УДК 517.765 + 519.24

С.В. Дронов

Об одном пополнении класса событий в AST

Ключевые слова: альтернативная теория множеств, сегменты, вероятность, полная мера.
Key words: alternative set theory, cuts, probability, full measure.

Данная работа выполнена в аксиоматике альтернативной теории множеств (AST), основы которой изложены в [1] и является продолжением [2]. Через **FN** мы, как обычно, обозначаем класс конечных натуральных чисел. Пусть $\beta \notin \mathbf{FN}$ – натуральное число, x – множество. Обозначая —.— число элементов, предположим, что $|x| = \beta$. Рассмотрим аддитивный сегмент (начальный отрезок) A класса натуральных чисел такой, что $\mathbf{FN} \subset A \subset \beta$. Поскольку аддитивный сегмент является последовательным, то по теореме 1 в [3] любую теоретико-множественно определимую последовательность $y_s,\ s \in A$ можно продолжить до некоторого $\alpha \notin A$, причем для всех элементов продолжения будет выполнено любое заранее заданное теоретико-множественное свойство. Понятие предела по сегменту также вводится и обсуждается в [3]. Гипердействительную структуру, являющуюся фактор-классом рациональных чисел по отношению A-отождествления, как и в предыдущих работах, обозначим ${}^*_A\mathbf{R}$.

Сейчас мы построим некоторое семейство $\mathcal{U}(A)$ подклассов x, действуя по индукции почти так же, как это было сделано в [2]. В семейство $\mathcal{U}_0$ отнесем все подмножества x. Если семейство $\mathcal{U}_k$ уже построено, то в $\mathcal{U}_{k+1}$ отнесем те и только те подклассы $B \subset x$, для которых может быть найдена монотонная по включению цепочка порождающих классов $B_s,\ s \in A$ из $\mathcal{U}_k$: если эта цепочка возрастает, то должно выполняться $B = \cup\{B_s,\ s \in A\}$, если же убывает, то $B = \cap\{B_s,\ s \in A\}$. Наконец, положим

$$\mathcal{U}(A) \ = \ \cup\{\mathcal{U}_s,\ s \in A\}.$$

На тех классах построенного семейства, где возможно, определим вероятность, также используя индукцию. Для элементов $u \in \mathcal{U}_0$ (множеств) положим $\mathbf{P}_A(u) = \mathbf{P}(u) = |u|/\beta$ (здесь подчеркнуто, что приводимое определение совпадает с ранее данным в [2]). Если вероятность определена на семействах с меньшими номерами, и $B \in \mathcal{U}_{k+1}$, то пусть

$$\mathbf{P}_A(B) \ = \ \lim_{s\in A} \mathbf{P}_A(B_s),$$

где $B_s,\ s \in A$ – цепочка порождающих B из $\mathcal{U}_k$, если только выписанный предел определен. Понятно, что в силу схожести конструкции с той, которая предложена в предыдущей работе, многие свойства этой вероятности могут быть проверены схожим образом. Более того, если $A = \mathbf{FN}$, то в обозначениях [2] $\mathcal{U}(A) = \mathcal{U},\ \mathbf{P}_A = \mathbf{P}$. Особо отметим, что свойства вероятностей $\mathbf{P}_A(u)$ множеств u не нуждаются ни в каком обосновании.

В настоящей работе предлагается подход, позволяющий определить вероятности на семействе подклассов x, в некотором смысле более широком, нежели $\mathcal{U}(A)$. В основе этого подхода лежит усовершенствованный вариант теоремы 1 предыдущей работы.

Пусть $B \subset x$. Теоретико-множественно определимые цепочки множеств $u_\gamma,\ v_\gamma,\ \gamma \in A$ будем называть нижней и верхней аппроксимирующей цепочкой для B, если первая из них возрастает, вторая убывает по включению,

$$(\forall\, \gamma \in A)\ u_\gamma \subset B \subset v_\gamma \subset x,$$

и дополнительно определен предел

$$\lim_{\gamma\in A} (\mathbf{P}(v_\gamma) - \mathbf{P}(u_\gamma)) \ = \ 0. \qquad (1)$$

