

О.Н. Гончарова, Ю.Е. Южкова

Моделирование конвективного течения в наклонном слое с движущимися границами

Ключевые слова: конвекция, точное решение, наклонный слой, движущаяся граница, источник тепла.

Key words: convection, exact solution, inclined layer, moving boundary, heat source.

1. Введение. Моделирование конвективных течений представляет собой комплекс задач и проблем, возникающих как при прогнозировании природных явлений, так и при исследовании различных технологических процессов. Изучение конвективных течений жидкостей и газов, заполняющих бесконечные слои с твердыми либо свободными границами, продолжает оставаться актуальной задачей [1]. Различные аспекты конвективных движений жидкости в плоском слое исследовались аналитически и численно многими авторами (см. [1–5]). В [2] построено решение задачи в плоском горизонтальном слое с твердыми, непроницаемыми, неподвижными границами, на которых задан постоянный горизонтальный (продольный) градиент температуры. Конвективное движение характеризуется кубической зависимостью продольной компоненты скорости от поперечной координаты. При этом температура жидкости линейно зависит от продольной координаты и имеет составляющую, полиномиально зависящую от поперечной координаты (полином 5-й степени). Интенсивность гравитационной конвекции существенно зависит от угла, определяющего ориентацию градиента температуры относительно вектора ускорения силы тяжести [3–5]. Наиболее интенсивное конвективное движение возникает в вертикальном слое [3, 5]. Конвективное течение жидкости в плоском бесконечном вертикальном слое изучается в [3, 5] для случая твердых, непроницаемых, согласованно движущихся границ, на которых поддерживается постоянная разность температур. Возникающее стационарное течение характеризуется линейным распределением температуры относительно поперечной координаты и кубическим профилем скорости. В [5] рассматривается решение для наклонного слоя с твердыми, непроницаемыми, неподвижными границами, на которых поддерживается одинаковая температура, в случае, когда по объему жидкости однородно распределены внутренние источники тепла. Свободная конвекция в замкнутых объемах

исследуется численно в [6], при этом используются точные решения для бесконечных слоев и решения, полученные в приближении ползущего течения. Устойчивость конвективных и термодиффузионных течений в наклонных слоях изучается в [1, 3, 5, 7].

В настоящей работе рассматривается задача конвекции жидкости в наклонном слое с твердыми, непроницаемыми, движущимися границами. Конвективное движение жидкости в поле силы тяжести описывается системой уравнений Обербека-Буссинеска [1–3]. Строится точное решение двумерной стационарной задачи. Данное решение является обобщением известного решения Бириха о конвекции жидкости в горизонтальном слое [2].

Цель работы – построение точного решения системы дифференциальных уравнений, описывающих движение жидкости, моделирование продольных и поперечных градиентов температуры, выявление особенностей взаимодействия различных механизмов конвекции в гравитационном поле различной интенсивности. При изучении конвекции в слое с движущимися границами при наличии внутренних источников тепла, распределенных однородно либо неоднородно, исследуется взаимодействие гравитационной конвекции и эффектов сдвиговых течений Куэтта, а также влияние величины угла наклона слоя на характер течения.

2. Постановка задачи. Пусть жидкость заполняет бесконечный, наклонный слой с твердыми, непроницаемыми, движущимися границами, нагретыми до разной температуры, а также при наличии продольного температурного градиента \tilde{A} (см. рис. 1).

Система уравнений Навье-Стокса в приближении Обербека-Буссинеска в плоском случае может быть представлена в виде [1–3]:

$$\vec{v}_t + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} - \vec{g} \beta T, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (2)$$

Уравнение переноса тепла при наличии внутреннего тепловыделения имеет вид [3]:

$$T_t + \vec{v} \nabla T = \chi \Delta T + \frac{Q}{\rho c_p}. \quad (3)$$

Здесь $\vec{v} = (u, v)$ – вектор скорости; p – давление (отклонение от гидростатического давления); T – температура; $\vec{g}\beta T$ – сила плавучести; $\vec{g} = (g_1, g_2)$ – ускорение силы тяжести; β – коэффициент теплового расширения; ν – коэффициент кинематической вязкости; χ – коэффициент температуропроводности; Q – количество тепла, выделяемого внутренними источниками в единице объема жидкости за единицу времени; ρ – некоторое относительное значение плотности жидкости; c_p – теплоемкость при постоянном давлении.

