УДК 512.54.01

С.А. Шахова

Об одном свойстве операции пересечения в решетках доминионов квазимногообразий абелевых групп

Ключевые слова: квазимногообразие, доминион, группа.

Key words: quasivariety, dominion, group.

Введение. Понятие доминиона возникло в [1]. Доминионом подалгебры H универсальной алгебры A в полной категории $\mathcal{M}$ ($A \in \mathcal{M}$), обозначаемым $dom_A^{\mathcal{M}}(H)$, называется множество элементов $a \in A$ таких, что $\varphi(a) = \psi(a)$ для любых двух морфизмов $\varphi, \psi : A \to M \in \mathcal{M}$, совпадающих на H.

Доминионы изучались в различных классах универсальных алгебр [2–4]. В работе [5], где доминионы впервые исследовались в квазимногообразиях универсальных алгебр, было дано расширение понятия доминиона на случай, когда $A \notin \mathcal{M}$. Появилась возможность ввести в рассмотрение множество доминионов $L(A, H, \mathcal{M}) = \{dom_A^{\mathcal{N}}(H) \mid \mathcal{N} \in L_q(\mathcal{M})\}$, где $L_q(\mathcal{M})$ — решетка подквазимногообразий квазимногообразия $\mathcal{M}$. Естественно возник вопрос: при каких условиях это множество образует решетку относительно теоретико-множественного включения?

В работе [5] (лемма 4.2) доказано равенство

$$\bigcap_{i \in I} dom_A^{\mathcal{M}_i}(H) = dom_A^{\bigvee_{i \in I} \mathcal{M}_i}(H)$$

для произольного конечного множества квазимногообразий $\mathcal{M}_i (i \in I)$, универсальной алгебры A и ее подалгебры H. Легко видеть, что выполнимость этого равенства для любого (не обязательно конечного) множества квазимногообразий $\mathcal{M}_i \in L_q(\mathcal{M}) (i \in I)$ означает, что множество доминионов $L(A, H, \mathcal{M})$ образует полную решетку относительно теоретико-множественного включения, в которой решеточные операции определены следующим образом:

$$dom_A^{\mathcal{N}}(H) \wedge dom_A^{\mathcal{R}}(H) = dom_A^{\mathcal{N} \vee \mathcal{R}}(H),$$

$$dom_A^{\mathcal{N}}(H) \vee dom_A^{\mathcal{R}}(H) = dom_A^{\mathcal{K}}(H),$$

где $\mathcal{K}$ – квазимногообразие, порожденное всеми такими квазимногообразиями $\mathcal{F} \in L_q(\mathcal{M})$, что $dom_A^{\mathcal{F}}(H) \supseteq dom_A^{\mathcal{N}}(H) \cup dom_A^{\mathcal{R}}(H)$.

В настоящей работе найдены необходимые и достаточные условия выполнимости равенства

$$\bigcap_{i \in I} dom_A^{\mathcal{M}_i}(H) = dom_A^{\bigvee_{i \in I} \mathcal{M}_i}(H)$$

для произвольного множества квазимногообразий $\mathcal{M}_i \in L_q(\mathcal{M}) (i \in I)$ в случае, когда $\mathcal{M}$ — произвольное квазимногообразие абелевых групп, A – группа, H – подгруппа группы A.

Предварительные замечания. Следуя [5], определим доминион подгруппы H группы A в квазимногообразии $\mathcal{M}$ следующим образом:

$$dom_A^{\mathcal{M}}(H) = \{a \in A \mid \forall M \in \mathcal{M}\ \forall \varphi, \psi : A \to M,$$

$$\text{если } \varphi\,|_H = \psi\,|_H, \text{то } \varphi(a) = \psi(a)\},$$

где $\varphi, \psi : A \to M$ – гомоморфизмы группы A в группу M; $\varphi\,|_H$, $\psi\,|_H$ – сужение гомоморфизмов φ, ψ на H; $\varphi(a)$, $\psi(a)$ – образы элемента a при гомоморфизмах φ, ψ.

Из определения доминиона вытекает, что он является подгруппой группы A, содержащей H. Нетрудно также заметить, что для произвольных квазимногообразий $\mathcal{N}, \mathcal{R}$ включение $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{R}$ влечет включение $dom_A^{\mathcal{R}}(H) \subseteq dom_A^{\mathcal{N}}(H)$.