Предположим, что $u_\gamma,\ v_\gamma,\ \gamma \in A$ цепочки множеств, обладающие теми же свойствами монотонности, что нижняя и верхняя аппроксимирующая цепочки некоторого подкласса B множества x, справедливо (1) и дополнительно $(\forall \gamma \in A)\ u_\gamma \subset v_\gamma$. Тогда при условии

$$\cup\{u_\gamma,\ \gamma \in A\} \subset B \subset \cap\{v_\gamma,\ \gamma \in A\}$$

мы будем говорить, что подкласс B лежит в A-зазоре, определяемом рассматриваемыми цепочками множеств. Полезным здесь оказывается следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть A – аддитивный сегмент, $x_s,\ y_s,\ s \in A$ – теоретико-множественно определимые числовые монотонные последовательности, первая из которых возрастает, а вторая убывает и $(\forall\, s,t)\ x_s < y_t$. Если*

$$\lim_{s\in A} (y_s - x_s) \ = \ 0,$$

то в ${}^*_A\mathbf{R}$ существует общее значение пределов $\lim_{s\in A} x_s,\ \lim_{s\in A} y_s$.

Доказательство. Для произвольного $k \in A$, например,

$$|x_m - x_s| \le |y_s - x_s| < \frac{1}{k}$$

при достаточно больших s и $m > s$, что в терминологии [4] означает фундаментальность последовательности $x_s,\ s \in A$. Поскольку в теореме 1 цитированной работы показано, что для аддитивных сегментов наличие фундаментальности последовательности необходимо и достаточно для существования ее предела, то оба предела x, y здесь существуют. Для доказательства их равенства достаточно заметить, что при произвольном $s \in A$ и достаточно больших k имеет место

$$|x - y| \le |x - x_k| + |x_k - y_k| + |y_k - y| \le \frac{1}{s}\,,$$

что означает A-тождественность x и y, а следовательно, их совпадение как элементов ${}^*_A\mathbf{R}$.

Полагая в лемме $x_s = \mathbf{P}(u_s),\ y_s = \mathbf{P}(v_s)$, мы получаем возможность дать следующее определение: если подкласс B лежит в A-зазоре, определяемом цепочками множеств $u_\gamma,\ v_\gamma,\ \gamma \in A$, то введем для него

$$\mathbf{P}_A(B) \ = \ \lim_{\gamma \in A} \mathbf{P}(u_\gamma).$$

Лемма 2 (корректность). *Значение $\mathbf{P}_A(B)$ не зависит от вида цепочек множеств, определяющих соответствующий A-зазор.*

Доказательство. Пусть $\lim_{\gamma\in A} \mathbf{P}(u_\gamma) = \lim_{\gamma\in A} \mathbf{P}(v_\gamma) = q$, а $u'_s, v'_s,\ s \in A$ – другие цепочки множеств, определяющие A-зазор, в котором лежит подкласс B. Тогда из леммы 1 следует существование числа

$$p = \lim_{\gamma\in A} \mathbf{P}(u'_\gamma) = \lim_{\gamma\in A} \mathbf{P}(v'_\gamma).$$

Поскольку $u'_\gamma \subset B \subset v_s$ для произвольной пары $s, \gamma \in A$, то $\mathbf{P}\left(u'_\gamma\right) \le \mathbf{P}(v_s)$ и в силу свойств предела $p \le q$. Обратное неравенство следует из включения $u_s \subset B \subset v'_\gamma$, также справедливого для произвольных $s, \gamma \in A$. Лемма доказана.

Для дальнейшего нам будут нужны еще две леммы.

Лемма 3. *Пусть подклассы B, C лежат в одном A-зазоре. Тогда $B \cap C$ лежит в том же A-зазоре и $\mathbf{P}_A(B \cap C) = \mathbf{P}_A(B)$.*

Доказательство. Пусть зазор определяется цепочками множеств $u_s,\ v_s,\ s \in A$. Тогда, очевидно $u_s \subset B, \quad u_s \subset C$, а следовательно,

$$(\forall s \in A)\ u_s \subset B \cap C \subset C \subset v_s,$$

откуда немедленно следует утверждение леммы.