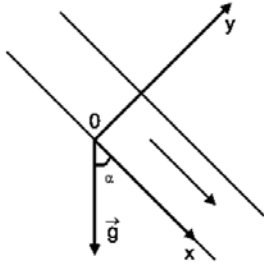


Рис. 1. Геометрия области течения

Выберем систему координат таким образом, что $g_1 = g \cos \alpha$, $g_2 = -g \sin \alpha$. Запишем систему уравнений (1)–(3) в стационарном случае в безразмерной форме, оставив за искомыми функциями прежние обозначения:

$$u \cdot u_x + v \cdot u_y = -p_x + \frac{1}{Re} \Delta u - \frac{Ra}{Re^2 Pr} T \cos \alpha; \quad (4)$$

$$u \cdot v_x + v \cdot v_y = -p_y + \frac{1}{Re} \Delta v + \frac{Ra}{Re^2 Pr} T \sin \alpha; \quad (5)$$

$$u_x + v_y = 0; \quad (6)$$

$$u \cdot T_x + v \cdot T_y = \frac{1}{Re Pr} \Delta T + q. \quad (7)$$

Здесь $Re = \frac{u_* l}{\nu}$ – число Рейнольдса; $Ra = \frac{l^3 g T_* \beta}{\nu \chi}$ – число Рэлея; $Pr = \frac{\nu}{\chi}$ – число Прандтля; q – источниковый член. Звездочкой обозначены некоторые характерные величины скорости (u_*), температуры (T_*); l – характерный размер области течения, например, ширина слоя, $g = |\vec{g}|$. Пусть $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Заметим, что источниковый член q в безразмерном виде (см. (7))

введен без обсуждения характерной величины мощности тепловыделения; безразмерный анализ не проводится, а основное внимание будет уделено возможной зависимости q от поперечной координаты y .

В качестве граничных условий на движущихся, непроницаемых границах рассмотрим условия прилипания для скорости

$$u|_{y=0} = u_0, u|_{y=1} = u_1, v|_{y=0} = 0, \quad v|_{y=1} = 0. \quad (8)$$

Будем считать, что на границах слоя задано линейное распределение температуры. При переходе к безразмерным величинам граничные условия для температуры примут вид:

$$T|_{y=0} = Ax + \theta_0, \quad T|_{y=1} = Ax + \theta_1. \quad (9)$$

Здесь $A = \frac{\tilde{A}l}{T_*}$, $\theta_i = \frac{T_i}{T_*}$ ($i = 0, 1$), если в размерной форме граничные условия имеют вид

$$T|_{y=0} = \tilde{A}x + T_0, \quad T|_{y=1} = \tilde{A}x + T_1.$$

Заметим, что перепад температуры $|T_1 - T_0| = T_*$ может быть принят в качестве характерной температуры.

В качестве дополнительного условия примем условие замкнутости потока:

$$\int_0^1 u(y) dy = 0. \quad (10)$$

3. Моделирование течения жидкости в наклонном слое. Пусть решение задачи (4)–(10) имеет такой вид, когда продольная компонента скорости зависит только от поперечной координаты, а температура линейно зависит от продольной координаты и имеет составляющую $\theta(y)$ (см. [2–6]): $v = 0$, $u = u(y)$, $T = Ax + \theta(y)$, $p = p(x, y)$. Пусть источниковый член q линейно зависит от y : $q = q_1 y + q_2$.

Тогда из системы уравнений (4)–(7) следует уравнение, связывающее функции u и θ

$$u^{(IV)} = \frac{Ra}{Re Pr} \theta'' \cos \alpha, \quad (11)$$

а затем и уравнение четвертого порядка для нахождения функции u : $u^{(IV)} - Ra \cos \alpha Au = -q_1 Ra \cos \alpha y -$

$$q_2 Ra \cos \alpha. \quad (12)$$

3.1. Случай положительного продольного градиента температуры. Пусть $A > 0$. Тогда решение уравнения (12) имеет вид:

$$u = C_1 e^{\gamma y} + C_2 e^{-\gamma y} + C_3 \sin(\gamma y) + C_4 \cos(\gamma y) + \frac{q_1}{A} y + \frac{q_2}{A}, \quad (13)$$

где $\gamma^4 = RaA \cos \alpha > 0$.

