УДК 514.75

М.А. Чешкова

Об изометрии вдоль нормали

Ключевые слова: гиперповерхность, гауссова кривизна, гиперсфера, гиперпараболоид.
Key words: hypersurface, Gaussian curvature, hypershere, hyperparaboloid.

Рассмотрим две гиперповерхности $M, \bar{M}$ в евклидовом пространстве E^{m+1} и отображение $\varphi : M \to \bar{M}$ вдоль нормали n к M.

Теорема. *Если гиперповерхность M допускает изометрию вдоль нормали, то в окрестности точки $p \in M$, где гауссова кривизна отличная от нуля, M локально*

1) либо гиперсфера,

2) либо гиперпараболоид.

1. Основные формулы. Обозначим через r радиус-вектор точки $p \in M$. Тогда

$$\bar{r} = r + hn, h \neq 0, \tag{1}$$

где n – орт нормали к M; $\bar{r}$ – радиус-вектор точки $\bar{p} = \varphi(p) \in \bar{M}$.

Обозначим $F(M)$ – R-алгебру дифференцируемых на M функций; T^q_s – F-модуль дифференцируемых на M тензорных полей типа (q, s); $\chi(M)$ – алгебру Ли векторных полей на M; ∂ – дифференцирование и $<,>$ – скалярное произведение в E^{m+1}.

Формулы Гаусса-Вейнгартена гиперповерхности M имеют вид [1, с. 36]

$$\partial_X Y = \nabla_X Y + b(X, Y)n, \tag{2}$$

$$\partial_X n = -AX,$$

где $A \in T^1_1(M)$, $X, Y \in \chi(M)$, $b \in T^0_2(M)$, $b(X, Y)$ – вторая фундаментальная форма; A – оператор Вейнгартена, ∇ – связность Леви-Чивита метрики $g(X, Y) =< X, Y >$.

Выполняются уравнения Кодацци

$$dA(X, Y) = 0, \tag{3}$$

где $dA(X, Y) = \nabla_X AY - \nabla_Y AX - A[X, Y]$ – внешний дифференциал поля A в связности ∇.

Дифференцируя (1) и используя (2), получим

$$d\varphi X = X + Xhn - hAX, \tag{4}$$

$$X \in \chi(M).$$

Отображение φ индуцирует на M метрику

$$\bar{g}(X, Y) =< d\varphi X, d\varphi Y >= \tag{5}$$

$$g(X, Y) - 2hg(X, AY) +$$

$$h^2 g(AX, AY) + XhYh.$$

Пусть $k_I (I = 1, ..., m)$ – собственные значения (некоторые из которых могут совпадать) оператора A; X_I – ортонормированный базис из собственных векторов. Тогда

$$AX_I = k_I X_I,$$

k_I – главные кривизны; X_I – главные направления гиперповерхности M. Тогда из (5) получим

$$\bar{g}_{IJ} = (X_I h)(X_J h), I \neq J; \tag{6}$$

$$\bar{g}_{II} = (X_I h)^2 + (1 - hk_I)^2.$$

Лемма 1. *Если отображение $\varphi : M \to \bar{M}$ вдоль нормали n к M – изометрия, то гиперповерхность M имеет главную кривизну кратности $\geq m - 1$.*

Доказательство. Требуя, чтобы отображение φ было изометрией, получим

$$(1 - hk_I)^2 + (X_I h)^2 = 1; \tag{7}$$

$$(X_I h)(X_J h) = 0, \ I \neq J.$$

Из (7) следует, что либо $X_I h = 0, (1 - hk_I)^2 = 1, I = 1, ..., m$; $hk_I(2 - hk_I) = 0, (hk_I \neq 0)$;

$$k_1 = ... = k_m = k = \frac{2}{h}, X_I k = 0, \tag{8}$$

либо $X_i h = 0, \ i = 1, ..., m - 1, X_m h \neq 0$. В этом случае имеем

$$X_i h = 0, \ i = 1, ..., m - 1, \tag{9}$$

$$k_1 = ... = k_{m-1} = k = \frac{2}{h}, \tag{10}$$

причем

$$X_i k = 0, \ i = 1, ..., m - 1. \tag{11}$$

Лемма доказана.