В работе используются следующие утверждения.

Лемма [5, лемма 4.2]. *Пусть $\mathcal{N}, \mathcal{R}$ – произвольные квазимногообразия универсальных алгебр, A – алгебра, H – подалгебра алгебры A. Тогда $dom_A^{\mathcal{N}}(H) \cap dom_A^{\mathcal{R}}(H) = dom_A^{\mathcal{N} \vee \mathcal{R}}(H)$.*

Теорема 1 [6, теорема 1]. *Доминион подгруппы H группы A в произвольном квазимногообразии абелевых групп $\mathcal{M}$ совпадает с наименьшей нормальной подгруппой группы A, содержащей H, фактор-группа по которой из $\mathcal{M}$.*

Приведем список применяемых в работе обозначений.

$\mathbf{N}$ – множество натуральных чисел.

$\mathbf{P}$ – множество простых чисел.

(n, r) – наибольший общий делитель чисел $n, r \in \mathbf{N}$.

A/H – фактор-группа группы A по нормальной подгруппе H.

$\mid a \mid$ – порядок элемента a.

$\overline{a}$ – обозначение элемента aH фактор-группы A/H.

$h_p(a)$ – p-высота элемента a.

$gr(H)$ – подгруппа группы A, порожденная подмножеством $H \subseteq A$.

e – единичный элемент группы.

Z – бесконечная циклическая группа.

Z_n – циклическая группа порядка n.

Z_{p^∞} – квазициклическая группа типа p^∞, где p – простое число.

$q(A_1, ..., A_n)$ – порожденное группами $A_1, ..., A_n$ квазимногообразие.

Пусть A – абелева группа, $a \in A$, $p \in P$. Наибольшее неотрицательное целое число n, для которого уравнение $x^{p^n} = a$ имеет решение $x \in A$, называется p-высотой элемента a. Если уравнение $x^{p^n} = a$ разрешимо при любом n, то a называется элементом бесконечной p-высоты.

Далее потребуется описание квазимногообразий абелевых групп, данное в [7]. Согласно [7], два квазимногообразия абелевых групп совпадают тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые пересечения с множеством групп Q, состоящим из групп Z, E и циклических p-групп, где p пробегает множество всех простых чисел. Из [7] вытекает, что произвольное квазимногообразие $\mathcal{M}$ абелевых групп представимо в виде $\mathcal{M} = q(S)$ для некоторого $S \subseteq Q$, а циклическая p-группа принадлежит квазимногообразию $q(S)$ в том и только в том случае, когда она изоморфна подходящей подгруппе некоторой группы из S. Кроме того, если $\mathcal{M} = \bigvee\limits_{i\in I} \mathcal{M}_i$, $\mathcal{M}_i = q(S_i), (S_i \subseteq Q)$, то $\mathcal{M} = q(\bigcup\limits_{i\in I} S_i)$. Отметим также, что если группа Z не принадлежит квазимногообразию $\mathcal{M} = q(S)$, то множество S состоит из конечного числа неизоморфных циклических p-групп, а квазимногообразие $\mathcal{M}$ является многообразием.

Используемые в работе сведения из теории групп содержатся в [8], а из теории квазимногообразий – в [9–11].

Основной результат. Верна следующая

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{M}$ – произвольное квазимногообразие абелевых групп, A – группа, H – ее подгруппа, $\mathcal{M}_i \in L_q(\mathcal{M})$ для всех $i \in I$ и $\overline{A} = A/dom_A^{\mathcal{M}}(H)$. Тогда*

$$\bigcap_{i\in I} dom_A^{\mathcal{M}_i}(H) \neq dom_A^{\bigvee\limits_{i\in I}\mathcal{M}_i}(H)$$

в том и только в том случае, когда выполнено одно из следующих условий.