Лемма 4. *Пусть определены $\mathbf{P}_A(B), \mathbf{P}_A(C)$. Тогда определено и $\mathbf{P}_A(B \cap C)$.*

Доказательство. Используем цепочки множеств $u_s^B, v_s^B, u_s^C, v_s^C,\ s \in A$, которыми определяются соответствующие A-зазоры. При этом $u_s^B \cap u_s^C \ \subset\ B \cap C \ \subset\ v_s^B \cap v_s^C$. Понятно, что $u_s^B \cap u_s^C\ \ s \in A$ – монотонно возрастающая по включению последовательность, а $v_s^B \cap v_s^C$ является монотонно убывающей цепочкой множеств. Используя свойства вероятностей для множеств, заметим далее, что

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(v_s^B \cap v_s^C) - \mathbf{P}(u_s^B \cap u_s^C) = \\ =\ &\mathbf{P}(v_s^B \cap (v_s^C \setminus u_s^C)) + \mathbf{P}(u_s^C \cap (v_s^B \setminus u_s^B)) \le \\ \le\ &\mathbf{P}(v_s^C \setminus u_s^C) + \mathbf{P}(v_s^B \setminus u_s^B). \end{aligned}$$

В силу определения A-зазора при произвольном $\gamma \in A$ и достаточно больших s

$$\mathbf{P}(v_s^C \setminus u_s^C) = \mathbf{P}(v_s^C) - \mathbf{P}(u_s^C)\ \le \frac{1}{2\gamma}$$

и аналогичное неравенство имеет место для $\mathbf{P}(v_s^B \setminus u_s^B)$. Отсюда следует, что

$$\mathbf{P}(v_s^B \cap v_s^C) - \mathbf{P}(u_s^B \cap u_s^C) \le \frac{1}{\gamma}.$$

Итак, мы доказали, что попарные пересечения нижней и верхней аппроксимирующих цепочек A-зазоров, содержащих классы B и C, образует новый зазор, содержащий пересечение этих классов. Лемма доказана.

Теорема 1. *Подклассы B, C лежат в одном A-зазоре тогда и только тогда, когда хотя бы одно из $\mathbf{P}_A(B)$, $\mathbf{P}_A(C)$ определено и найдется такой класс E, что $\mathbf{P}_A(E) = 0$, и для симметрической разности классов B и C справедливо включение $B \Delta C \subset E$.*

Доказательство. Сначала необходимость. Если классы B, C лежат в одном A-зазоре, то определены обе требуемые вероятности. Обозначим соответствующие аппроксимирующие цепочки множеств через $u_s^B, v_s^B, u_s^C, v_s^C,\ \ s \in A$. Понятно, что в нашем случае верхние и нижние аппроксимирующие цепочки для B и C могут быть выбраны одинаковыми, но мы этого делать не будем. Выберем

$$\begin{aligned} u_s^{B\Delta C} \ &= \ (u_s^B \setminus v_s^C) \cup (u_s^C \setminus v_s^B), \\ v_s^{B\Delta C} \ &= \ (v_s^B \setminus u_s^C) \cup (v_s^C \setminus u_s^B), \quad s \in A. \end{aligned} \tag{2}$$

Лемма 5. *Если $\mathbf{P}_A(B), \mathbf{P}_A(C)$ определены, то справедливо*

$$\lim_{s\in A} \mathbf{P}(u_s^B \cap v_s^C) = \lim_{s\in A} \mathbf{P}(u_s^C \cap v_s^B) = \mathbf{P}_A(B \cap C).$$

Доказательство. Например,

$$\mathbf{P}(u_s^B \cap v_s^C) = \mathbf{P}(u_s^B \cap u_s^C) + \mathbf{P}(u_s^B \cap (v_s^C \setminus u_s^C)).$$

При этом для произвольного $k \in A$ и достаточно больших s, как это было показано при доказательстве леммы 4,

$$\mathbf{P}(u_s^B \cap v_s^C) \ge \mathbf{P}(u_s^B \cap u_s^C) \ge \mathbf{P}_A(B \cap C) - \frac{1}{k}\,.$$

С другой стороны,

$$\mathbf{P}(u_s^B \cap v_s^C) \le \mathbf{P}(u_s^B \cap u_s^C) + \mathbf{P}(v_s^C) - \mathbf{P}(u_s^C)$$

и при достаточно больших $s \in A$

$$\mathbf{P}(u_s^B \cap u_s^C) \le \mathbf{P}_A(B \cap C) + \frac{1}{2k},$$

а также

$$\mathbf{P}(v_s^C) - \mathbf{P}(u_s^C) \le \frac{1}{2k}.$$

Подводя итог приведенным выкладкам, получаем, что при произвольном $k \in A$ и достаточно больших s

$$\left|\mathbf{P}(u_s^B \cap v_s^C) - \mathbf{P}_A(B \cap C)\right| \le \frac{1}{k}.$$

Отметив, что для $\mathbf{P}(u_s^C \cap v_s^B)$ рассуждения совершенно аналогичны, завершаем доказательство леммы.