Следствие 1. *Если отображение $\varphi : M \to \bar{M}$ вдоль нормали n к M – изометрия, то гиперповерхность M есть гиперсфера, либо каналовая гиперповерхность.*

Доказательство. Если все главные кривизны равны, то гиперповерхность M есть гиперсфера радиуса $R = \frac{1}{|k|}$. Если кратность главной кривизны k равна $m - 1$, то гиперповерхность M есть огибающая однопараметрического семейства гиперсфер радиуса $R = \frac{1}{|k|}$, центры которых имеют вид

$$C = r + \frac{1}{k}n.$$

Действительно, в силу (11), (2) имеем $\partial_{X_i} C = X_i + \frac{1}{k}\partial_{X_i} n = 0$. Таким образом, гиперповерхность M есть каналовая гиперповерхность [2].

Следствие 2. *Если отображение $\varphi : M \to \bar{M}$ вдоль нормали n к M – изометрия и гиперповерхность M есть гиперсфера, то $M = \bar{M}$ и φ есть симметрия относительно центра гиперсферы.*

Доказательство. Действительно,

$$r = C - \frac{1}{k}n,$$

$$\bar{r} = r + hn = r + \frac{2}{k}n = C + \frac{1}{k}n.$$

Лемма 2. *Если отображение $\varphi : M \to \bar{M}$ вдоль нормали n к M – изометрия, то гиперповерхность M есть гиперповерхность вращения.*

Доказательство. Положим $X_m = U, k_m = \bar{k}$. Рассмотрим уравнения Кодацци $dA(X_i, U) = 0$. Имеем

$$(X_i\bar{k}) + \bar{k}\nabla_{X_i}U - (Uk)X_i - k\nabla_U X_i -$$

$$k(\nabla_{X_i})^\top - \bar{k}(\nabla_{X_i})^\perp +$$

$$k(\nabla_U X_i)^\top + \bar{k}(\nabla_U X_i)^\perp = 0,$$

где $Z = Z^\top + Z^\perp; Z^\top$ принадлежит распределению $\Delta_{m-1} = \{X_1, ..., X_{m-1}\}, Z^\perp$ принадлежит распределению $\Delta_1 = \{U\}$. Имеем

$$(X_i\bar{k})U - (k - \bar{k})(\nabla_U X_i)^\perp = 0,$$

$$(Uk)X_i - (\bar{k} - k)(\nabla_{X_i}U)^\top = 0.$$

Тогда из (7) следует

$$(Uh)^2 - 2h\bar{k} + h^2\bar{k}^2 = 0, \bar{k} = k_m. \qquad (12)$$

Дифференцируем (12) вдоль X_i и используем (10). Имеем

$$(Uh)(X_iUh) = hX_i\bar{k} - h^2\bar{k}X_i\bar{k}. \qquad (13)$$

Для определения X_iUh дифференцируем равенство $X_ih = 0$ вдоль U.

Так как $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$, то получим

$$UX_ih = X_iUh + (\nabla_U X_i - \nabla_{X_i}U)h =$$

$$X_iUh + (\nabla_U X_i - \nabla_{X_i}U)^\perp h = 0.$$

Вектор U – орт. Откуда вытекает $(\nabla_{X_i}U)^\perp = 0$.

Имеем

$$X_iUh = -(\nabla_U X_i)^\perp h = \frac{X_i\bar{k}}{\bar{k} - k}Uh. \qquad (14)$$

Из (13), (14), (10) получим

$$\frac{X_i}{\bar{k} - k}(2h\bar{k} - h^2) +$$

$$(X_i\bar{k})h(h - 1) = -\frac{X_i\bar{k}}{k} = 0.$$

Таким образом,

$$X_ik = 0, X_i\bar{k} = 0, i = 1, ..., m - 1. \qquad (15)$$

Соотношения (15) есть достаточное условие [3], чтобы каналовая гиперповерхность была гиперповерхностью вращения.

