УДК 512.54.01

А.А. Папин, М.А. Токарева

Модельная задача о движении сжимаемой жидкости в вязкоупругой горной породеа*

Ключевые слова: сжимаемая жидкость, вязкоупругость, разрешимость.

Key words: compressible fluid, viscoelastic, solvability.

Рассматривается движение сжимаемой жидкости в вязкоупругой горной породе. Исследована разрешимость одномерных начально-краевых задач.

1. Постановка задачи. В работе изучается следующая квазилинейная система уравнений составного типа:

$$\frac{\partial(\rho_f\phi)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_f\phi v_f)}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial(\rho_s(1-\phi))}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_s(1-\phi)v_s)}{\partial x}=0, \tag{1}$$

$$\phi(v_s-v_f)=k(\phi)(\frac{\partial p_f}{\partial x}+\rho_f g), \tag{2}$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial x}=-a_1(\phi)p_e-a_2(\phi)(\frac{\partial p_e}{\partial t}+v_s\frac{\partial p_e}{\partial x}),\qquad p_e=(1-\phi)(p_s-p_f), \tag{3}$$

$$\phi p_f+(1-\phi)p_s=p_{tot}; \tag{4}$$

Данная система описывает одномерное нестационарное изотермическое движение сжимаемой жидкости в вязкоупругой горной породе [1]. Здесь ρ_f,ρ_s,v_s,v_f – соответственно истинные плотности и скорости фаз; ϕ – пористость; g – плотность массовых сил; $k(\phi)$ – проницаемость; $a_1(\phi)$, $a_2(\phi)$ – параметры горной породы; $p_{tot}=p_0+\rho_s g(H-x)$ – общее давление (заданные функции). Задача записана в эйлеровых координатах x, t (начало отсчета на глубине H от поверхности земли, ось x направлена вверх, т.е. движение происходит при $x>0$, $p_0=const$). Истинная плотность горной породы ρ_s принимается постоянной. Искомыми являются величины ϕ,ρ_f,v_s,v_f,p_f. Система уравнений (1)–(4) замыкается либо заданием уравнения состояния жидкости $p_f=p(\rho_f)$, либо предположением о несжимаемости жидкости ($\rho_f=const>0$) [1].

Система (1)–(4) близка по структуре системе уравнений движения смеси газа с твердыми частицами [2]. Особенностью системы (1)–(4) также является необходимость обоснования физического принципа максимума для пористости ϕ вида $0\le\phi\le1$.

В настоящей работе установлена локальная классическая разрешимость задачи Коши для системы (1)–(4) в случае, когда ρ_f – функция давления. При постоянстве ρ_f доказана разрешимость "в целом" по времени.

Рассмотрим на Ω и $\Omega_T=\Omega\times(0,T)$ ряд функциональных пространств, придерживаясь обозначений, принятых в [3, гл. 1]. Пусть $||\cdot||_{q,\Omega}$ – норма в пространстве Лебега $L_q(\Omega)$, $q\in[1,\infty]$. Положим для краткости $||\cdot||_q=||\cdot||_{q,\Omega}$, $||\cdot||=||\cdot||_{2,\Omega}$. Также используются пространства С.Л. Соболева $W_p^l(\Omega)$, l – натуральное, $p\in[1,\infty]$, с нормой $||f||_{W_p^l(\Omega)}=\sum\limits_{m=0}^{l}||D_x^m f||_{p,\Omega}$.

Для функций, определенных на Ω_T, нам потребуются пространство $L_{q,r}(\Omega_T)$ с нормой $||||\cdot||_{q,\Omega}||_{r,G}$, $G=(0,T)$, $q,r\in[1,\infty]$ и пространство $L_r(0,T;W_p^l(\Omega))$ с нормой $||\cdot||_{L_r(0,T;W_p^l(\Omega))}=||||\cdot||_{W_p^l(\Omega)}||_{r,G}$.

2. Локальная разрешимость. При исследовании системы (1)–(4) используются переменные Лагранжа [4, с. 47]. Пусть $y=y(\zeta,x,t)$ – решение задачи Коши: $\frac{\partial y}{\partial\zeta}=v_s(y,\zeta)$, $y|_{\zeta=t}=x\in[0,H]$. Положим $\xi=y(\zeta,x,t)|_{\zeta=0}$ и возьмем за новые переменные ξ и t. Тогда $(1-\phi)(\xi,t)=(1-\phi^0)(\xi)J(\xi,t)$, где $J(\xi,t)=\frac{\partial\xi}{\partial x}$ – якобиан перехода. Переходя от (ξ,t) к массовым лагранжевым переменным $(\bar{x},t)$ по правилу $(1-\phi^0)(\xi)d\xi=d\bar{x}$, $\bar{x}(\xi)=\int\limits_0^\xi(1-\phi^0)(\eta)d\eta\in[0,1]$ и сохраняя затем для переменной $\bar{x}$ обозначение x, система уравнений (1)–(4) в новых переменных примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_f\frac{\phi}{1-\phi})+\frac{\partial}{\partial x}(\rho_f\phi(v_f-v_s))=0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t}+(1-\phi)^2\frac{\partial v_s}{\partial x}=0, \tag{6}$$

$$\phi(v_s-v_f)=k(\phi)((1-\phi)\frac{\partial p_f}{\partial x}+\rho_f g), \tag{7}$$

$$(1-\phi)\frac{\partial v_s}{\partial x}=-a_1(\phi)p_e-a_2(\phi)\frac{\partial p_e}{\partial t},\qquad p_e=(1-\phi)(p_s-p_f), \tag{8}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-98002 –р_сибирь_а) и при поддержке ведомственно-аналитической программы "Развитие научного потенциала Высшей школы 2009-2010" (проект №2.2.2.4/4278.)