Из формул (2) и лемм 4, 5 получаем, что

$$\mathbf{P}(u_s^{B\Delta C}) = \mathbf{P}(u_s^B) - \mathbf{P}(u_s^B \cap v_s^C) + \\ + \mathbf{P}(u_s^C) - \mathbf{P}(u_s^B \cap u_s^C)$$

и имеет своим пределом выражение $\mathbf{P}_A(B) + \mathbf{P}_A(C) - 2\mathbf{P}_A(B \cap C) = 0$. Аналогичным образом $\mathbf{P}(v_s^{B\Delta C})$ имеет тот же предел. Тем самым $\mathbf{P}_A(B\Delta C)$ определено и равно нулю, что завершает доказательство необходимости (можно выбрать $E = B\Delta C$).

Для доказательства достаточности предположим, что вероятность $\mathbf{P}_A(B)$ определена, $\mathbf{P}_A(E) = 0$. Аппроксимирующие цепочки для упомянутых классов обозначим через $u_s^B, v_s^B,\ u_s^E, v_s^E,\ s \in A$. Положим

$$u_s = u_s^B \setminus v_s^E,\ v_s = v_s^B \cap v_s^E,\ s \in A.$$

Ясно, что первая из этих цепочек возрастает, а вторая убывает по включению, причем

$$u_s \subset B \cap C \subset C \subset B \cup (B\Delta C) \subset v_s.$$

Из этой же цепочки включений следует, что при любом $s \in A$ верно $u_s \subset B \subset v_s$. Осталось проверить справедливость равенства

$$\lim_{s\in A} \mathbf{P}(u_s) = \lim_{s\in A} \mathbf{P}(v_s).$$

Для этого запишем

$$\mathbf{P}(u_s) = \mathbf{P}(u_s^B) - \mathbf{P}(u_s^B \cap v^E) \ge \\ \ge \mathbf{P}(u_s^B) - \mathbf{P}(v_s^E).$$

При произвольном $k \in A$ и достаточно больших $s \in A$ имеют место неравенства

$$\mathbf{P}(u_s^B) \ge \mathbf{P}_A(B) - \frac{1}{2k}, \quad \mathbf{P}(v_s^E) \le \frac{1}{2k},$$

откуда

$$\mathbf{P}_A(B) \ge \mathbf{P}(u_s) \ge \mathbf{P}_A(B) - \frac{1}{k}.$$

Таким образом, $\lim_{s\in A} \mathbf{P}(u_s) = \mathbf{P}_A(B)$. К тому же

$$\mathbf{P}(v_s) \le \mathbf{P}(v_s^B) + \mathbf{P}(v_s^E) \le \\ \le \mathbf{P}_A(B) + \tfrac{1}{2k} + \tfrac{1}{2k} = \mathbf{P}_A(B) + \tfrac{1}{k}$$

при произвольном $k \in A$ и достаточно больших s. С другой стороны,

$$\mathbf{P}(v_s) \ge \mathbf{P}(v_s^B) \ge \mathbf{P}_A(B) - \frac{1}{k},$$

что доказывает справедливость предположения $\lim_{s\in A} \mathbf{P}(v_s) = \mathbf{P}_A(B)$, а вместе с ним и теорему.

Обозначим через $\mathcal{B}(A)$ семейство всех подклассов x, для которых $\mathbf{P}_A$ может быть определено описанным выше образом. Другими словами, $\mathcal{B}(A)$ состоит из тех классов, которые попадают в какой-нибудь A-зазор. Из свойств предела и определений вытекают следующие свойства вероятности:

1. $\emptyset,\ x \in \mathcal{B}(A)$;
2. $B, C \in \mathcal{B}(A),\ B \subset C \ \Rightarrow\ \mathbf{P}_A(B) \le \mathbf{P}_A(C)$.

