УДК 512.54.01

Ю.А. Авцинова

О квазимногообразиях метабелевых групп без кручения аксиоматического ранга два*

Ключевые слова: квазимногообразие, метабелевы группы, аксиоматический ранг.
Key words: quasivariety, metabelian groups, axiomatic rank.

Введение. Множество всех квазимногообразий, имеющих в данном классе $\mathcal{N}$ аксиоматический ранг меньший или равный n, частично упорядочено относительно включения и образует решетку, обозначаемую через $L_q^n(\mathcal{N})$. Известно [1], что решетка $L_q^n(\mathcal{N})$ является гомоморфным образом решетки $L_q(\mathcal{N})$ квазимногообразий, содержащихся в $\mathcal{N}$. Поэтому имеет смысл при изучении решетки $L_q(\mathcal{N})$ исследовать решетки $L_q^n(\mathcal{N})$.

Нахождению аксиоматических рангов посвящены многие работы. Аксиоматический ранг квазимногообразия, порожденного конечной группой с неабелевой силовской подгруппой, найден в [2], квазимногообразия, порожденного всеми конечными группами — в [3]. Аксиоматические ранги квазимногообразий, порожденных свободной неабелевой группой, свободной разрешимой группой, неабелевой конечнопорожденной нильпотентной группой без кручения, найдены в [4–6]. Аксиоматический ранг квазимногообразия, порожденного группой с одним определяющим соотношением, исследовался в [5]. В [7] изучались аксиоматические ранги квазимногообразий нильпотентных групп ступени ≤ 2 без кручения. В настоящей работе изучается квазимногообразие $\mathcal{M}$, всех групп без кручения, удовлетворяющих тождеству

$$(\forall x)(\forall y)([x^2, y^2] = 1). \qquad (1)$$

В работе доказано, что квазимногообразие абелевых групп без кручения является единственным собственным подквазимногообразием в $\mathcal{M}$ аксиоматического ранга два, определимым коммутаторными квазитождествами.

1. Предварительные замечания. Введем следующие обозначения:

$\mathcal{M}$ – квазимногообразие, заданное в классе групп без кручения тождеством (1);

Z – множество целых чисел;

$ker\varphi$ – ядро гомоморфизма φ;

$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ – коммутатор элементов x и y;

гр$(a_1, a_2, \ldots)$ – группа, порожденная элементами $a_1, a_2, \ldots$;

$M =$ гр$(a, b \parallel a^{-1}ba = b^{-1})$.

Напомним некоторые определения. Говорят, что аксиоматический ранг квазимногообразия равен n, если данное квазимногообразие можно задать системой квазитождеств от n переменных и нельзя задать системой квазитождеств от меньшего числа переменных. Если такого n не существует, то аксиоматический ранг квазимногообразия равен ∞.

Квазитождество $(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)(\&_{i=1}^k t_i = 1 \to t = 1)$ называется коммутаторным, если все $t_i (i = 1, \ldots, k)$ и t — элементы коммутанта абсолютно свободной группы.

При написании тождеств и квазитождеств кванторы всеобщности будем иногда опускать.

Ниже нам понадобится следующая теорема.

Теорема (Дик) [8]. *Пусть группа G имеет в данном квазимногообразии $\mathcal{N}$ представление*

$$G = \text{гр}(\{x_i \mid i \in I\} \parallel \{r_j(x_{i_1}, \ldots, x_{i_j}) = 1 \mid j \in J\}).$$

Предположим, что $H \in \mathcal{N}$ и группа H содержит множество элементов $\{g_i \mid i \in I\}$ такое, что для всякого $j \in J$ равенство $r_j(g_{i_1}, \ldots, g_{i_j}) = 1$ истинно в H. Тогда отображение $x_i \to g_i (i \in I)$ продолжается до гомоморфизма $\varphi : G \to H$.

Говорят, что группа G_1 вложима в группу G_2, если существует гомоморфизм $\varphi : G_1 \to G_2$, такой, что $ker\varphi = (1)$. Этот гомоморфизм φ называется вложением группы G_1 в группу G_2.