$$\phi p_f + (1-\phi)p_s = p_{tot}. \quad (9)$$

В уравнении (5) заменим $\phi(v_f - v_s)$ из закона Дарси (7), а в уравнении (8) заменим $\frac{\partial v_s}{\partial x}$ из уравнения неразрывности (6). Учитывая (9), приходим к следующей системе уравнений относительно неизвестных ρ_f и ϕ:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{1-\phi}\rho_f\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_f k(\phi)\left((1-\phi)\frac{\partial p_f}{\partial x} + \rho_f g\right)\right),$$

$$p_f = p(\rho_f), \quad (10)$$

$$\frac{1}{(1-\phi)}\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} = a_1(\phi)p_e + a_2(\phi)\frac{\partial p_e}{\partial t}, \quad (11)$$

$$p_e = p_{tot} - p_f.$$

Здесь $k(\phi) = \frac{k_0}{\mu}\phi^n$, $p_f = A\rho_f$, k_0, μ, A – положительные постоянные. Для системы (10), (11) рассмотрим условия:

$$p_f\,|_{t=0} = p^0(x), \quad \phi\,|_{t=0} = \phi^0(x). \quad (12)$$

Классическая локальная разрешимость задачи (10)–(12) при достаточно гладких начальных данных $(p^0(x), \phi^0(x) \in W_2^l(\Omega), 0 \le \phi^0(x) < 1, l > \frac{7}{2})$ следует из результатов работы [5].

3. Случай несжимаемых сред. В случае $\rho_f = const$ рассмотрим модельную задачу (1)–(4), с условиями $a_1(\phi) = 0, \quad a_2(\phi) = const > 0, g = 0$ решаемую в области $(x,t) \in \Omega_T = \Omega \times (0,T)$, $\Omega = (0,H)$, при краевых и начальных условиях

$$v_s\,|_{x=0,x=H} = 0, \quad v_f\,|_{x=0,x=H} = 0,$$

$$v_s\,|_{t=0} = v_s^0(x), \quad v_f\,|_{t=0} = v_f^0(x), \quad (13)$$

$$\phi\,|_{t=0} = \phi^0(x), \quad p_f\,|_{t=0} = p^0(x).$$

Здесь $k(\phi) \ge 0$, при $\phi > 0$, $k(\phi) = 0$, при $\phi \le 0$, $p_f = p_0 - p_e$.

Из уравнений неразрывности (1) имеем равенство $\phi v_f + (1-\phi)v_s = 0$, и, следовательно, $v_s - v_f = \frac{v_s}{\phi}$. Вместо (1)–(4) получим следующую систему

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + \frac{\partial((1-\phi)v_s)}{\partial x} = 0, \quad v_s = k(\phi)\frac{\partial p_f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial x} = -a_2\left(\frac{\partial p_e}{\partial t} + v_s\frac{\partial p_e}{\partial t}\right).$$

В переменных Лагранжа эта система принимает вид:

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + (1-\phi)^2\frac{\partial v_s}{\partial x} = 0,$$

$$v_s = k(\phi)(1-\phi)\frac{\partial p_f}{\partial x}, \quad (14)$$

$$(1-\phi)\frac{\partial v_s}{\partial x} = -a_2\frac{\partial p_e}{\partial t}, \quad p_f = p_0 - p_e. \quad (15)$$

В рассматриваемом случае из первых уравнений (14), (15) выводим следующее представление для $p_e(x,t)$:

$$p_e(x,t) = \frac{1}{a_2}\ln\frac{1-\phi(x,t)}{1-\phi^0(x)} + p_0 + p^0(x). \quad (16)$$

Из условий (13) и закона Дарси также следует, что $k(\phi)(1-\phi)\frac{\partial p_f}{\partial x} = 0$ при $x = 0$ и $x = H$, а из (16) имеем:

$$\frac{\partial p_f}{\partial x} = \frac{1}{a_2(1-\phi)}\frac{\partial \phi}{\partial x} + G(x), \quad (17)$$

$$G(x) = -\frac{1}{a_2(1-\phi^0(x))}\frac{\partial \phi^0(x)}{\partial x} + \frac{\partial p^0(x)}{\partial x}.$$

Заменяя v_s в уравнении неразрывности из закона Дарси, а $\frac{\partial p_f}{\partial x}$ – из (17), приходим к следующей задаче для $\phi(x,t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k(\phi)}{a_2}\frac{\partial \phi}{\partial x} + k(\phi)(1-\phi)G(x)\right), \quad (18)$$

$$\left(\frac{k(\phi)}{a_2}\frac{\partial \phi}{\partial x} + k(\phi)(1-\phi)G(x)\right)\Big|_{x=0,x=H} = 0, \quad (19)$$

$$\phi\,|_{t=0} = \phi^0(x).$$

Следует отметить, что уравнение (18) вырождается на решении (k(0) = 0) [4, с. 208].

