УДК 512.57
УДК 512.55

А.И. Будкин

Положительное решение проблемы А.И. Мальцева о неразрешимости Q-теорий

Ключевые слова: квазимногообразие, многообразие, Q-теория, разрешимость, универсальная алгебра, кольцо, кольцо Ли.

Key words: quasivariety, variety, Q-theory, solvability, universal algebra, ring, Lee ring.

Более 40 лет назад А.И. Мальцев в Коуровской тетради [1] поставил следующую проблему (вопрос 2.40): существует ли конечно аксиоматизируемое многообразие

(1) колец,

(2) ассоциативных колец,

(3) лиевых колец,

I-теория (Q-теория) которого неразрешима?

В [2] построено конечно аксиоматизируемое многообразие колец (неассоциативных), проблема равенства в свободном кольце подходящего ранга которого неразрешима. Отсюда следует неразрешимость I-теории (и, следовательно, Q-теории) этого многообразия. Таким образом, вопрос 2.40(1) имеет положительное решение.

В данной работе представлено положительное решение этой проблемы А.И. Мальцева для Q-теорий ассоциативных и лиевых колец.

Будем рассматривать универсальные алгебры фиксированной сигнатуры Ω. Вместо слов "универсальная алгебра" часто будем говорить просто "алгебра".

Формула вида

$$(\forall x_1)\dots(\forall x_n)(\bigwedge_{i=1}^{k} t_i(x_1,\dots,x_n) = t'_i(x_1,\dots,x_n) \to t(x_1,\dots,x_n) = t'(x_1,\dots,x_n)),$$

где $t_i(x_1,\dots,x_n), t'_i(x_1,\dots,x_n)$, $t(x_1,\dots,x_n)$, $t'(x_1,\dots,x_n) (i=1,\dots,k)$ – термы сигнатуры Ω в переменных $x_1,\dots,x_n$, называется квазитождеством.

Формула вида

$$(\forall x_1)\dots(\forall x_n)(t(x_1,\dots,x_n) = t'(x_1,\dots,x_n)),$$

где $t(x_1,\dots,x_n), t'(x_1,\dots,x_n)$ – термы сигнатуры Ω в переменных $x_1,\dots,x_n$, называется тождеством.

Класс $\mathcal{K}$ алгебр называется квазимногообразием (многообразием), если существует множество Σ квазитождеств (соответственно, тождеств) такое, что алгебра A принадлежит классу $\mathcal{K}$ в том и только в том случае, когда все формулы из Σ истинны в A. Несложно заметить, что всякое многообразие является квазимногообразием.

Отметим также, что всякое нетривиальное (т.е. содержащее неодноэлементную алгебру) квазимногообразие $\mathcal{K}$ содержит свободную алгебру любого ранга r, т.е. алгебру F, обладающую свойством: существует множество X мощности r порождающих алгебры F такое, что любое отображение $\varphi : X \to A$ множества X в каждую алгебру $A \in \mathcal{K}$ продолжаемо до гомоморфизма. Это множество X называют множеством свободных порождающих алгебры F. Свободную алгебру в квазимногообразии $\mathcal{K}$ с множеством свободных порождающих X будем обозначать через $F_X(\mathcal{K})$.

Q-теория класса $\mathcal{K}$ – это множество $T_Q(\mathcal{K})$ квазитождеств, истинных во всех алгебрах из класса $\mathcal{K}$.

