

О.П. Бушманова, С.Б. Бушманов,
А.В. Устюжанова

Математическое моделирование локализации пластических сдвигов в окрестности круглого отверстия*

Ключевые слова: локализация сдвигов, линии сдвига, упруго-пластический материал.

Key words: localization of shear strain, shear band, elastoplastic material.

Задачи о напряженно-деформированном состоянии упруго-пластических материалов в окрестности отверстий имеют хорошо известные решения в рамках классических моделей [1–4].

Отверстия с равномерно размещенными краевыми радиальными трещинами исследовались в монографии [5]. В работах [6, 7] представлено решение задачи о деформировании вокруг отверстия материала с блочной структурой.

На основе известных экспериментальных данных и решений в рамках классических пластических моделей [2, 3] можно сделать предположение о возникновении в окрестности круглого отверстия локализации сдвигов вдоль семейств логарифмических спиралей.

В работах [8, 9] получено численное решение задачи о деформировании материала в окрестности круглого отверстия в условиях локализации сдвигов на дискретных системах одного семейства логарифмических спиралей, пересекающих радиусы под углом $\beta = \pi/4 + \phi/2$: $\xi = \theta - \beta \ln r$ ($\phi = const$, $0 \leq \phi < \pi/2$, (r, θ) – полярные координаты).

Показано, что решения задачи с достаточно большим числом линий сдвига (порядка 100) близки к известным аналитическим решениям упруго-пластической задачи в рамках идеальной пластичности или модели с внутренним трением и сцеплением.

Представляет интерес решение задачи о напряженно-деформированном состоянии упруго-пластического материала в окрестности круглого отверстия в предположении о локализации сдвигов как на одном, так и на другом семействах логарифмических спиралей.

В рамках плоской деформации представим исследуемую область в виде кольца. Все величины в задаче будем считать безразмерными. В качестве характерного напряжения выберем модуль упругости, в качестве характерного линейного размера – радиус отверстия. Внешний радиус кольца обозначим через R .

Рассмотрим вначале решение задачи о напряженно-деформированном состоянии упруго-пластического материала в окрестности круглого отверстия в рамках континуальных моделей. На контуре отверстия примем нормальное радиальное напряжение $\sigma_r = 0$, на внешнем контуре кольца – радиальное перемещение $u_r = -u$, где $u > 0$ – параметр нагружения. Касательное напряжение $\sigma_{r\theta} = 0$ как на внутренней, так и на внешней границах. В этом случае $\sigma_{r\theta} = 0$ и во всей области.

Решение в рамках линейной теории упругости имеет вид [1]:

$$u_r = -\frac{1+\nu}{r}A[r^2(1-2\nu)-1], \quad u_\theta = 0,$$

$$\sigma_r = -A\frac{r^2-1}{r^2}, \quad \sigma_\theta = -A\frac{r^2+1}{r^2},$$

где

$$A = \frac{uR}{[(1-2\nu)R^2+1](1+\nu)}.$$

Здесь σ_θ , u_θ – нормальное напряжение и нормальное перемещение в окружном направлении.

Главные напряжения в кольце:

$$\sigma_1 = \sigma_\theta, \quad \sigma_2 = \sigma_r.$$

Предположим, что максимальное касательное напряжение $(\sigma_2 - \sigma_1)/2$ в исследуемой области не превышает предел текучести при сдвиге $\bar{\tau}$.

Увеличение параметра нагружения приводит к образованию вокруг отверстия пластической области ($1 \leq r \leq c$), в которой выполняется условие идеальной пластичности:

$$(\sigma_2 - \sigma_1)/2 = \bar{\tau}. \quad (1)$$

В этом случае упруго-пластическое решение задачи имеет следующий вид [2]:

$$\sigma_r = -2\bar{\tau} \ln r, \quad \sigma_\theta = -2\bar{\tau} \ln r - 2\bar{\tau},$$

при ($1 \leq r \leq c$) и

$$\sigma_r = -2\bar{\tau} \ln c - \bar{\tau} \frac{r^2 - c^2}{r^2}, \quad \sigma_\theta = -2\bar{\tau} \ln c - \bar{\tau} \frac{r^2 + c^2}{r^2},$$

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №08-05-00543).

при $(c \leq r \leq R)$.

Формально континуальному пластическому решению задачи соответствует бесконечно много линий скольжения. В пластической области линии скольжения имеют вид логарифмических спиралей $\theta \pm \ln r = const$, пересекающих полярный радиус под углами $\pm\pi/4$.

Радиус пластической зоны c зависит от параметра нагружения u и предела текучести $\bar{\tau}$. Уравнения равновесия и условия непрерывности напряжений на упруго-пластической границе приводят к следующему соотношению:

$$\bar{\tau}[(1 - 2\nu)(1 + 2 \ln c)R^2 + c^2](1 + \nu) = uR.$$

Будем далее считать, что, в отличие от классического упруго-пластического решения, в процессе нагружения в исследуемой области в материале возникло конечное число линий сдвига, расположенных вдоль двух семейств логарифмических спиралей $\xi = \theta \pm \ln r$, пересекающих радиусы под углом $\pm\pi/4$.