Определение 1. Ограниченную измеримую в Ω_T функцию $\phi(x,t)$ назовем обобщенным решением задачи (18), (19), если $0 \le \phi(x,t) \le 1$ почти всюду в Ω_T, $k^{1/2}(\phi)(1-\phi)^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial x} \in L_2(\Omega_T)$ и для произвольной функции $\psi(x,t) \in W_2^1(\Omega_T)$, $\psi(x,T) = 0$, $x \in \Omega$ и при почти всех $t \in [0,T]$ выполняется тождество

$$-\int_0^H \left(\frac{\phi(x,t)}{1-\phi(x,t)}\psi(x,t) - \frac{\phi^0(x)}{1-\phi^0(x)}\psi(x,0)\right)dx =$$

$$= \int_0^t\int_0^H \left(\frac{\partial \psi(x,\tau)}{\partial x}\left(\frac{k(\phi)}{a_2}\frac{\partial \phi}{\partial x} + k(\phi)(1-\phi)G(x)\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\phi(x,\tau)}{1-\phi(x,\tau)}\frac{\partial \psi(x,\tau)}{\partial \tau}\right)dx d\tau. \quad (20)$$

Пусть функции $k(\phi)$, $G(x)$ удовлетворяют условиям

$$c(\phi) = \int_0^\phi (1-\xi)k(\xi)\,d\xi \ge 0, \quad \phi \in [0,1],$$

$$\frac{\partial G(x)}{\partial x} \ge 0, \quad x \in (0,H), \quad (21)$$

$$G(0) \ge 0, \quad G(H) \le 0.$$

Теорема 1. При выполнении (21) существует по крайней мере одно обобщенное решение задачи (18), (19).

Доказательство. Положим

$$s = \frac{\phi}{1-\phi}, \quad a(s) = \frac{k(s)}{a_2(1+s)^2}, \quad b(x,s) = \frac{k(s)}{1+s}.$$

Задача (18), (19) принимает вид

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a(s)\frac{\partial s}{\partial x} + b(x,s)G(x)\right),$$

$$(a(s)\frac{\partial s}{\partial x} + b(x,s)G(x)) \mid_{x=0,x=H} = 0,$$

$$s \mid_{t=0} = \frac{\phi^0(x)}{1-\phi^0(x)}.$$

Существование обобщенного решения этой задачи (в смысле определения 1) доказывается известным способом с помощью ε-регуляризации и метода Галеркина (см.: [4, с. 222]). Поэтому установим физический принцип максимума $0 \leq \phi(x,t) \leq 1$.

В тождестве (20) сделаем замену $s = \frac{\phi}{1-\phi}$. Положим $\psi(x,t) = \frac{1}{\delta}\int\limits_{t-\delta}^{t} \bar{z}_\delta(x,\tau)\,d\tau$, $\bar{z}_\delta = \frac{1}{\delta}\int\limits_{t}^{t+\delta} \bar{z}(x,\tau)\,d\tau$, $\bar{z}(x,t) = max\{z(x,t),0\}$, $z(x,t) = -s(x,t)$. После предельного перехода при $\delta \to 0$ получим

$$\frac{1}{2}||\bar{z}(t)||^2 + \int\limits_0^t\int\limits_0^H a(s)\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}dxd\tau =$$

$$= \int\limits_0^t\int\limits_0^H G(x)b(\bar{z})\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}dxd\tau =$$

$$= \int\limits_0^t (G(H)c(\bar{z}(H,\tau)) - G(0)c(\bar{z}(0,\tau)))d\tau -$$

$$- \int\limits_0^t\int\limits_0^H c(\bar{z})\frac{\partial G(x)}{\partial x}dxd\tau.$$

С учетом (21) получаем, что $||\bar{z}(t)||^2 \leq 0$. Откуда следует, что $\bar{z} = 0$ почти всюду в Ω. Следовательно, $s \geq 0$, а значит $0 \leq \phi \leq 1$.

Библиографический список

1. Connolly, J.A.D. Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock / J.A.D. Connolly, Yu. Yu. Podladchikov // Geodinamica Acta. – 1998. – Vol. 11, №2–3.

2. Gard, S.K. Dynamics of gas-fluidized beds / S.K. Gard, J.W. Pritchett // Journal of Applied Physics. – 1975. – Vol. 46, №10.

3. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. – М., 1967.

4. Антонцев, С.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей / С.Н. Антонцев, А.В. Кажихов, В.Н. Монахов. – Новосибирск, 1983.

5. Вольперт, А.И. О задаче Коши для составных систем нелинейных дифференциальных уравнений / А.И. Вольперт, С.И. Худяев // Мат. сб. – 1972. – Т. 87, №4.