Перейдем к понятию "определяющее соотношение". Зафиксируем нетривиальное квазимногообразие $\mathcal{K}$ алгебр. Пусть алгебра $A \in \mathcal{K}$ порождается множеством $S = \{a_i \mid i \in I\}$ элементов (I – некоторое множество индексов). Возьмем алгебру $F = F_X(\mathcal{K})$, свободную в $\mathcal{K}$ с множеством $X = \{x_i \mid i \in I\}$ свободных порождающих. По определению свободной в $\mathcal{K}$ алгебры существует гомоморфизм $\alpha : F \to A$, при котором $\alpha(x_i) = a_i (i \in I)$. Положим: $\ker\alpha = \{(t,f) \mid \alpha(t) = \alpha(f)\}$ – ядро гомоморфизма α. Для каждого терма $r(x_{i_1},\dots,x_{i_n})$ элемент $r(x_{i_1},\dots,x_{i_n})$ алгебры F будем обозначать через $\widetilde{r}$ (этот элемент называется значением терма $r(x_{i_1},\dots,x_{i_n})$ на порождающих $x_{i_1},\dots,x_{i_n}$). Возьмем произвольное множество $\{r_j = r'_j \mid j \in J\}$ равенств термов в переменных X такое, что наименьшая конгруэнция, содержащая множество пар $\{(\widetilde{r_j},\widetilde{r_j}') \mid j \in J\}$, совпадает с $\ker\alpha$. Представлением алгебры A в порождающих $\{a_i \mid i \in I\}$ в квазимногообразии $\mathcal{K}$ (относительно гомоморфизма α) называется следующее выражение:

$$A =< \{x_i \mid i \in I\}; \{r_j = r'_j \mid j \in J\} > .$$

*Работа выполнена при поддержке АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы (мероприятие 1)".

Множество $\{r_j = r'_j \mid j \in J\}$ называется множеством определяющих соотношений алгебры A в квазимногообразии $\mathcal{K}$. Алгебра называется конечно определенной в $\mathcal{K}$, если она обладает в $\mathcal{K}$ представлением с конечным множеством определяющих соотношений. Все рассматриваемые в данной работе алгебры являются конечно порожденными с конечным множеством определяющих соотношений. В этом случае представление алгебры A в соответствующем квазимногообразии $\mathcal{K}$ записывается так:

$$A =< x_1, \dots, x_n; r_1(x_1, \dots, x_n) =$$

$$= r'_1(x_1, \dots, x_n), \dots,$$

$$r_k(x_1, \dots, x_n) = r'_k(x_1, \dots, x_n) > .$$

Алгоритмические проблемы равенства и разрешимости Q-теории могут быть определены следующим образом.

Проблема равенства. Пусть конечно определенная в квазимногообразии $\mathcal{M}$ алгебра A в порождающих $a_1, \dots, a_n$ задана в $\mathcal{M}$ представлением

$$A =< x_1, \dots, x_n; r_1 = r'_1, \dots, r_k = r'_k > .$$

Проблема равенства: указать алгоритм, позволяющий для алгебры A и для любых двух термов $t(x_1, \dots, x_n)$ и $t'(x_1, \dots, x_n)$ ответить на вопрос, представляют они один и тот же элемент алгебры A в данных порождающих, т.е. верно ли в A равенство $t(a_1, \dots, a_n) = t'(a_1, \dots, a_n)$, или же доказать, что такого алгоритма не может существовать.

Если такой алгоритм существует, то говорят, что проблема равенства разрешима в алгебре A, если не существует – то она неразрешима в A.

Проблема разрешимости Q-теории: для данной Q-теории указать алгоритм, посредством которого для любого квазитождества можно было бы сказать, принадлежит оно этой Q-теории, или же доказать, что такого алгоритма не существует.

Если такого алгоритма нет, то Q-теория называется неразрешимой; иначе ее называют разрешимой.

Для Q-теории $T_Q(\mathcal{K})$ данного класса $\mathcal{K}$ ее разрешимость эквивалентна существованию алгоритма, который по любому квазитождеству говорит, истинно оно в каждой алгебре из $\mathcal{K}$ или ложно в некоторой алгебре из $\mathcal{K}$.

Нам понадобится следующая теорема.