Постоянные C_i находят с помощью крайних условий (8)–(10). Из условий прилипания (8) следует:

$$C_4 = u_0 - C_1 - C_2 - \frac{q_2}{A},$$

$$C_3 = C_1 \left(\gamma - \frac{e^\gamma}{\sin \gamma} \right) + C_2 \left(\gamma - \frac{e^{-\gamma}}{\sin \gamma} \right) - u_0 \gamma + \frac{q_2}{A} \gamma - \frac{1}{A \sin \gamma} (q_1 + q_2) + \frac{u_1}{\sin \gamma}. \quad (14)$$

Учитывая вид решения u , из исходной системы (4)–(7) находим составляющую температуры $\theta(y)$

$$\theta = \frac{\gamma^2 RePr}{Ra \cos \alpha} (C_1 e^{\gamma y} + C_2 e^{-\gamma y} - C_3 \sin(\gamma y) - C_4 \cos(\gamma y)) - Ay \alpha + \frac{RePr C_5}{Ra \cos \alpha}, \quad (15)$$

а затем и давление

$$p(x, y) = \frac{\gamma \alpha}{Re} (C_1 e^{\gamma y} - C_2 e^{-\gamma y} + C_3 \cos \gamma y - C_4 \sin \gamma y) + \frac{RaA \sin \alpha}{Re^2 Pr} xy - \frac{RaA \sin^2 \alpha}{2 Re^2 Pr \cos \alpha} y^2 - \frac{RaA \cos \alpha}{2 Re^2 Pr} x^2 + \frac{C_5 \alpha}{Re} y - \frac{C_5}{Re} x + C_6. \quad (16)$$

Из условий (9) для температуры и условия замкнутости потока (10) следует:

$$\theta_0 = \frac{\gamma^2 RePr}{Ra \cos \alpha} (C_1 + C_2 - C_4) + \frac{RePr C_5}{Ra \cos \alpha};$$

$$\theta_1 = \frac{\gamma^2 RePr}{Ra \cos \alpha} (C_1 e^\gamma + C_2 e^{-\gamma} - C_3 \sin \gamma - C_4 \cos \gamma) - A\alpha + \frac{RePr C_5}{Ra \cos \alpha};$$

$$C_1 (e^\gamma - 1) - C_2 (e^{-\gamma} - 1) - C_3 (\cos \gamma - 1) + C_4 \sin \gamma + \gamma \frac{q_1}{2A} + \gamma \frac{q_2}{A} = 0. \quad (17)$$

Решим систему уравнений (14), (17) относительно C_i . Введем обозначения:

$$M_1 = e^\gamma - 1 - \frac{\cos^2 \gamma}{\sin \gamma} + e^\gamma \gamma + \gamma - \frac{e^\gamma}{\sin \gamma} - \sin \gamma;$$

$$M_2 = e^{-\gamma} - 1 + \frac{\cos^2 \gamma}{\sin \gamma} - e^{-\gamma} \gamma - \gamma + \frac{e^{-\gamma}}{\sin \gamma} + \sin \gamma;$$

$$M_3 = (\cos \gamma - 1) \left(u_0 \gamma - \frac{q_2}{A} \gamma + \frac{q_1}{A \sin \gamma} + \frac{q_2}{A \sin \gamma} - \frac{u_1}{\sin \gamma} \right) + \gamma \frac{q_1}{2A} + \gamma \frac{q_2}{A} + \sin \gamma \left(u_0 - \frac{q_2}{A} \right);$$

$$N_1 = 2 \left(e^\gamma + \frac{M_1}{M_2} e^{-\gamma} - \frac{M_1}{M_2} - 1 \right);$$

$$N_2 = \frac{Ra \cos \alpha}{RePr \gamma^2} (\theta_1 - \theta_0) + \frac{RaA \sin \alpha}{RePr \gamma^2} - 2 \frac{M_3}{M_2} e^{-\gamma} - \frac{q_1}{A} + 2 \frac{M_3}{M_2} + u_1 - u_0.$$