(i) *В группе A существует элемент a такой, что $|\,\overline{a}\,| = p^k$ для некоторых $p \in P$, $k \in N$ и $h_p(\overline{a}) = \infty$, $Z_{p^\infty} \notin \mathcal{M}_i$ для любого $i \in I$, $Z_{p^\infty} \in \bigvee\limits_{i\in I} \mathcal{M}_i$.*

(ii) *в группе A существует элемент a такой, что $|\,\overline{a}\,| = \infty$, $q(Z_{p^{h_p(a)}} \mid p \in P) \supseteq \mathcal{M}_i$, $Z \notin \mathcal{M}_i$ для любого $i \in I$, $Z \in \bigvee\limits_{i\in I} \mathcal{M}_i$.*

Доказательство. По теореме 1 $\overline{A} \in \mathcal{M}$. Пусть a – элемент, для которого выполнено условие (i). Ясно, что $a \in \bigcap\limits_{i\in I} dom_A^{\mathcal{M}_i}(H)$. Покажем, что $a \notin dom_A^{\bigvee\limits_{i\in I}\mathcal{M}_i}(H)$. Введем обозначение $\overline{F} = gr(\overline{g} \in \overline{A} \mid (|\,\overline{g}\,|, p) = 1)$. Легко видеть, что $\overline{A}/\overline{F} \in qZ_{p^\infty} \subseteq \bigvee\limits_{i\in I} \mathcal{M}_i$. Рассмотрим цепочку гомоморфизмов $\varphi : A \to \overline{A} \to \overline{A}/\overline{F}$. Поскольку $\varphi(a) \neq e$, то $a \notin dom_A^{\bigvee\limits_{i\in I}\mathcal{M}_i}(H)$.

Предположим теперь, что для элемента a выполнено условие (ii). Тогда $a \in \bigcap\limits_{i\in I} dom_A^{\mathcal{M}_i}(H)$. Обозначим через $T(\overline{A})$ периодическую часть группы $\overline{A}$. Пусть $\varphi : A \to \overline{A} \to \overline{A}/T(\overline{A})$ – цепочка гомоморфизмов. Нетрудно заметить, что $\overline{A}/T(\overline{A}) \in qZ \subseteq \bigvee\limits_{i\in I} \mathcal{M}_i$ и $\varphi(a) \neq e$. Значит, $a \notin dom_A^{\bigvee\limits_{i\in I}\mathcal{M}_i}(H)$.

Докажем обратное утверждение. Пусть теперь $\bigcap\limits_{i\in I} dom_A^{\mathcal{M}_i}(H) \neq dom_A^{\bigvee\limits_{i\in I}\mathcal{M}_i}(H)$. Поскольку $\bigcap\limits_{i\in I} dom_A^{\mathcal{M}_i}(H) \supseteq dom_A^{\bigvee\limits_{i\in I}\mathcal{M}_i}(H)$, то найдется элемент $a \in \bigcap\limits_{i\in I} dom_A^{\mathcal{M}_i}(H)$, $a \notin dom_A^{\bigvee\limits_{i\in I}\mathcal{M}_i}(H)$. Возможны следующие случаи.

(i)$|\,\overline{a}\,| < \infty$. Можно считать, что $|\,\overline{a}\,| = p^k$ для некоторых чисел $p \in P$, $k \in N$.

Действительно, $|\,\overline{a}\,| = p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s} = p_i^{k_i} d_i$, где $(d_i, p_i) = 1$, $p_1, \ldots, p_s \in P$. Ясно, что $a^{d_i} \notin dom_A^{\bigvee\limits_{i\in I}\mathcal{M}_i}(H)$ для некоторого $i \in I$ и $|\,a^{d_i}\,| = p_i^{k_i}$.

Если $\overline{a}$ не является элементом бесконечной p-высоты в $\overline{A}$, то найдется число $l \in N$ такое, что $\overline{a} \notin \overline{A}^{p^l}$. Будем считать, что l – минимальное с таким свойством. Тогда $\varphi(a) \neq e$, где $\varphi : A \to \overline{A} \to \overline{A}/\overline{A}^{p^l} \in qZ_{p^l} \subseteq \bigvee\limits_{i\in I} \mathcal{M}_i$. Если $Z_{p^l} \notin \bigvee\limits_{i\in I} \mathcal{M}_i$, то $a \in dom_A^{\bigvee\limits_{i\in I}\mathcal{M}_i}(H)$. Отсюда сразу вытекает, что $Z_{p^l} \in \mathcal{M}_i$ для некоторого i, и $a \in dom_A^{\mathcal{M}_i}(H)$, что не так. Следовательно, $\overline{a}$ является элементом бесконечной p-высоты в $\overline{A}$.