Теорема (Дик, [3]). Пусть $\mathcal{M}$ – произвольное квазимногообразие универсальных алгебр, $A, B \in \mathcal{M}$. Предположим, что A в порождающих $\{a_i \mid i \in I\}$ имеет в $\mathcal{M}$ представление $A =< \{x_i \mid i \in I\}; \Sigma_1 >$, а B в порождающих $\{b_i \mid i \in I\}$ имеет в $\mathcal{M}$ представление $B =< \{x_i \mid i \in I\}; \Sigma_2 >$. Если каждая формула из Σ_1 является следствием в $\mathcal{M}$ множества формул Σ_2 (в частности, если $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$), то существует гомоморфизм $\varphi : A \to B$ такой, что $\varphi(a_i) = b_i$ $(i \in I)$.

Полезную информацию о квазимногообразиях можно найти в [3, 4], об алгоритмических проблемах – в [5].

В следующей теореме найдено условие неразрешимости Q-теории.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{M}$ – квазимногообразие универсальных алгебр, которое содержит одновременно конечно порожденную и конечно определенную в $\mathcal{M}$ алгебру с неразрешимой проблемой равенства. Тогда Q-теория $T_Q(\mathcal{M})$ класса $\mathcal{M}$ неразрешима.

Доказательство. Пусть алгебра $A \in \mathcal{M}$ с неразрешимой проблемой равенства задана в $\mathcal{M}$ (в порождающих $a_1, \dots, a_n$) представлением

$$A =< x_1, \dots, x_n; t_1(x_1, \dots, x_n) =$$

$$= t'_1(x_1, \dots, x_n), \dots,$$

$$t_k(x_1, \dots, x_n) = t'_k(x_1, \dots, x_n) > .$$

Предположим, что Q-теория $T_Q(\mathcal{M})$ разрешима. Зафиксируем алгоритм, который по каждому квазитождеству выясняет, принадлежит ли оно теории $T_Q(\mathcal{M})$. Укажем эффективную процедуру, решающую проблему равенства в A.

По каждой паре термов $t(x_1, \dots, x_n)$, $t'(x_1, \dots, x_n)$ строим квазитождество

$$\Phi = (\forall x_1) \dots (\forall x_n)(\bigwedge_{i=1}^{k} t_i(x_1, \dots, x_n) =$$

$$t'_i(x_1, \dots, x_n) \to t(x_1, \dots, x_n) = t'(x_1, \dots, x_n))$$

(его левая часть — конъюнкция определяющих соотношений алгебры A). Наш алгоритм позволяет выяснить, принадлежит квазитождество Φ теории $T_Q(\mathcal{M})$ или нет. Покажем, что если $\Phi \in T_Q(\mathcal{M})$, то $t(a_1, \dots, a_n) = t'(a_1 \dots, a_n)$ в алгебре A; если $\Phi \notin T_Q(\mathcal{M})$, то $t(a_1, \dots, a_n) \neq t'(a_1 \dots, a_n)$ в алгебре A. Это означает разрешимость в алгебре A проблемы равенства.

В самом деле, если квазитождество Φ содержится в $T_Q(\mathcal{M})$, то оно истинно во всех алгебрах из $\mathcal{M}$ и, в частности, в A. Отсюда $t(a_1, \dots, a_n) = t'(a_1, \dots, a_n)$ в алгебре A.

Если квазитождество Φ не принадлежит теории $T_Q(\mathcal{M})$, то оно ложно в некоторой алгебре $B \in \mathcal{M}$. Пусть $t_i(b_1 \dots, b_n) = t'_i(b_1 \dots, b_n), i = 1, \dots, k, t(b_1 \dots, b_n) \neq t'(b_1 \dots, b_n)$ в B. Тогда по

теореме Дика отображение $a_1 \to b_1, \ldots, a_n \to b_n$ продолжаемо до гомоморфизма $\varphi : A \to B$. Отсюда
$\varphi(t(a_1, \ldots, a_n)) = t(b_1, \ldots, b_n) \neq t'(b_1 \ldots, b_n) = \varphi(t'(a_1 \ldots, a_n))$.

Значит, $t(a_1, \ldots, a_n) \neq t'(a_1 \ldots, a_n)$ в A.