С использованием данных обозначений получим:

$$C_1 = \frac{N_2}{N_1};$$

$$C_2 = \frac{M_1 N_2}{M_2 N_1} + \frac{M_3}{M_2};$$

$$C_3 = \frac{N_2}{N_1} \left(\gamma - \frac{e^\gamma}{\sin \gamma} + \gamma \frac{M_1}{M_2} - \frac{e^{-\gamma} M_1}{\sin \gamma M_2} \right) - \frac{e^{-\gamma} M_3}{\sin \gamma M_2} - u_0 \gamma + \frac{q_2}{A} \gamma - \frac{q_1}{A \sin \gamma} - \frac{q_2}{A \sin \gamma} + \frac{u_1}{\sin \gamma} + \frac{M_3}{M_2} \gamma;$$

$$C_4 = u_0 - \frac{N_2}{N_1} \left(1 + \frac{M_1}{M_2} \right) - \frac{M_3}{M_2} - \frac{q_2}{A};$$

$$C_5 = \frac{\theta_0 Ra \cos \alpha}{RePr} - \gamma^2 \left(2 \frac{N_2}{N_1} + 2 \frac{M_3}{M_2} - u_0 + \frac{q_2}{A} + 2 \frac{N_2 M_1}{N_1 M_2} \right); \quad (18)$$

C_6 – произвольная постоянная.

Тем самым конвективное течение жидкости в наклонном слое определяется соотношениями (13), (15), (16) с учетом (18), если $A > 0$.

3.2. Случай $A > 0$. Примеры течений. Приведем графики профилей скорости для различных параметров задачи. Пусть $Pr = 10$, $Re = 1$, что соответствует выбору жидкости типа воды, раствора этанола и характерной скорости $u_* = \nu/l$.

Пример 1. Пусть угол между вектором силы тяжести и слоем жидкости шириной $l = 1$ (см. рис. 2) равен $\alpha = \pi/3$, безразмерный

продольный градиент температуры и параметры в граничных значениях определяются соответственно как $A = 1, \theta_0 = 2, \theta_1 = 3$ (при этом $T_0 = 20, T_1 = 30$, а характерная температура равна $T^* = 10$). Тогда, если внутренние источники тепла отсутствуют ($q_1 = 0, q_2 = 0$), то профиль скорости жидкости, определяемый с помощью (13), (18), представлен на рисунке 2. Здесь $Ra = 10^5$, что соответствует условиям пониженной гравитации $g = 100$ (см/сек²), а скорости движения границ равны $u_0 = -2, u_1 = -1$ (безразмерные).

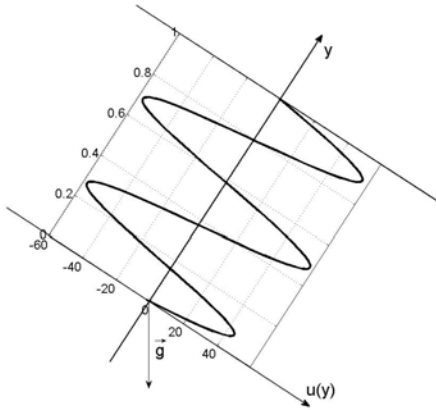


Рис. 2. $A = 1, q = 0, u_0 = -2, u_1 = -1$

тры в граничных значениях определяются соответственно как $A = 4, \theta_0 = 2, \theta_1 = 3$ (при этом $T_0 = 20, T_1 = 30$, характерная температура равна $T^* = 10$). Тогда, если внутренние источники тепла распределены в жидкости однородно ($q_1 = 0, q_2 = 5$), то профиль скорости жидкости, определяемый с помощью (13), (18), представлен на рисунке 3. Здесь $Ra = 10^5$, что соответствует условиям пониженной гравитации $g = 100$ (см/сек²), одна из границ движется, а другая неподвижна: $u_0 = 5, u_1 = 0$ (безразмерные).