Рассмотрим краевую задачу о деформировании материала в условиях несимметричного развития линий сдвига. Учитывая достаточно малую ширину данных линий, представим их в виде разрезов.

Процесс нагружения разобьем на N шагов. Границу исследуемой области представим в виде объединения контуров кольца и k разрезов, расположенных вдоль логарифмических спиралей.

На каждом шаге для заданного приращения параметра нагружения поставим задачу определения в исследуемой области полей приращений перемещений u_i ($i = 1, 2$) и приращений напряжений σ_{ij} ($i, j = 1, 2$), которые должны удовлетворять уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0.$$

Напряжения на текущем l -м шаге нагружения определяются методом последовательных нагружений в виде суммы приращений напряжений за l шагов. Если максимальное касательное напряжение для материала между разрезами не превышает предел текучести при сдвиге, то поведение материала описывается законом Гука

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu}(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu}\delta_{ij}\varepsilon_{mm}),$$

где ε_{ij} , ($i, j = 1, 2$) – компоненты тензора приращений деформаций:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}),$$

ν – коэффициент Пуассона; по m проводится суммирование от 1 до 2.

В пластических областях должно выполняться условие

$$\sqrt{(\sigma_{11}^l - \sigma_{22}^l)^2 + 4(\sigma_{12}^l)^2} = 2\bar{\tau},$$

где σ_{ij}^l ($i, j = 1, 2$) – полные напряжения на текущем l -шаге нагружения.

Для моделирования возникновения и распространения любого количества произвольно направленных разрезов криволинейной формы с различными типами условий, обеспечивающих возможность разрывов перемещений, разработан численный алгоритм, реализующий метод конечных элементов на проблемно-ориентированных адаптивных сетках с двойными узлами [9–11].

Предлагаемый алгоритм позволяет рассматривать неупругие свойства материала, локализованные на дискретной системе линий. Разрезы, моделирующие линии локализации сдвиговых деформаций, считаются частью границы исследуемой области, а уравнения состояния в зоне локализации заменяются условиями на разрезах.

Для разбиения области сеткой треугольных конечных элементов выберем семейства логарифмических спиралей и концентрических окружностей. Существенной особенностью сетки конечных элементов является то, что все ее узлы – двойные. Вдоль определенных линий как на одном, так и на другом из семейств логарифмических спиралей могут быть расположены разрезы, на которых допускаются сильные разрывы перемещений.

Рассмотрим граничные условия на данном шаге нагружения.

На внешнем контуре кольца и на границе отверстия зададим нормальные p_n или u_n и касательные p_τ или u_τ , составляющие векторов приращений напряжений и приращений перемещений соответственно

$$p_n = \sigma_{ij}n_i n_j, \quad p_\tau = \sigma_{ij}n_i \tau_j,$$

$$u_n = u_i n_i, \quad u_\tau = u_i \tau_i,$$

где n_i , τ_i , ($i, j = 1, 2$) – направляющие косинусы нормали и касательной соответственно.

На внешнем контуре кольца

$$u_n = -u, \quad p_\tau = 0. \quad (2)$$

Отверстие будем считать свободным от напряжений. На его границе

$$p_n = 0, \quad p_\tau = 0. \quad (3)$$

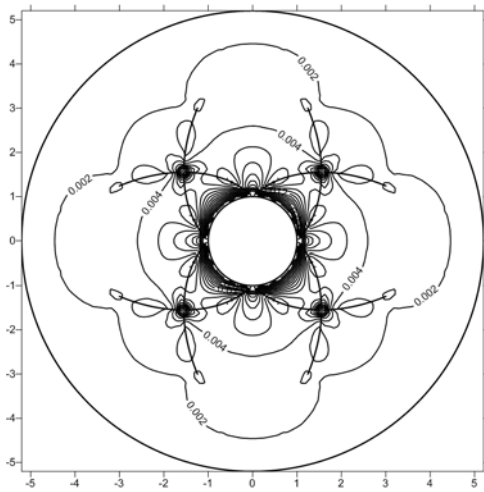


Рис. 1. Изолинии максимального касательного напряжения (8 линий сдвига)

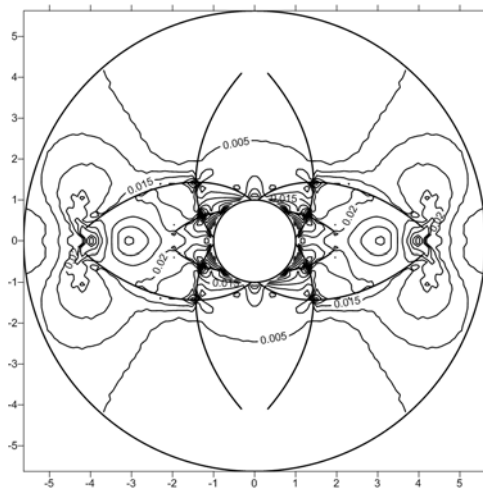


Рис. 2. Изолинии максимального касательного напряжения (12 линий сдвига)