Из вышесказанного следует, что теория $T_Q(\mathcal{M})$ является неразрешимой. Теорема доказана.

Замечание 1. В [6] доказывается существование конечно определенной алгебры Ли над произвольным полем, в которой неразрешима проблема равенства. Это означает, в частности, что существует кольцо Ли конечной характеристики с неразрешимой проблемой равенства. Из теоремы 1 получаем, что найдется конечно аксиоматизируемое многообразие колец Ли, Q-теория которого неразрешима. Отсюда проблема Мальцева (вопрос 2.40(3) [1]) для Q-теорий колец Ли имеет положительное решение.

Теорема 2. Существует конечно аксиоматизируемое многообразие ассоциативных колец, Q-теория которого неразрешима.

Доказательство. Пусть

$$P =< x_1, \ldots, x_n; r_1 = r_1', \ldots, r_k = r_k' >$$

— конечно определенная полугруппа с неразрешимой проблемой равенства. Существование такой полугруппы было почти одновременно доказано Постом [7] и Марковым [8]. В качестве P можно взять, например, следующую полугруппу Цейтина [9]:
$< a, b, c, d, e; ac = ca, ad = da, bc = cb, bd = db, eca = ce, edb = de, cca = ccae >$.

Пусть p – простое число. Рассмотрим ассоциативное кольцо, имеющее в порождающих $x_1, \ldots, x_n$ следующее представление:
$K =< x_1, \ldots, x_n; r_1 = r_1', \ldots, r_k = r_k', px_1 = 0, \ldots, px_n = 0 >$
(px – краткая запись для $\underbrace{x + x + \ldots + x}_{p}$).

По теореме Дика существует естественный гомоморфизм этого кольца на полугрупповое кольцо полугруппы P над кольцом вычетов Z_p по модулю p, элементы которого – формальные суммы элементов полугруппы P с коэффициентами из Z_p (нетрудно заметить, что это изоморфизм). Значит, мультипликативная полугруппа, порожденная в K элементами $x_1, \ldots, x_n$, изоморфна P. Теперь ясно, что из разрешимости проблемы равенства в кольце K следует разрешимость этой проблемы в полугруппе P, поэтому проблема равенства в кольце K неразрешима.

Многообразие ассоциативных колец, заданное тождеством $(\forall x)(px = 0)$, содержит K и поэтому по теореме 1 имеет неразрешимую Q-теорию. Отметим также, что доказано, что класс всех ассоциативных колец также имеет неразрешимую Q-теорию. Теорема доказана.

Замечание 2. Заметим, что теорема 2 является положительным решением проблемы Мальцева (проблема 2.40(2) [1]) для Q-теорий ассоциативных колец.

В заключение хочу поблагодарить профессора Е.И. Хухро, следствием общения с которым явилась эта статья.

Библиографический список

1. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. 16-е изд. / под ред. В.Д. Мазурова. – Новосибирск, 2006.

2. Попов В.Ю. Неразрешимость проблемы равенства в относительно свободных кольцах / Попов В.Ю. // Матем. заметки. – 2000. – Т. 67, №4.

3. Мальцев А.И. Алгебраические системы / А.И. Мальцев. – М., 1970.

4. Будкин А.И. Квазимногообразия групп / А.И. Будкин. – Барнаул, 2002.

5. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции / А.И. Мальцев. – М., 1986.

6. Бокуть Л.А. Неразрешимость проблемы равенства и подалгебры конечно определенных алгебр Ли / Л.А. Бокуть // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1972. – Т. 36, №6.

7. Post, E.L. Recursive unsolvability of a problem of Thue / E. L. Post // J. Symbolic Logic. – 1947. – V. 12, №1.

8. Марков А.А. Теория алгоритмов / А.А. Марков // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1954. – Т. 42.

9. Цейтин Г.С. Ассоциативное исчисление с неразрешимой проблемой эквивалентности / Г.С. Цейтин // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1958 – Т. 52.