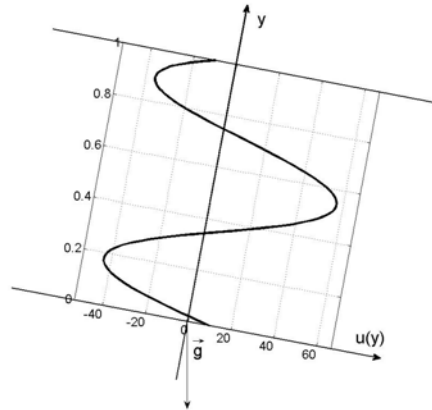


Рис. 4. $A = 3, q = 3y + 15, u_0 = 10, u_1 = -10$

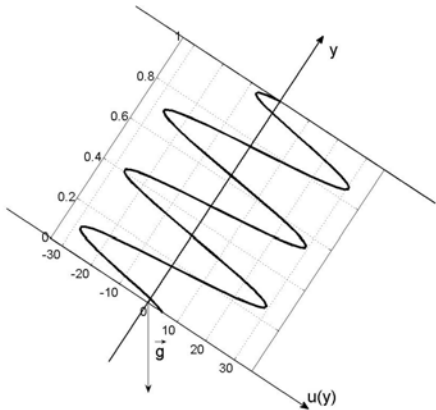


Рис. 3. $A = 4, q = 5, u_0 = 5, u_1 = 0$

Пример 2. Пусть угол между вектором силы тяжести и слоем жидкости шириной $l = 1$ (см. рис. 3) равен $\alpha = \pi/3$, безразмерный продольный градиент температуры и параме-

Пример 3. На рисунке 4 представлен профиль скорости в случае, когда $\alpha = 4\pi/9$, что позволяет сравнить характер течения, представленного на рисунках 2, 3. Безразмерный продольный градиент температуры и параметры в граничных значениях определяются следующим образом: $A = 3, \theta_0 = 20, \theta_1 = 21$. При этом размерные параметры равны $T_0 = 20, T_1 = 21$, а характерная температура в данном случае принимается равной $T^* = 1$. Если внутренние источники тепла распределены в жидкости неоднородно ($q_1 = 3, q_2 = 15$), то профиль скорости жидкости, определяемый с помощью (13), (17), представлен на рисунке 4. Здесь $Ra = 10^4$, что соответствует условиям пониженной гравитации $g = 100$ (см/сек²). Границы движутся согласованно в противоположных направлениях: $u_0 = 10, u_1 = -10$ (безразмерные).

3.3. Случай отрицательного продольного градиента температуры. Пусть $A < 0$. Тогда решение уравнения (12) имеет вид:

$$u = C_1 e^{\gamma y} \cos(\gamma y) + C_2 e^{\gamma y} \sin(\gamma y) +$$

$$C_3 e^{-\gamma y} \cos(\gamma y) + C_4 e^{-\gamma y} \sin(\gamma y) +$$

$$\frac{q_1}{A} y + \frac{q_2}{A}, \quad (19)$$

где $\gamma^4 = -\frac{1}{4} Ra A \cos \alpha > 0$.

Постоянные C_i находятся с помощью краевых условий (8)–(10). Из условий прилипания (8) следует:

$$C_3 = u_0 - C_1 - \frac{q_2}{A};$$

$$C_4 = -C_1 \gamma (e^{2\gamma} - 1) - C_2 e^{2\gamma} - \left(u_0 - \frac{q_2}{A}\right) \gamma +$$

$$\frac{e^\gamma}{\sin \gamma} \left(u_1 - \frac{q_1}{A} - \frac{q_2}{A}\right). \quad (20)$$

Составляющая температуры θ зависит от поперечной координаты следующим образом:

$$\theta = \frac{2\gamma^2 Re Pr}{Ra \cos \alpha} (-C_1 e^{\gamma y} \sin(\gamma y) + C_2 e^{\gamma y} \cos(\gamma y) + C_3 e^{-\gamma y} \sin(\gamma y) -$$

$$C_4 e^{-\gamma y} \cos(\gamma y)) - A y \alpha + C_5. \quad (21)$$

Давление определяется из уравнений (4), (5) и имеет вид:

$$p(x, y) = \frac{\gamma \alpha}{Re} (-C_1 e^{\gamma y} (\sin \gamma y - \cos \gamma y) + C_2 e^{\gamma y} (\sin \gamma y + \cos \gamma y) -$$

$$C_3 e^{-\gamma y} (\sin \gamma y - \cos \gamma y)) + \frac{Ra A \sin \alpha}{Re^2 Pr} x y - \frac{Ra A \sin^2 \alpha}{2 Re^2 Pr \cos \alpha} y^2 + \frac{C_5 Ra \sin \alpha}{Re^2 Pr} y -$$

$$\frac{Ra A \cos \alpha}{2 Re^2 Pr} x^2 - \frac{C_5 Ra \cos \alpha}{Re^2 Pr} x + C_6. \quad (22)$$

