

УДК 519.6

*М.В. Банушкин, О.П. Бушманова*

**О численном моделировании макроразрывов сдвигового типа\***

*Ключевые слова:* макроразрыв, линии сдвига, формирование разрывов.

*Key words:* macrofracture, shear band, fracture formation.

Образование поверхностей сдвига можно наблюдать при деформировании сыпучих сред, горных пород, грунтов, металлов [1–4].

В работах [3, 5] в экспериментах на приборе однородного сдвига получено, что при сдвигах, больших критического, происходит переход к новому режиму деформирования: область разбивается сеткой линий скольжения на отдельные блоки и дальнейшее деформирование сопровождается смещениями, относительными проскальзываниями и поворотами отдельных блоков.

При исследовании процессов подготовки тектонического землетрясения, возникающего вследствие накопления и последующей релаксации упругих напряжений в пределах земной коры очаг землетрясения также может рассматриваться в форме макроразрыва сдвигового типа.

В монографии [6] с учетом аналогии в формировании макроразрывов разного масштабного уровня представлены лабораторные эксперименты по формированию макроразрыва сдвигового типа в модели с внутренними концентраторами.

Для сопоставления с экспериментально полученной картиной приводится аналитическое решение для упругой плоскости с трещинами, находящейся под действием приложенных бесконечности напряжений двухосного сжатия [7].

Рассмотрим численное моделирование процесса развития макроразрыва сдвигового типа. В рамках плоской деформации исследуемую область представим в виде прямоугольника.

По аналогии с лабораторными экспериментами рассмотрим внутренние концентраторы в виде двух разрезов, расположенных на отрезках прямой линии, пересекающей вертикальную ось прямоугольника под углом  $\alpha$ .

Все величины в задаче будем считать безразмерными. В качестве характерного линейного размера выберем горизонтальный размер прямоугольника, в качестве характерного напряжения –  $0.001E$ . Вертикальный размер прямоугольника, отнесенный к горизонтальному, равен  $H$ . Будем считать, что процесс нагружения

осуществляется по шагам.

Поставим задачу определения на каждом шаге нагружения в исследуемой области полей приращений перемещений  $u_i$  ( $i = 1, 2$ ) и приращений напряжений  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ), которые должны удовлетворять уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0.$$

Вне разрезов предположим упругое поведение среды

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}),$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $E$  – модуль упругости;  $\varepsilon_{ij}$ , ( $i, j = 1, 2$ ) – компоненты тензора деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}).$$

По повторяющемуся индексу  $k$  проводится суммирование от 1 до 2.

Для каждого шага нагружения на сторонах прямоугольника, расположенных вдоль осей координат  $x_1, x_2$ , зададим следующие граничные условия.

$$x_1 = 0 : \quad u_1 = \beta u, \quad \sigma_{12} = 0,$$

$$x_1 = 1 : \quad u_1 = -\beta u, \quad \sigma_{12} = 0,$$

$$x_2 = 0 : \quad u_2 = 0, \quad \sigma_{12} = 0,$$

$$x_2 = H : \quad u_2 = -u, \quad \sigma_{12} = 0.$$

Здесь  $u = const$ ,  $\alpha = const$ , ( $u > 0, \alpha > 0$ ).

Формирование разрыва в процессе нагружения обеспечивается за счет увеличения длины разрезов. Возможность разрыва перемещений, а следовательно, возможность сдвига берегов разрезов друг относительно друга зависят от условий, заданных на разрезах. Предположим, что берега разрезов при сдвиге взаимодействуют по закону Кулона-Мора, связывающему нормальную  $p_n$  и касательную  $p_\tau$  составляющие вектора приращений напряжений

$$p_\tau = \pm(c - k_\tau p_n), \quad (1)$$

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №08-05-00543).

где выбор знака зависит от направления нормали;  $c$  – сцепление;  $k$  – коэффициент трения.

На линии разрыва перемещений вектор приращений напряжений должен быть непрерывен

$$(p_n)^+ = (p_n)^-, \quad (p_\tau)^+ = (p_\tau)^-. \quad (2)$$

Индексы «+» и «-» соответствуют разным сторонам линии разрыва.

Нормальная и касательная составляющие вектора приращений перемещений вдоль разрезов могут терпеть разрыв.

Разрывы приращений перемещений отсутствуют, если

$$u_\tau^+ = u_\tau^-, \quad (3)$$

и

$$u_n^+ = u_n^-. \quad (4)$$

Нормальный разрыв приращений перемещений в данном случае становится возможен, если

$$u_n^+ - u_n^- = g(u_\tau^+ - u_\tau^-), \quad (5)$$

где  $g$  – заданные функции декартовых координат, точек на берегах разрезов. Такое условие отражает свойство дилатансии материала (изменения объема при сдвиге) локально вдоль линий разрывов.