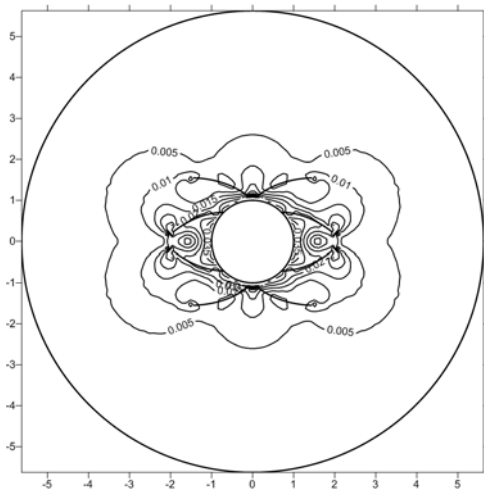


Рис. 3. Изолинии максимального касательного напряжения (8 линий сдвига)

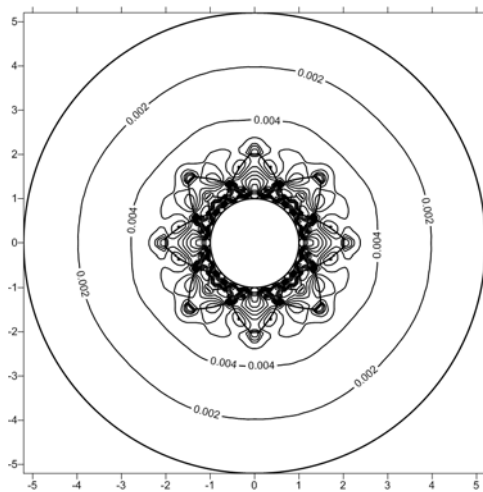


Рис. 4. Изолинии максимального касательного напряжения (16 линий сдвига)

Граничные условия, описывающие взаимодействие берегов разрывов, представим в виде функциональных зависимостей между приращениями напряжений и приращениями перемещений. Существенно отметить, что соответствующие составляющие векторов приращений напряжений и приращений перемещений, входящие в такие зависимости до решения задачи, неизвестны и определяются в ходе ее решения.

На площадке разрыва перемещений вектор приращений напряжений должен быть непрерывен

$$(p_n)^+ = (p_n)^-, \quad (p_\tau)^+ = (p_\tau)^-. \quad (4)$$

Индексы «+» и «-» соответствуют разным сторонам линии разрыва.

Нормальная составляющая вектора приращений перемещений вдоль разрывов непрерывна.

Разрывы отсутствуют, если

$$u_n^+ = u_n^-. \quad (5)$$

Предположим также, что на линиях сдвига задано условие пластичности

$$p_\tau = \bar{\tau}^l, \quad (6)$$

где $\bar{\tau}^l$ зависит от шага нагружения.

Если на определенных участках разрезов условие пластичности не выполняется, то скольжения берегов разрезов друг относительно друга на данном шаге нагружения не возникает и касательный разрыв приращений перемещений

отсутствует:

$$u_\tau^+ = u_\tau^-. \quad (7)$$

На рисунках 1–4 приведены изолинии максимального касательного напряжения для областей с различным числом линий сдвига.

При расчетах принимались следующие значения параметров: $\nu = 0.3$, $R = 5.63$, $u = 0.003$, $\bar{\tau} = 0.03$.

Результаты расчетов позволяют анализировать влияние расположения, протяженности и количества линий сдвига на напряженно-деформированное состояние в окрестности отверстия.

Библиографический список

1. Тимошенко, С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М., 1975.
2. Соколовский, В.В. Теория пластичности / В.В. Соколовский. – М., 1969.
3. Надаи, А. Пластичность и разрушение твердых тел / А. Надаи. – М., 1969. – Т. 2.
4. Савин, Г.Н. Распределение напряжений около отверстий / Г.Н. Савин. – Киев, 1968.
5. Лавриков, С.В. О деформировании блочной среды вокруг выработки / С.В. Лавриков, А.Ф. Ревуженко // ФТПРПИ. – 1990. – № 6.
6. Лавриков, С.В. Об устойчивости деформирования блочного массива вокруг выработки / С.В. Лавриков, А.Ф. Ревуженко // ФТПРПИ. – 1991. – № 1.
7. Саврук, М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М.П. Саврук. – Киев, 1981.
8. Бушманова, О.П. Напряженное состояние породного массива вокруг выработки в условиях локализации сдвигов / О.П. Бушманова, А.Ф. Ревуженко // ФТПРПИ. – 2002. – № 2.
9. Bushmanova, O.P. Numerical modeling of shear localization in elastoplastic materials / O.P. Bushmanova, A.F. Revuzhenko // Abstract book of the 11 International Conference on Fracture. – Turin, 2005.
10. Бушманова, О.П. Моделирование локализации сдвигов / О.П. Бушманова // ПМТФ. – 2003. – № 6.
11. Бушманова, О.П. Численное моделирование процесса деформирования материала в сходящемся канале в условиях возникновения линий локализации / О.П. Бушманова, С.Б. Бушманов // ФТПРПИ. – 2009. – № 4.