С использованием граничных условий для температуры (9) и условия замкнутости потока (10) получим три уравнения:

$$\theta_0 = \frac{2\gamma^2 Re Pr}{Ra \cos \alpha} (C_2 - C_4) + C_5; \quad (23)$$

$$\theta_1 = \frac{2\gamma^2 Re Pr}{Ra \cos \alpha} (-C_1 e^\gamma \sin \gamma +$$

$$C_2 e^\gamma \cos \gamma + C_3 e^{-\gamma} \sin \gamma -$$

$$C_4 e^{-\gamma} \cos \gamma) - A \alpha + C_5; \quad (24)$$

$$C_1 (e^\gamma \sin \gamma + e^\gamma \cos \gamma - 1) + C_2 (e^\gamma \sin \gamma - e^\gamma \cos \gamma + 1) + C_3 (e^{-\gamma} \sin \gamma - e^{-\gamma} \cos \gamma + 1) + C_4 (-e^{-\gamma} \sin \gamma - e^{-\gamma} \cos \gamma + 1) +$$

$$\gamma \frac{q_1}{A} + 2\gamma \frac{q_2}{A} = 0. \quad (25)$$

Решим систему уравнений (20), (23)–(25) относительно C_i . Введем следующие обозначения:

$$M_1 = 2 \sin \gamma \gamma + 2 \cos \gamma \gamma - 2 + 2\gamma \gamma (\sin \gamma + \cos \gamma - e^\gamma);$$

$$M_2 = (u_0 - \frac{q_2}{A}) e^{-\gamma} \sin \gamma + u_0 - u_1 + \frac{q_1}{A} + \frac{\gamma}{A} (q_1 + 2q_2) - (e^{-\gamma} \cos \gamma - 1) \left(\frac{e^\gamma}{\sin \gamma} (u_1 - \frac{q_1}{A} - \frac{q_2}{A}) - u_0 \cot \gamma + \frac{q_2}{A} \gamma\right);$$

$$M_3 = e^{2\gamma} - 2e^\gamma \sin \gamma;$$

$$N_1 = -\gamma (e^{2\gamma} - 1) - \frac{M_1}{M_3} e^{2\gamma};$$

$$N_2 = -\frac{M_2}{M_3} e^{2\gamma} + \frac{e^\gamma}{\sin \gamma} (u_1 - \frac{q_1}{A} - \frac{q_2}{A}) - u_0 \gamma + \frac{q_2}{A} \gamma;$$

$$R_1 = -2 \sin \gamma \gamma + \frac{M_1}{M_3} e^\gamma \cos \gamma - N_1 e^{-\gamma} \cos \gamma + N_1 - \frac{M_1}{M_3};$$

$$R_2 = \frac{Ra \cos \alpha}{2\gamma^2 Re Pr} (\theta_1 - \theta_0 + A \alpha) - \frac{M_2}{M_3} (e^\gamma \cos \gamma - 1) + \left(\frac{q_2}{A} - u_0\right) e^{-\gamma} \sin \gamma + N_2 (e^{-\gamma} \cos \gamma - 1).$$

Тогда в этих обозначениях имеют место следующие зависимости:

$$C_1 = \frac{R_2}{R_1};$$

$$C_2 = \frac{M_1 R_2}{M_3 R_1} + \frac{M_2}{M_3};$$

$$C_3 = u_0 - \frac{R_2}{R_1} - \frac{q_2}{A};$$

$$C_4 = N_1 \frac{R_2}{R_1} + N_2;$$

$$C_5 = \frac{2\gamma^2 Re Pr}{Ra \cos \alpha} \left(\frac{R_2}{R_1} (N_1 - \frac{M_1}{M_3}) +$$

$$N_2 - \frac{M_2}{M_3}\right) + \theta_0; \quad (26)$$

C_6 – произвольная постоянная.

Тем самым конвективное течение жидкости в наклонном слое определяется соотношениями (19), (21), (22) с учетом (26), если продольный градиент температуры отрицателен $A < 0$.

3.4. Случай $A < 0$. Примеры течений. Приведем графики, изображающие профили скоростей в случае $A < 0$. Положим $Pr = 10, Re = 1$.

Пример 4. Пусть $\alpha = 4\pi/9$, безразмерный продольный градиент температуры отрицателен $A = -3$, что соответствует бесконечному удалению нагревателя вверх по потоку. Параметры, задающие граничные значения температуры, определяются следующими значениями: $\theta_0 = 20, \theta_1 = 21$. При этом размерные параметры равны $T_0 = 20, T_1 = 21$, характерная температура принимается равной $T^* = 1$. Тогда, если внутренние источники тепла распределены однородно ($q_1 = 0, q_2 = 1$) и границы движутся в противоположных направлениях со скоростями $u_0 = -5, u_1 = 1$, то профиль скорости жидкости, определяемый с помощью (19), (26), представлен на рисунке 5. Здесь $Ra = 10^5$, что соответствует условиям нормальной гравитации $g = 1000$ (см/сек²). Данный рисунок позволяет сделать вывод о возможности изменить качественно характер течения жидкости в слое (сравните с рис. 2).