Таким образом, на двух берегах каждого из разрезов, которые можно рассматривать как два определенных участка общей границы исследуемой области, выполняются четыре граничных условия: условие (1), два условия (2) и условия (4) или (5). Если на части разреза вместо условия (1) выбирается условие (3), то сдвигов вдоль данной части разреза не происходит.

Граничные условия, описывающие взаимодействие берегов разрезов, представлены в виде функциональных зависимостей между приращениями напряжений и приращениями перемещений, неизвестными заранее и определяемыми в процессе решения поставленной задачи.

Для решения поставленной задачи используется численный алгоритм, реализующий возможность развития разрывов в первоначально непрерывной области на проблемно-ориентированных сетках с двойными узлами в рамках метода конечных элементов [8–10].

При первоначальном разбиении области на треугольные конечные элементы учитываются данные о расположении разрывов в исследуемой задаче. Предполагается, что часть линий, соединяющих узлы сетки конечных элементов, проходит по линиям разрыва.

Для того чтобы существовала возможность исследования произвольных систем разрывов, все узлы сетки конечных элементов задаются двойными – имеют два номера в глобальной нумерации.

Один из двух номеров узловых точек выбирается для каждого конкретного элемента с учетом принадлежности одной из сторон, содержащих узел, определенному берегу разреза.

Таким образом, для каждой расчетной точки области существует возможность в процессе деформирования разделиться на два узла, приращения перемещений в которых могут быть различными.

Нумерация узлов на сетке оптимизируется с целью уменьшения объема используемых в программе структур данных, при этом учитывается расположение разрезов.

В каждом узле предполагаются две возможности: либо среда в нем остается непрерывной, либо происходит относительное скольжение берегов – разрыв приращений перемещений.

Для реализации в рамках метода конечных элементов нестандартных краевых условий предлагается использовать свойства линейности системы конечных элементов на каждом шаге нагружения и соответствующие изменения в матрице жесткости системы.

Условие (5), вообще говоря, может быть нелинейным, однако метод последовательных нагружений позволяет провести линеаризацию. Поэтому на каждом шаге по параметру нагружения условию (5) в каждой точке разреза соответствует линейная зависимость между касательной и нормальной компонентами вектора приращений перемещений.

На рисунках 1–4 приведены изолинии поля максимальных касательных напряжений на различных этапах нагружения

$$\tau_{max}^l = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11}^l - \sigma_{22}^l)^2 + 4(\sigma_{12}^l)^2},$$

где  $\sigma_{ij}^l$  ( $i, j = 1, 2$ ) – полные напряжения на текущем  $l$ -шаге нагружения.

В ходе нагружения разрезы распространяются в непрерывную область по направлению друг к другу.

Структура поля максимальных касательных напряжений аналогична экспериментально полученной картине, где локальное поле напряжений создавалось вследствие относительного перемещения материала по берегам пластин-концентраторов.