2. Доказательство теоремы. Итак, M – гиперповерхность вращения в E^{m+1} . Обозначим через r радиус-вектор точки гиперповерхности, a – орт оси, а через ρ – радиус-вектор единичной $(m - 1)$-сферы. Тогда гиперповерхность M можно задать в виде

$$r = u^m\rho(u^1, ..., u^{m-1}) + fa,$$

где $f = f(u^m)$ – дифференцируемая функция, $u^1, ..., u^m$ – параметры.

Имеем

$$r_i = u^m\rho_i, \ (i = 1, ..., m - 1),$$

$$r_m = f'a + \rho,$$

$$n = \frac{f'\rho - a}{\sqrt{(f')^2 + 1}},$$

$$n_i = \frac{f'}{u^m\sqrt{(f')^2 + 1}}r_i,$$

$$n_m = \frac{f''}{(\sqrt{f')^2 + 1})^3}r_m,$$

$$k = -\frac{f'}{u^m\sqrt{(f')^2 + 1}}, \qquad (16)$$

$$\bar{k} = -\frac{f''}{(\sqrt{(f')^2 + 1})^3}.$$

Уравнение гиперповерхности $\bar{M}$ примет вид:

$$\bar{r} = -u^m\rho(u^1, ..., u^{m-1}) +$$

$$(f + \frac{2u^m}{f'})a.$$

Требуя, чтобы

$$\bar{g}_{mm} = 1 + (f' +$$

$$\frac{2u^m}{f'})^2 = g_{mm} = 1,$$

получим

$$((f + \frac{2u^m}{f'})')^2 = (f')^2.$$

Откуда имеем два решения:

$$f = C_1(u^m)^2 + C_2,$$

$$(f - C_1)^2 + (u^m)^2 = C_2,\ C_1, C_2 = const.$$

В плоскости меридиана $\{\rho, a\}$ – это парабола или окружность, центр которой находится на оси $\{O, a\}$.

Таким образом, M локально либо гиперпараболоид, либо гиперсфера. Теорема доказана.

Обозначим $u^m = u$. Из (8), (16) имеем

$$f = C_1 u^2 + C_2, n = \frac{2C_1 u\rho - a}{\sqrt{(2C_1 u)^2 + 1}};$$

$$k = -\frac{2C_1}{\sqrt{(2C_1 u)^2 + 1}}, h = \frac{2}{k};$$

$$hn = -2u\rho + \frac{1}{C_1}a.$$

Таким образом, уравнения гиперпараболоидов $M, \bar{M}$ имеют вид

$$r = u^m \rho(u^1, ..., u^{m-1}) + f(u^m)a;$$

$$f(u^m) = C_1(u^m)^2 + C_2;$$

$$\bar{r} = -u^m \rho(u^1, ..., u^{m-1}) +$$

$$(f(u^m) + \frac{1}{C_1})a.$$

Итак, получаются следующие предложения.

Следствие 3. *Гиперпараболоид $\bar{M}$ получен путем сдвига гиперпараболоида M вдоль оси.*

Следствие 4. *Отображение $\varphi : M \to \bar{M}$ есть симметрия относительно центра $(m-1)$-мерной параллели и последующего сдвига вдоль оси на величину $\frac{1}{C_1}$.*

Библиографический список

1. Кобаяси Ш. Основы дифференциальной геометрии / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М., 1981. Т. 2.

2. Шуликовский В.И. Классическая дифференциальная геометрия / В.И. Шуликовский. – М., 1963.

3. Чешкова М.А. Об одном характеристическом свойстве гиперповерхности вращения в евклидовом пространстве E^n / М.А. Чешкова // Вестник Барнаульского гос. пед. ун-та. – 2002. – Вып. 2.