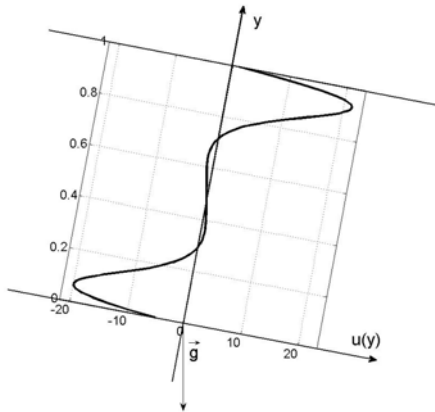


Рис. 5. $A = -3, q = 1, u_0 = -5, u_1 = 1$

Пример 5. Если $\alpha = \pi/3, A = -1$, но внутренние источники тепла распределены неоднородно ($q_1 = 5, q_2 = 0$), а твердые границы движутся в одном направлении с разной скоростью $u_0 = 10, u_1 = 5$, то движение жидкости характеризуется профилем скорости, представленным

на рисунке 6. При этом $\theta_0 = 2, \theta_1 = 3$ (размерные параметры равны $T_0 = 20, T_1 = 30$, характерная температура $-T^* = 10$). Здесь $Ra = 10^6$, что соответствует условиям нормальной гравитации $g = 1000$ (см/сек²).

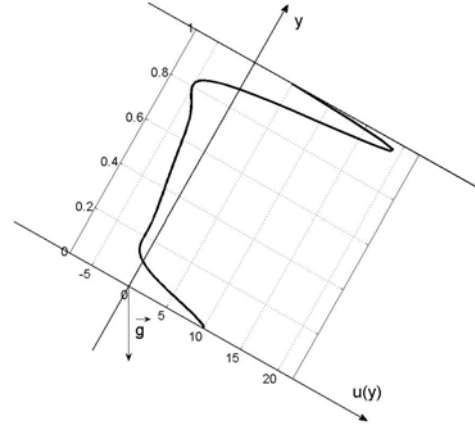


Рис. 6. $A = -1, q = 5y, u_0 = 10, u_1 = 5$

Пример 6. Рисунок 7 демонстрирует профиль скорости в случае значения угла между вектором силы тяжести и границей слоя $\alpha = 4\pi/9$ (сравните с рис. 4) при более интенсивном нагреве $A = -6$. Внутренние источники тепла распределены неоднородно ($q_1 = 20, q_2 = 10$), а твердые границы движутся в противоположных направлениях с одинаковой скоростью $u_0 = -10, u_1 = 10$. При этом, по-прежнему, $\theta_0 = 2, \theta_1 = 3$ (размерные параметры равны $T_0 = 20, T_1 = 30$, характерная температура $-T^* = 10$). Здесь $Ra = 10^5$, что соответствует условиям пониженной гравитации $g = 100$ (см/сек²).

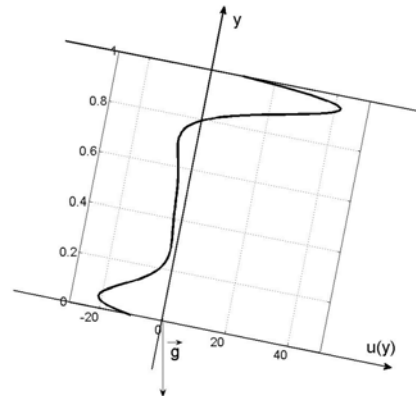


Рис. 7. $A = -6, q = 20y + 10, u_0 = -10, u_1 = 10$

4. Моделирование течения жидкости в наклонном слое при отсутствии продольного градиента температуры. Пусть, по-прежнему, дополнительным механизмом, вызывающим конвекцию, является неоднородность температуры за счет внутренних источников тепла, а твердые границы слоя поддерживаются при постоянной температуре