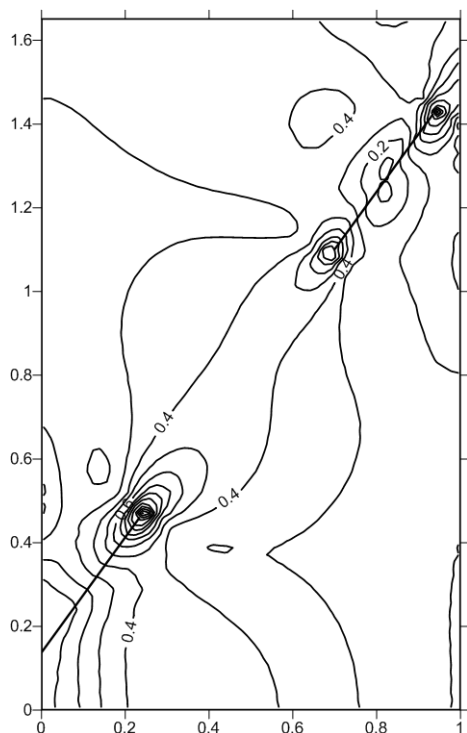


Рис. 1. Изолинии поля максимальных касательных напряжений на 1 шаге нагружения

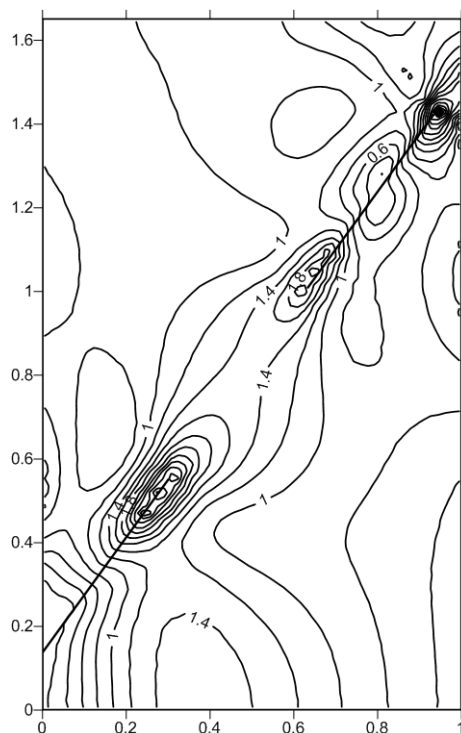


Рис. 2. Изолинии поля максимальных касательных напряжений на 3 шаге нагружения

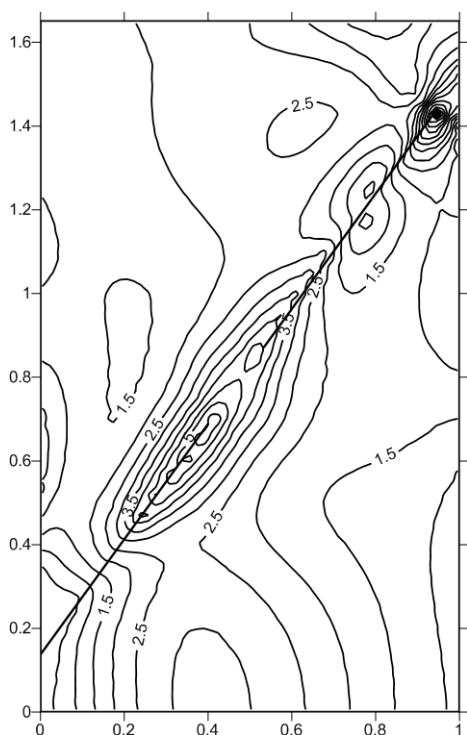


Рис. 3. Изолинии поля максимальных касательных напряжений на 6 шаге нагружения

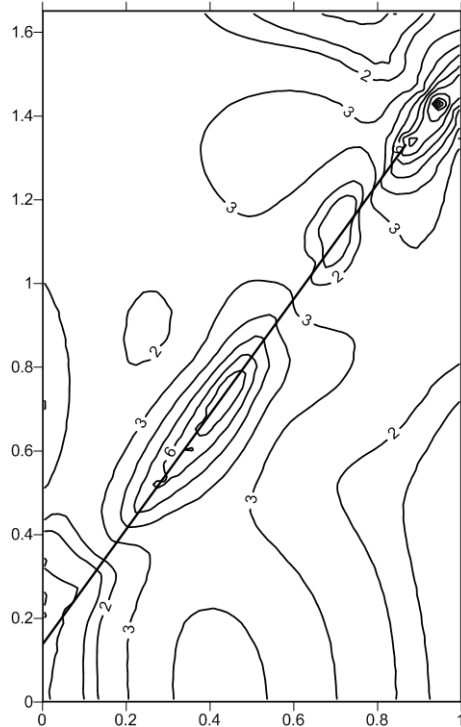


Рис. 4. Изолинии поля максимальных касательных напряжений на 8 шаге нагружения

При расчетах принимались следующие значения параметров:

$$\nu = 0.3, H = 1.652, u = 0.625, \beta = 0, g = 0, c = 0, k_{\tau} = 0.3.$$

### Библиографический список

1. Надаи, А. Пластичность и разрушение твердых тел / А. Надаи. – М., 1969. – Т. 2.
2. Соколовский, В.В. Теория пластичности / В.В. Соколовский. – М., 1969.
3. Ревуженко, А.Ф. Механика упруго-пластических сред и нестандартный анализ / А.Ф. Ревуженко. – Новосибирск, 2000.
4. Геомеханические процессы взаимодействия породных и закладочных массивов при обработке пластовых рудных залежей / М.В. Курленя, В.Н. Опарин, А.П. Тапсиев, В.В. Аршавский. – Новосибирск, 1997.
5. Ревуженко, А.Ф. О механизме деформирования сыпучего материала при больших сдвигах / А.Ф. Ревуженко, С.Б. Стажевский, Е.И. Шемякин // ФТПРПИ. – 1974. – №3.
6. Соболев, Г.А. Физика землетрясений и предвестники / Г.А. Соболев, А.В. Пономарев. – М., 2003.
7. Соболев, Г.А. Крупномасштабное моделирование подготовки и предвестников землетрясений / Г.А. Соболев, А.В. Кольцов. – М., 1988.
8. Бушманова, О.П. Моделирование локализации сдвигов / О.П. Бушманова // ПМТФ. – 2003. – №6.
9. Bushmanova, O.P. Numerical modeling of shear localization in elastoplastic materials / O.P. Bushmanova, A.F. Revuzhenko // Abstract book of the 11 International Conference on Fracture. – Turin, 2005.
10. Бушманова, О.П. Численное моделирование процесса деформирования материала в сходящемся канале в условиях возникновения линий локализации / О.П. Бушманова, С.Б. Бушманов // ФТПРПИ. – 2009. – №4.