Квазитождество, истинное во всех группах из $\mathcal{M}$ или ложное во всех неабелевых группах из $\mathcal{M}$, будем называть тривиальным в $\mathcal{M}$.

Квазитождество, истинное в абелевых группах без кручения и ложное в некоторой неабелевой группе из $\mathcal{M}$, будем называть нетривиальным в $\mathcal{M}$.

Квазитождества Ψ и Φ эквивалентны в $\mathcal{R}$, если классы групп из $\mathcal{R}$, в которых они истинны, совпадают.

Будем использовать следующие хорошо известные коммутаторные тождества [9, с. 87]:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)([xy, z] = [x, z]^y[y, z]),$$

*Работа выполнена при поддержке АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы (мероприятие 1)".

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)([x,yz]=[x,z][x,y]^z),$$
$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall t)([xy,zt]=[x,t]^y[y,t][x,z]^{yt}[y,z]^t),$$

истинные в любой группе.

Если $G\in\mathcal{M}$ и $H=\text{гр}(x^2\mid x\in G)$, то G/H – абелева группа. Отсюда справедливо

Замечание 1. В каждой группе из $\mathcal{M}$ истинны тождества:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall w)(\big[[x,y],[z,w]\big]=1),$$
$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\big[[x,y],z^2\big]=1),$$
$$(\forall x)(\forall y)([x,y]^{xy}=[x,y]^{yx}).$$

Применяя коммутаторные тождества к $[x^2,y^2]$, получаем следующее.

Замечание 2. В каждой группе из $\mathcal{M}$ истинно тождество

$$(\forall x)(\forall y)([x,y]^{xy}=[x,y]^{-x}[x,y]^{-1}[x,y]^{-y}).$$

Всю необходимую информацию о группах можно найти в [9–11], об аксиоматических рангах – в [12–14], о квазимногообразиях – в [12,14].

2. Основной результат. ЛЕММА 1. *Группа M вложима в любую неабелеву группу из $\mathcal{M}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку в нильпотентной группе ступени 2 из тождества $[x^2,y^2]=1$ следует тождество $[x,y]^4=1$, то квазимногообразие $\mathcal{M}$ не содержит нильпотентных неабелевых групп.

Возьмем любую неабелеву группу G из $\mathcal{M}$. Пусть $a,b\in G$ и $[a,b]\neq 1$. Так как $\mathcal{M}$ не содержит нильпотентных неабелевых групп, значит, $[a,b,a]\neq 1$ либо $[a,b,b]\neq 1$. Предположим, например, что $[a,b,a]\neq 1$. Из истинного в $\mathcal{M}$ тождества $\big[[x,y],z^2\big]=1$, используя коммутаторные тождества, получаем

$$1=[[a,b],a^2]=[a,b,a][a,b,a]^a.$$

По теореме Дика существует гомоморфизм $\psi: M\to$ гр $(a,[a,b,a])$, при котором $\psi(a)=a$, $\psi(b)=[a,b,a]$. Ясно, что $ker\psi=(1)$, откуда $M\cong$ гр $(a,[a,b,a])$. Случай $[a,b,b]\neq 1$ рассматривается аналогично. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Пусть квазитождество*
$\Phi=(\forall x)(\forall y)([x,y]^{n_1}[x,y]^{n_2x}[x,y]^{n_3y}=1\to$
$[x,y]^{s_1}[x,y]^{s_2x}[x,y]^{s_3y}=1)(n_i,s_i\in Z,\ i=1,2,3)$
истинно в группе M. Тогда

1) если $n_1-n_2+n_3=0$, то $s_1-s_2+s_3=0$;

2) если $n_1+n_2-n_3=0$, то $s_1+s_2-s_3=0$;