Еще одно свойство немедленно получается из теоремы 1, если только мы заметим, что для цепочек $u_s, v_s,\ s \in A$, аппроксимирующих B, выполнено

$$\emptyset \subset B\Delta C = B \setminus C \subset v_s,$$

а значит $B\Delta C$ лежит в A-зазоре, определяемом цепочками $w_s, v_s,\ s \in A$, где первая из цепочек постоянна и состоит из пустых множеств. Осталось лишь записать

$$\lim_{s\in A} \mathbf{P}(w_s) = \lim_{s\in A} \mathbf{P}(v_s) = 0,$$

откуда следует, что выполнено

3. $B \in \mathcal{B}(A),\ \mathbf{P}_A(B) = 0,\ C \subset B \ \Rightarrow\ C \in \mathcal{B}(A),\ \mathbf{P}_A(C) = 0$.

Как известно, мера (или вероятность) называется полной, если любой подкласс класса нулевой меры измерим и сам имеет меру, равную нулю. Тем самым свойство 3 означает полноту $\mathbf{P}_A$, а следовательно, если мы докажем, что $\mathcal{U}(A) \subset \mathcal{B}(A)$, то второй из этих классов можно считать пополнением первого. Докажем еще одно почти очевидное свойство.

4. $B \in \mathcal{B}(A) \ \Rightarrow\ (x \setminus B) \in \mathcal{B}(A)$, причем $\mathbf{P}_A(x \setminus B) = 1 - \mathbf{P}_A(B)$.

Здесь достаточно выбрать для разности аппроксимирующие цепочки

$$u_s = x \setminus v_s^B,\ v_s = x \setminus u_s^B,\ s \in A.$$

Следующее свойство – прямое следствие леммы 4.

5. $B, C \in \mathcal{B}(A) \;\Rightarrow\; B \cap C \in \mathcal{B}(A)$.

6. $B, C \in \mathcal{B}(A) \;\Rightarrow\; B \cup C \in \mathcal{B}(A)$, причем

$$\mathbf{P}_A(B \cup C) = \mathbf{P}_A(B) + \mathbf{P}_A(C) - \mathbf{P}_A(B \cap C).$$

Доказательство. Если $u_s^B, v_s^B, u_s^C, v_s^C$ – соответствующие аппроксимирующие цепочки, то

$$u_s^B \cup u_s^C \subset B \cup C \subset v_s^B \cup v_s^C, \; s \in A.$$

При этом, как это было замечено при доказательстве леммы 4,

$$\lim_{s\in A} \mathbf{P}(u_s^B \cap u_s^C) = \lim_{s\in A} \mathbf{P}(v_s^B \cap u_s^C) = \mathbf{P}_A(B \cap C),$$

откуда $\mathbf{P}(u_s^B \cup u_s^C)$, равное $\mathbf{P}(u_s^B) + \mathbf{P}(u_s^C) - \mathbf{P}(u_s^B \cap u_s^C)$, имеет своим пределом выражение $\mathbf{P}_A(B) + \mathbf{P}_A(C) - \mathbf{P}_A(B \cap C)$. Поскольку то же можно сказать и о $\mathbf{P}(v_s^B \cup v_s^C)$, то свойство доказано.

Из свойств 5 и 6, конечно же, следует, что объединения и пересечения семейств элементов $\mathcal{B}(A)$, заиндексированных при помощи любого подмножества A, лежат в $\mathcal{B}(A)$. Для изучения непростой ситуации, когда индексный класс не является множеством, нам потребуется следующий интуитивно почти очевидный факт.

Лемма 6. *Пусть a_s, $s \in A$ – монотонная по включению цепочка подмножеств x, B есть объединение или пересечение этой цепочки в зависимости от направления ее монотонности. Тогда $B \in \mathcal{B}(A)$ тогда и только тогда, когда существует*

$$p \;=\; \lim_{s\in A} \mathbf{P}(a_s).$$

При этом $p = \mathbf{P}_A(B)$.