Предположим, что $Z_{p^\infty} \in \mathcal{M}_i$ для некоторого $i \in I$. Рассмотрим цепочку гомоморфизмов $\varphi : A \to \overline{A} \to \overline{A}/\overline{F}$, где $\overline{F} = gr(\overline{g} \in \overline{A} \mid (|\,\overline{g}\,|, p) = 1)$. Ввиду того, что $\overline{A}/\overline{F} \in qZ_{p^\infty}$ и $\varphi(a) \neq e$, имеем $a \notin dom_A^{\mathcal{M}_i}(H)$. Полученное противоречие означает, что $Z_{p^\infty} \notin \mathcal{M}_i$ для всех $i \in I$.

Очевидно, что если $Z_{p^\infty} \notin \bigvee\limits_{i\in I} \mathcal{M}_i$, то $a \in dom_A^{\bigvee\limits_{i\in I}\mathcal{M}_i}(H)$, что неверно. Таким образом, $Z_{p^\infty} \in \bigvee\limits_{i\in I} \mathcal{M}_i$.

Исследуем случай (ii), когда $|\,\overline{a}\,| = \infty$. Допустим, что $Z \in \mathcal{M}_i$, и построим цепочку гомоморфизмов $\varphi : A \to \overline{A} \to \overline{A}/T(\overline{A})$. Поскольку

$\overline{A}/T(\overline{A}) \in qZ \subseteq \mathcal{M}_i$, $\varphi(a) \neq e$, то $a \notin dom_A^{\mathcal{M}_i}(H)$. Полученное противоречие означает, что $Z \notin \mathcal{M}_i$.

Если $Z \notin \bigvee_{i\in I}\mathcal{M}_i$, то $\{\mathcal{M}_i \mid i \in I\}$ – конечное множество различных квазимногообразий и по лемме 1 $\bigcap_{i\in I} dom_A^{\mathcal{M}_i}(H) = dom_A^{\bigvee_{i\in I}\mathcal{M}_i}(H)$, что не так. Значит, $Z \in \bigvee_{i\in I}\mathcal{M}_i$.

Предположим, что $Z_{p^l} \notin q(Z_{p^{h_p(a)}} \mid p \in P)$, но $Z_{p^l} \in \mathcal{M}_i$ для некоторого $i \in I$. Тогда $\overline{a} \notin \overline{A}^{p^l}$. Рассмотрев цепочку гомоморфизмов $\varphi : A \to \overline{A} \to \overline{A}/\overline{A}^{p^l} \in \mathcal{M}_i$ и приняв во внимание тот факт, что $\varphi(a) \neq e$, получим, что $a \notin dom_A^{\mathcal{M}_i}(H)$. Возникшее противоречие означает, что $q(Z_{p^{h_p(a)}} \mid p \in P) \supseteq \mathcal{M}_i$ для всех $i \in I$. Тем самым теорема доказана.

Библиографический список

1. Isbell, J.R. Epimorphisms and dominions / J.R. Isbell // Proceedings of the Conference on Categorical Algebra, Springer. – New York, 1965.
2. Magidin, A. Dominions in varieties of nilpotent groups / A. Magidin // Comm. Algebra. – 2000. – V. 28, Ѓ3.
3. Wasserman, D. Epimorphisms and dominions in varieties of lattices / D. Wasserman // Ph.D. thesis. – New York, 2001.
4. Bergman, G.M. Ordering coproducts of groups and semigroups / G.M. Bergman // J. Algebra. – 1990. – V. 133, Ѓ2.
5. Budkin, A. Dominions in quasivarieties of universal algebras / A. Budkin // Studia Logica. – 2004. – V. 78, Ѓ1–2.
6. Шахова, С.А. О решетках доминионов в квазимногообразиях абелевых групп / С.А. Шахова // Алгебра и логика. – 2005. – Т. 44, Ѓ2.
7. Виноградов, А.А. Квазимногообразия абелевых групп / А.А. Виноградов // Алгебра и логика. – 1965. – Т. 4, Ѓ6.
8. Каргаполов, М.И. Основы теории групп / М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков. – М., 1982.
9. Мальцев, А.И. Алгебраические системы / А.И. Мальцев. – М., 1970.
10. Будкин, А.И. Квазимногообразия групп / А.И. Будкин. – Барнаул, 2002.
11. Горбунов, В.А. Алгебраическая теория квазимногообразий / В.А. Горбунов. – Новосибирск, 1999.