3) если $n_1-n_2-n_3=0$, то $s_1-s_2-s_3=0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Несложно заметить, что в группе M справедливы равенства:
$[a,b]^{n_1}[a,b]^{n_2a}[a,b]^{n_3b}=b^{2(n_1-n_2+n_3)}$,
$[b,a]^{n_1}[b,a]^{n_2b}[b,a]^{n_3a}=b^{-2(n_1+n_2-n_3)}$,
$[ab,a]^{n_1}[ab,a]^{n_2ab}[ab,a]^{n_3a}=b^{-2(n_1-n_2-n_3)}$.
Откуда, из истинности в M квазитождеств Φ, следует требуемое. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. *Квазитождество*
$\Phi=(\forall x)(\forall y)([x,y]^{n_1}[x,y]^{n_2x}[x,y]^{n_3y}=1\to$
$[x,y]^{s_1}[x,y]^{s_2x}[x,y]^{s_3y}=1)(n_i,s_i\in Z,\ i=1,2,3)$
является тривиальным в $\mathcal{M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 1 следует, что если Φ ложно в M, то оно ложно во всех неабелевых группах из $\mathcal{M}$, т.е. тривиальное. Поэтому считаем, что Φ истинно в группе M. Для доказательства леммы достаточно проверить, что Φ истинно в любой неабелевой группе G из $\mathcal{M}$. Пусть левая часть квазитождества Φ истинна в неабелевой группе G из $\mathcal{M}$ при отображении $x\to a$, $\quad y\to b$, т.е.

$$[a,b]^{n_1}[a,b]^{n_2a}[a,b]^{n_3b}=1. \tag{2}$$

Если $[a,b]=1$, то правая часть квазитождества Φ истинна в G при рассматриваемом отображении. Поэтому можно считать, что $[a,b]\neq 1$. Сопрягая элементом a обе части этого равенства и используя замечание 2, получаем

$$1=[a,b]^{n_2-n_3}[a,b]^{(n_1-n_3)a}[a,b]^{-n_3b}. \tag{3}$$

Отсюда и из (2) следует
$$1=[a,b]^{n_1}[a,b]^{n_2a}[a,b]^{n_2-n_3}[a,b]^{(n_1-n_3)a}=$$
$$=[a,b]^{n_1+n_2-n_3}[a,b]^{(n_1+n_2-n_3)a}. \tag{4}$$

Сопрягая обе части равенства (2) элементом b, имеем: $1=[a,b]^{n_3-n_2}[a,b]^{-n_2a}[a,b]^{(n_1-n_2)b}$. Отсюда и из (3) выводим

$$[a,b]^{(n_1-n_2-n_3)a}[a,b]^{(n_1-n_2-n_3)b}=1. \tag{5}$$

Случай 1. $n_1+n_2-n_3\neq 0$. Так как группа G без кручения, из (4) следует

$$[a,b][a,b]^a=1. \tag{6}$$

Пусть сначала $n_1-n_2-n_3\neq 0$. Тогда из (5) получаем $[a,b]^a[a,b]^b=1$. Отсюда, используя (2) и (6), выводим $1=[a,b]^{n_1}[a,b]^{n_2a}[a,b]^{n_3b}=[a,b]^{n_1-n_2+n_3}$. Следовательно, $n_1-n_2+n_3=0$. Из истинности Φ в M по лемме 2 имеем: $[a,b]^{s_1}[a,b]^{s_2a}[a,b]^{s_3b}=[a,b]^{s_1-s_2+s_3}=1$, т.е. правая часть квазитождества Φ истинна в G при рассматриваемом отображении.

Пусть теперь $n_1-n_2-n_3=0$. Тогда из (2) и (6) получаем $[a,b]^{(n_1-n_2)}[a,b]^{(n_1-n_2)b}=1$.

Возникают два случая.

1) $n_1-n_2\neq 0$. Тогда $[a,b][a,b]^b=1$ и ввиду леммы 2 $s_1-s_2-s_3=0$. Откуда $[a,b]^{s_1}[a,b]^{s_2a}[a,b]^{s_3b}=[a,b]^{s_1-s_2-s_3}=1$.

2) $n_1 - n_2 = 0$. Тогда $n_1 = n_2$ и $n_3 = 0$. Значит, $n_1 - n_2 + n_3 = 0$ и $n_1 - n_2 - n_3 = 0$. По лемме 2 получаем, что $s_1 - s_2 + s_3 = 0$ и $s_1 - s_2 - s_3 = 0$. Следовательно, $s_1 = s_2$, $s_3 = 0$ и $[a,b]^{s_1}[a,b]^{s_2 a}[a,b]^{s_3 b} = [a,b]^{s_1 - s_2} = 1$.