Доказательство ограничим случаем возрастающей цепочки, тогда $B = \cup\{a_s, \; s \in A\}$. Пусть сначала $B \in \mathcal{B}(A)$, u_s, v_s, $s \in A$ – соответствующие аппроксимирующие цепочки. Тогда

$$(\forall k \in A)(\exists s_k \in A) \; u_k \subset a_{s_k}. \tag{3}$$

Действительно, противное означало бы, что для некоторого $k \in A$ и произвольного $\delta \in A$ было бы $u_k \setminus a_\delta \neq \emptyset$, а значит, и при некотором $\alpha \notin A$ справедливо $u_k \setminus a_\alpha \neq \emptyset$. Но в силу свойств монотонности

$$a_\alpha \supset \cup\{a_s, \; s \in A\} \;=\; B,$$

что противоречит полученному соотношению, поскольку $u_k \subset B$ по построению и, следовательно, доказывает (3).

Таким образом, при произвольном $\delta \in A$ и достаточно больших $k \in A$

$$\mathbf{P}(v_k) - \mathbf{P}(a_{s_k}) \;\le\; \mathbf{P}(v_k) - \mathbf{P}(u_k) \le \frac{1}{\delta}\,,$$

откуда получается, что цепочки a_{s_k}, v_k, $k \in A$ – аппроксимирующие для B, а значит, таковыми являются и a_k, v_k, $k \in A$. Остальное следует из леммы 2.

Обратно, если предел p существует, то для любого $\delta \in A$

$$p - \frac{1}{\delta} \;\le\; \mathbf{P}(a_s) \;\le\; p,$$

когда $s \in A$ достаточно велико. Продолжим цепочку множеств до некоторого $\alpha \notin A$. Тогда можно считать, что

$$a_\alpha \supset B, \quad \mathbf{P}(a_\alpha) \le p.$$

Выберем $u_s = a_s$, $v_s = a_\alpha$, $s \in A$. Справедлива серия неравенств

$$\mathbf{P}(v_s) - \mathbf{P}(u_s) \le p - \mathbf{P}(a_s) \;\le\; \frac{1}{\delta}\,.$$

Тем самым построены аппроксимирующие цепочки для B, и лемма доказана.

Отметим, что при доказательстве необходимости теоремы 4 в [4] был построен пример монотонной ограниченной последовательности в ${}^*_A\mathbf{R}$, не имеющей предела даже в случае, когда сегмент A аддитивен (но, например, не мультипликативен). Основываясь на этом примере, нетрудно для такого сегмента построить монотонно возрастающую цепочку a_s, $s \in A$ подмножеств x, для которых не существует $\lim_{s\in A} \mathbf{P}(a_s)$, а значит, на основании леммы 6, $\cup\{a_s, \, s \in A\} \notin \mathcal{B}(A)$. Из этой же леммы следует, что такие объединения всегда попадают в $\mathcal{B}(A)$, если A – парафундаментальный сегмент, а это означает наличие предела у любой монотонной ограниченной последовательности в ${}^*_A\mathbf{R}$ (термин введен в [4]). Без каких-либо изменений рассуждение переносится на пересечения монотонно убывающих цепочек.

Теорема 2. *$\mathcal{U}(A) \subset \mathcal{B}(A)$ в том и только том случае, когда сегмент A парафундаментален.*

Доказательство. Нужно проверить лишь достаточность. Возьмем $B \in \mathcal{U}(A)$ и будем рассуждать индукцией по тому s, для которого $B \in \mathcal{U}_s$. Для $s = 0, 1$ утверждение уже доказано. Пусть $B = \cup\{B_k, \; k \in A\}$, где для всех k $B_k \in \mathcal{U}_s$, и эти классы монотонно возрастают по включению. Тогда для произвольной пары чисел $s, k \in A$ могут быть построены такие множества $u_s^k \subset B_k \subset v_s^k$, что

$$\mathbf{P}\left(v_s^k\right) - \mathbf{P}\left(u_s^k\right) < \frac{1}{5s}. \tag{4}$$

Уже доказано, что

$$U_s = \cup\{u_s^k,\, k \in A\}, \quad V_s = \cup\{v_s^k,\, k \in A\}$$

лежат в $\mathcal{B}(A)$, и

$$p_s = \mathbf{P}_A(U_s) = \lim\nolimits_{k\in A} \mathbf{P}\left(u_s^k\right),$$
$$q_s = \mathbf{P}_A(V_s) = \lim\nolimits_{k\in A} \mathbf{P}\left(v_s^k\right).$$

