.

Доказательство. Пусть $E^{\omega}=\{\langle z,n\rangle / z\in E_n\}$.

От противного пусть для некоторой машины w выполняется соотношение: для любых z, n

$$\{w\}^{E_m}(\langle z,n\rangle)=\begin{cases}1, \text{ если } z\in E_n,\\ 0, \text{ если } z\notin E_n.\end{cases}$$

Тогда существует машина w_1, которая на аргументе x вычисляет значение $a=\{w\}^{E_m}(\langle\langle x,x\rangle,n+1\rangle)$ и, если $a=0$, то w_1 останавливается с результатом 0, а если $a=1$, то w_1 работает бесконечно. Стандартным способом доказывается, что $\{w_1\}^{E_m}(w_1)$ определено $\leftrightarrow$ $\{w_1\}^{E_m}(w_1)$ не определено. Полученное противоречие доказывает, что множество E^{ω} не является арифметическим. Далее,

$$\langle z,n\rangle\in E^{\omega}\leftrightarrow(\exists f)(f=\chi_{E_n}\wedge f(\mathrm{z})=1)\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(\forall f)(f=\chi_{E_n}\to f(\mathrm{z})=1),$$

где χ_{E_n} – характеристическая функция множества E_n.

По теореме 3 существует предикат $S(x,y_1,\ldots,y_m)$, являющийся разрешимым с некоторым ограничени-