Случай 2. $n_1 + n_2 - n_3 = 0$.

Пусть сначала $n_1 - n_2 - n_3 \neq 0$. Из (5) получаем $[a,b]^a[a,b]^b = 1$. Отсюда и из (2) выводим $1 = [a,b]^{n_1}[a,b]^{n_2 a}[a,b]^{n_3 b} = [a,b]^{n_1}[a,b]^{n_2 a}[a,b]^{(n_1+n_2)b} = [a,b]^{n_1}[a,b]^{-n_1 a}$.

Снова имеем два случая.

1) $n_1 \neq 0$. Тогда $[a,b][a,b]^{-a} = 1$. По лемме 2 $s_1 + s_2 - s_3 = 0$, поэтому $[a,b]^{s_1}[a,b]^{s_2 a}[a,b]^{s_3 b} = [a,b]^{s_1+s_2-s_3} = 1$.

2) $n_1 = 0$. Тогда $n_3 = n_2$, и, следовательно, $n_1 - n_2 + n_3 = 0$ и $n_1 + n_2 - n_3 = 0$. Тогда по лемме 2 имеем: $s_1 - s_2 + s_3 = 0$ и $s_1 + s_2 - s_3 = 0$. Значит, $s_1 = 0$, $s_2 = s_3$ и $[a,b]^{s_1}[a,b]^{s_2 a}[a,b]^{s_3 b} = [a,b]^{(s_2 - s_3)a} = 1$.

Пусть теперь $n_1 - n_2 - n_3 = 0$. Тогда $n_3 = n_1$, $n_2 = 0$ и из (2) получаем $[a,b]^{n_1}[a,b]^{n_1 b} = 1$.

1) Если $n_1 \neq 0$, то $[a,b][a,b]^b = 1$. По лемме 2 имеем: $s_1 + s_2 - s_3 = 0$ и $s_1 - s_2 - s_3 = 0$. Значит, $s_2 = 0$ и $s_1 = s_3$. Поэтому $[a,b]^{s_1}[a,b]^{s_2 a}[a,b]^{s_3 b} = [a,b]^{s_1 - s_3} = 1$.

2) Если $n_1 = 0$, тогда $n_1 - n_2 + n_3 = 0$, $n_1 + n_2 - n_3 = 0$ и $n_1 - n_2 - n_3 = 0$. Следовательно, по лемме 2 имеем $s_1 - s_2 + s_3 = 0$, $s_1 + s_2 - s_3 = 0$ и $s_1 - s_2 - s_3 = 0$. Значит, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$ и $s_3 = 0$. Поэтому $[a,b]^{s_1}[a,b]^{s_2 a}[a,b]^{s_3 b} = 1$.

Итак, получаем, что во всех случаях правая часть квазитождества Φ истинна в группе G при рассматриваемом отображении. Следовательно, Φ истинно в G. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА. *Квазимногообразие $\mathcal{M}$ не имеет собственных неабелевых подквазимногообразий аксиоматического ранга два, заданных коммутаторными квазитождествами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Ψ коммутаторное квазитождество от двух переменных. Тогда $\Psi = (\forall x)(\forall y)(\&_{i=1}^{k} w_i(x,y) = 1 \to w(x,y) = 1)$, где $w_i = [x,y]^{n_i}[x,y]^{m_i x}[x,y]^{l_i y}$, $w = [x,y]^n[x,y]^{mx}[x,y]^{ly}$ ($n, m, l, n_i, m_i, l_i \in Z$).

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} n_1 & m_1 & l_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ n_k & m_k & l_k \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим следующие элементарные преобразования равенств, стоящих в левой части квазитождества Ψ, преобразующие Ψ в эквивалентное в $\mathcal{M}$ квазитождество:

$1'$) замена $w_i = 1$ на $w_i w_j^f = 1$ $(i \neq j,\ f \in Z,\ f \neq 0)$;

$2'$) замена $w_i = 1$ на $w_i^f = 1$ $(f \in Z,\ f \neq 0)$.