Поэтому при достаточно больших $k \in A$ справедливо

$$|p_s - \mathbf{P}\left(u_s^k\right)| < \frac{1}{5s},\ |q_s - \mathbf{P}\left(v_s^k\right)| < \frac{1}{5s}. \tag{5}$$

Из (4–5) получаем, что для произвольного s

$$|p_s - q_s| < \frac{3}{5s}. \tag{6}$$

С другой стороны, по определению $\mathcal{B}(A)$, найдутся множества

$$a_s \subset U_s \subset V_s \subset b_s,\ s \in A$$

такие, что

$$|p_s - \mathbf{P}(a_s)| < \frac{1}{5s},\ |q_s - \mathbf{P}(b_s)| < \frac{1}{5s}.$$

Из этих неравенств и (6) получается, что вероятности множеств a_s и b_s отличаются лишь на величину $\frac{1}{s}$. Осталось лишь заметить, что построенные

$$a_s \subset B \subset b_s,\ s \in A \tag{7}$$

можно считать монотонными по включению, поскольку при их замене на большее и, соответственно, меньшее множества

$$\cup\{a_t,\, t \le s\}, \quad \cap\{b_t,\, t \le s\}$$

вероятности лишь сближаются, а (7) не нарушается. Итак, для $B \in \mathcal{U}_{s+1}$ построены аппроксимирующие цепочки. Случай монотонного пересечения обосновывается, например, путем перехода к дополнениям и привлечения свойства 4. Теорема доказана.

Из только что доказанного утверждения и теоремы 4 в [4] получаем

Следствие 1. *Объединение (пересечение) произвольной цепочки классов* $\{B_k,\ k \in A\} \subset \mathcal{B}(A)$ *содержится в* $\mathcal{B}(A)$ *в том и только том случае, когда сегмент* A *замкнут относительно произвольной возрастающей теоретико-множественно определимой функции, действующей из* $\mathbf{N}$ *в* $\mathbf{N}$.

В частности, если сегмент A не является, например, мультипликативным, то существуют такие цепочки упомянутого вида, что их объединение не лежит в $\mathcal{B}(A)$.

Следствие 2. $\mathcal{B}(A)$ *является пополнением* $\mathcal{U}(A)$ *тогда и только тогда, когда сегмент* A *парафундаментален.*

Более того, оказывается, что даже и счетные цепочки могут в объединении не попадать в $\mathcal{B}(A)$. Имеет место следующий результат

Теорема 3. $\mathcal{B}(A)$ *содержит объединения всех цепочек* $\{B_k,\ k \in \mathbf{FN}\}$, *где каждый из классов* B_k *есть элемент* $\mathcal{B}(A)$, *тогда и только тогда, когда* A *–* σ*-сегмент.*

Этот факт можно доказать, привлекая лемму 6 и замечание 4 из [4]. В заключение приведем формулировку, позволяющую увидеть еще один аспект проблемы счетных объединений.

Теорема 4. *Для произвольной монотонной по включению цепочки множеств* $\{b_k,\ k \in \mathbf{FN}\} \subset x$ *существует такое подмножество* $a \subset x$, *для которого*

$$\mathbf{P}(a) = \lim_{k\in\mathbf{FN}} \mathbf{P}(b_k).$$

Заметим, что из результатов [2] следует, что предел в правой части последнего равенства всегда существует и равен вероятности объединения (или пересечения) цепочки множеств в $\mathcal{U}$. Тем самым теорема 4 позволяет рассматривать $\mathcal{B}(A)$ как пополнение $\mathcal{U}$, по крайней мере, с точностью до A-отождествлений.

Библиографический список

1. Вопенка, П. Альтернативная теория множеств. Новый взгляд на бесконечность / П. Вопенка. – Новосибирск, 2004.
2. Дронов, С.В. Один подход к определению вероятностной меры в AST / С.В. Дронов // Известия АлтГУ. – 2004. – №1.
3. Дронов, С.В. О четких продолжениях последовательностей / С.В. Дронов // Известия АлтГУ. – 1999. – №1.
4. Дронов, С.В. О свойстве фундаментальности сегментов класса натуральных чисел / С.В. Дронов // Известия АлтГУ. – 2009. – №1.