$$T|_{y=0} = \theta_0, T|_{y=1} = \theta_1. \quad (27)$$

Будем искать решение системы уравнений (4)–(7) в виде: $v = 0, u = u(y), T = \theta(y), p = p(x, y)$. Тогда функции $u(y)$ и $\theta(y)$ имеют вид:

$$u = -Ra q_1 \cos \alpha \frac{y^5}{120} - Ra q_2 \cos \alpha \frac{y^4}{24} + C_3 \frac{y^3}{6} + C_2 \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_0, \quad (28)$$

$$\theta = -q_1 Re Pr \frac{y^3}{6} - q_2 Re Pr \frac{y^2}{2} + C_3 \frac{Re Pr}{Ra \cos \alpha} y + C_4. \quad (29)$$

Заметим, что если внутренние источники тепла отсутствуют ($q_1 = q_2 = 0$), то u является полиномом третьей степени, а θ – полиномом первой степени (см. также [3, 5]).

Постоянные интегрирования C_i находятся с помощью краевых условий (8), (10), (27):

$$C_0 = u_0; \\ C_1 = -2u_1 - 4u_0 + \frac{(\theta_1 - \theta_0) Ra \cos \alpha}{12 Re Pr} + Ra \cos \alpha \left(\frac{2}{3 \cdot 120} q_1 + \frac{1}{120} q_2 \right);$$

$$C_2 = -Ra \cos \alpha \left(\frac{q_1}{20} + \frac{q_2}{10} \right) - \frac{(\theta_1 - \theta_0) Ra \cos \alpha}{2 Re Pr} + \frac{C_3}{6(u_1 + u_0)};$$

$$C_3 = (\theta_1 - \theta_0) \frac{Ra \cos \alpha}{Re Pr} + \frac{1}{6} q_1 Ra \cos \alpha + \frac{1}{2} q_2 Ra \cos \alpha;$$

$$C_4 = \theta_0. \quad (30)$$

Давление определим из уравнений (4), (5):

$$p(x, y) = -\frac{q_1 Ra \sin \alpha}{30 Re} y^4 - \frac{Ra q_2 \sin \alpha}{6 Re} y^3 + \frac{C_3 Ra \alpha}{2} y^2 + \frac{C_4 Ra \sin \alpha}{Re^2 Pr} y + (C_2 - C_4)x + C_6. \quad (31)$$

Здесь C_6 – произвольная постоянная.

Тем самым конвективное течение жидкости в наклонном слое определяется соотношениями (28), (29), (31) с учетом (30).

5. Заключение. Построенные точные решения уравнений Обербека-Буссинеска описывают гравитационную конвекцию жидкости, заполняющей бесконечный наклонный слой. Данные решения и проведенные расчеты позволяют изучить влияние различных сил на динамику и теплообмен в жидкости: влияние гравитационного поля различной интенсивности в случае, когда угол между вектором силы тяжести и продольным градиентом температуры жидкости либо границами слоя не равен нулю; влияние внутренних источников тепла, распределенных однородно либо неоднородно, на характер течения и теплоперенос; взаимодействие гравитационной конвекции и эффектов сдвиговых течений Куэтта; влияние величины угла наклона слоя на интенсивность течения. Построенные решения позволяют также исследовать возможность управления механизмами конвекции.

Библиографический список

1. Андреев, В.К. Современные математические модели конвекции / В.К. Андреев, Ю.А. Гапоненко, О.Н. Гончарова, В.В. Пухначев. – М., 2008.
2. Бирих, Р.В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости / Р.В. Бирих // ПМТФ. – 1966. – №3.
3. Гершуни, Г.З. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости / Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий. – М., 1972.
4. Napolitano, L.G. Plane Marangoni-Poiseuille flow of two immiscible fluids / L.G. Napolitano // Acta Astronautica. – 1980. – Vol. 2.
5. Гершуни, Г.З. Устойчивость конвективных течений / Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий, А.А. Непомнящий. – М., 1989.
6. Мызникова, Б.И. О численном моделировании свободной конвекции / Б.И. Мызни-

кова, Е.Л. Тарунин // Гидромеханика и процессы переноса в невесомости: сб. ст. – Свердловск, 1983.

7. Бекежанова, В.Б. О конвективной неустойчивости двухслойного течения жидкости на

наклонной плоскости / В.Б. Бекежанова // "Новые математические модели механики сплошных сред: построение и изучение" : тез. докл. Всерос. конф. – Новосибирск, 2009.