Им соответствуют следующие элементарные преобразования строк матрицы A:

1) прибавление к i-ой строке j-ой строки, умноженной на f ($f \neq 0,\ f \in Z$);

2) умножение i-ой строки на f($f \neq 0,\ f \in Z$).

Элементарными преобразованиями 1), 2) целочисленную матрицу A можно привести к матрице с нулевым углом под главной диагональю. При этом данное квазитождество Ψ преобразуется в эквивалентное в $\mathcal{M}$ квазитождество. Можно считать, что квазитождество Ψ выбрано так, что A — матрица 3×3, имеющая вид:

$$A = \begin{pmatrix} n_1 & m_1 & l_1 \\ 0 & m_2 & l_2 \\ 0 & 0 & l_3 \end{pmatrix}.$$

Если $l_3 \neq 0$, то, как несложно заметить, Ψ истинно во всех группах G из $\mathcal{M}$. Значит Ψ — тривиальное. Считаем, что

$$A = \begin{pmatrix} n_1 & m_1 & l_1 \\ 0 & m_2 & l_2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1. $l_2 = 0$.

a) Если $m_2 \neq 0$, то получаем в левой части квазитождества Ψ равенство $[x,y]^{m_2 x} = 1$. Следовательно, Ψ истинно в любой группе G из $\mathcal{M}$, т.е. оно тривиальное.

b) Если $m_2 = 0$, то данное квазитождество Ψ имеет вид $(\forall x)(\forall y)([x,y]^{n_1}[x,y]^{m_1 x}[x,y]^{l_1 y} = 1 \to [x,y]^n[x,y]^{mx}[x,y]^{ly} = 1)$. По лемме 3 оно тривиальное.

Случай 2. $l_2 \neq 0$.

a) Если $m_2 = 0$, то получаем в левой части квазитождества Ψ равенство $[x,y]^{l_2 y} = 1$. Следовательно, Ψ истинно в любой группе G из $\mathcal{M}$. Значит Ψ — тривиальное.

b) Если $m_2 \neq 0$, то, используя элементарные преобразования 1), 2), можно предполагать, что

$$A = \begin{pmatrix} n_1 & m_1 & 0 \\ 0 & m_2 & l_2 \end{pmatrix}.$$

Если $n_1 = 0$ и $m_1 = 0$, тогда, аналогично случаю 1b, получаем Ψ — тривиальное.

Если $n_1 = 0$ или $m_1 = 0$, то, аналогично случаю 1a, получаем Ψ — тривиальное.

Следовательно, $n_1 \neq 0$, $m_1 \neq 0$, и в левой части квазитождества Ψ имеем равенства:
$[x,y]^{m_1 x} = [x,y]^{-n_1}$,
$[x,y]^{l_2 y} = [x,y]^{-m_2 x}$.
Следствием этих равенств является соотношение $([x,y]^n[x,y]^{mx}[x,y]^{ly})^{m_1 l_2} =$

$[x,y]^{nm_1l_2-mn_1l_2+ln_1m_2}$. Теперь можно считать, что $nm_1l_2-mn_1l_2+ln_1m_2\neq 0$. Видим, что Ψ преобразуется в эквивалентное в $\mathcal{M}$ квазитождество $\Psi_1=(\forall x)(\forall y)([x,y]^{n_1}[x,y]^{m_1x}=1\ \ \&\ \ [x,y]^{m_2x}[x,y]^{l_2y}=1\rightarrow[x,y]=1)$.

Пусть левая часть квазитождества Ψ_1 истинна в неабелевой группе G из $\mathcal{M}$ при отображении $x\rightarrow a,\quad y\rightarrow b$. Предполагаем, что $[a,b]\neq 1$. Имеем:

$$[a,b]^{n_1}[a,b]^{m_1a}=1, \tag{7}$$

$$[a,b]^{m_2a}[a,b]^{l_2b}=1. \tag{8}$$

Из (7) получаем $1=[1,a]=[a,b]^{m_1-n_1}[a,b]^{(n_1-m_1)a}$. Отсюда $1=[[1,a],b]=[a,b]^{2(m_1-n_1)a}[a,b]^{2(-n_1+m_1)b}$, т.е. $1=[a,b]^{(n_1-m_1)a}[a,b]^{(n_1-m_1)b}$.

1) Если $n_1-m_1\neq 0$, то получаем $[a,b][a,b]^{-a}=1$ и $[a,b]^a[a,b]^b=1$. Тогда из (7) $[a,b]^{n_1+m_1}=1$ и из (8) $[a,b]^{m_2-l_2}=1$. Значит $m_1=-n_1$ и $m_2=l_2$. Теперь несложно проверить, что левая часть квазитождества Ψ_1 истинна в M при отображении $x\rightarrow b,\quad y\rightarrow a$, а правая — ложна. Получаем Ψ_1 — тривиальное квазитождество.

2) Пусть $n_1-m_1=0$. Из (8) получаем $1=[1,a]=[a,b]^{m_2-l_2}[a,b]^{(-m_2-l_2)a}[a,b]^{-2l_2b}$. Отсюда $1=[[1,a],b]=[a,b]^{2(m_2+l_2)a}[a,b]^{2(m_2+l_2)b}$.

Рассмотрим два случая.

a) $m_2+l_2\neq 0$. Получаем $[a,b]^a[a,b]^b=1$. И из (8) следует $[a,b]^{-m_2+l_2}=1$. Значит $m_2=l_2$. Теперь несложно проверить, что левая часть квазитождества Ψ_1 истинна в M при отображении $x\rightarrow a,\quad y\rightarrow b$, а правая — ложна. Получаем Ψ_1 — тривиальное квазитождество.

b) $m_2+l_2=0$.

Но и в этом случае левая часть квазитождества Ψ_1 истинна в M при отображении $x\rightarrow ba,\quad y\rightarrow a$, а правая – ложна. Получаем Ψ_1 – тривиальное квазитождество.

Итак, во всех случаях получаем тривиальное квазитождество. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Единственным подквазимногообразием в $\mathcal{M}$ аксиоматического ранга два, заданным коммутаторными квазитождествами, является квазимногообразие абелевых групп без кручения.*

В заключение автор выражает благодарность профессору А.И. Будкину, под руководством которого выполнена данная работа.

Библиографический список

1. Туманов, В.И. Достаточные условия вложимости свободной решетки в решетки квазимногообразий: препринт 40 / В.И. Туманов: Инт математики СО АН СССР. – М., 1988.

2. Ольшанский, А.Ю. Условные тождества в конечных группах / А.Ю. Ольшанский // Сиб. матем. журнал. – 1974. – Т. 15, №6.

3. Румянцев, А.К. О квазитождествах конечных групп / А.К. Румянцев // Алгебра и логика. – 1980. – Т. 19, №4.

4. Будкин, А.И. Аксиоматический ранг квазимногообразия, содержащего свободную разрешимую группу / А.И. Будкин // Матем. сб. – 1980. – Т. 112, №4.

5. Будкин, А.И. Квазитождества нильпотентных групп и групп с одним определяющим соотношением / А.И. Будкин // Алгебра и логика. – 1979. – Т. 18, №2.

6. Будкин, А.И. О квазитождествах в свободной группе / А.И. Будкин // Алгебра и логика. – 1976. – Т. 15, №1.

7. Половникова, Е.С. Об аксиоматическом ранге квазимногообразий / Е.С. Половникова // Сиб. матем. журнал. – 1999. – Т. 40, №1.

8. Мальцев, А.И. Алгебраические системы / А.И. Мальцев. – М., 1970.

9. Курош, А.Г. Теория групп / А.Г. Курош. – М., 1967.

10. Каргаполов, М.И. Основы теории групп / М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков. – М., 1977.

11. Магнус, В. Комбинаторная теория групп / В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр. – М., 1974.

12. Будкин, А.И. Квазимногообразия групп / А.И. Будкин. – Барнаул, 2002.

13. Нейман, Х. Многообразия групп / Х. Нейман. – М., 1969.

14. Горбунов, В.А. Алгебраическая теория квазимногообразий / В.А. Горбунов. – Новосибирск, 1999.