УДК 535.36

А.М. Шайдук, П.Я. Зоммер

Моделирование движения фронта воспламенения дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом

При воздействии мощного светового потока на аэродисперсные системы, состоящие из реакционноспособных частиц, может возникнуть волна воспламенения, распространяющаяся вдоль светового потока в глубь дисперсной системы [1]. Граница раздела (фронт волны воспламенения), отделяющая горящий аэрозоль от негорящего, распространяется вдоль направления светового пучка с некоторой скоростью, которую мы далее будем называть скоростью фронта воспламенения. Условия возникновения такого фронта впервые были сформулированы в работе [2], там же в бугеровском приближении было получено интегральное уравнение, позволяющее определить скорость $v(t)$ фронта воспламенения

$$(1-\frac{\alpha(t)}{\alpha(0)})\ln(I_0 / I_p) = \int_0^t \alpha(t-\xi)v(\xi)d\xi. \qquad (1)$$

Здесь t – время, отсчитываемое от начала воздействия излучения на дисперсную систему; I_0 – плотность потока энергии воздействующего излучения на входе в дисперсную среду; I_p – плотность потока энергии излучения, при которой аэрозольная частица воспламеняется; $\alpha(t)$ – объемный коэффициент аэрозольного ослабления (подробнее см., например: [1]). Для конкретных режимов горения для уравнения 1 было найдено формальное решение с помощью преобразования Лапласа и для некоторых простых ядер $\alpha(t)$ построены аналитические решения.

Как отмечено в [3], практически часто в встречающихся режимах взаимодействия мощного светового излучения с дисперсными системами реализуется так называемый диффузионный режим горения частиц. В этом режиме объемный коэффициент аэрозольного ослабления (для монодисперсного аэрозоля) линейно убывает с временем до полного выгорания частиц и далее остается равным нулю. т.е.

$$\alpha(t) = \alpha_0(1-\frac{t}{\tau}),\ t<\tau,\ \alpha(t)=0,\ t>\tau, \qquad (2)$$

где τ – время полного выгорания частицы.

Покажем, что в этом случае уравнение для определения скорости фронта воспламенения может быть сведено к дифференциальному уравнению, решения которого обычно находятся более простыми математическими средствами.

Сначала рассмотрим промежуток времени $t < \tau$. Выполняя дифференцирование соотношения 1 по верхнему пределу, получаем

$$\frac{1}{\tau}\frac{I_0}{I_p} = \frac{d}{dt}(\int_0^t \alpha(t-\xi)v(\xi)d\xi) =$$
$$= \frac{d}{dt}(\int_0^t \alpha_0(1-\frac{t}{\tau})v(\xi)d\xi) + \frac{d}{dt}(\int_0^t \alpha_0\frac{\xi}{\tau}v(\xi)d\xi). \qquad (3)$$

В соотношении 3 использовано явное выражения для ядра $\alpha(t)$ в виде 2. Выполняя интегрирование и повторно проводя дифференцирование по верхнему пределу, получаем простое дифференциальное уравнение для скорости фронта воспламенения $v(t)$.

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{v(t)}{\tau},\ t<\tau. \qquad (4)$$

Обсуждение конкретного значения начальной скорости для постановки задачи Коши для этого уравнения вывело бы нас за рамки темы данного сообщения. Обратим внимание на то, что пока получено дифференциальное уравнение для промежутка времени $0 < t < \tau$. Рассмотрим теперь физически более интересный случай $t < \tau$. Теперь исходная дисперсная система представляет собой некоторый слой $z = \int_0^\tau v(t)dt$ полностью сгоревшего аэрозоля (область просветления), и зону горения, в которой все частицы вспыхивают в разные моменты времени в зависимости от их координаты вдоль направления потока воздействующего излучения. Аналогичным образом, дифференцируя соотношение 1 по верхнему пределу, теперь получаем выражение

$$\frac{1}{\tau}\ln\frac{I_0}{I_p} = \frac{d}{dt}(\int_{t-\tau}^t \alpha_0(1-\frac{t}{\tau})v(\xi)d\xi) +$$
$$+\frac{d}{dt}(\int_{t-\tau}^t \alpha_0\frac{t}{\tau}v(\xi)d\xi), \qquad (5)$$

отличающееся от третьего наличием аргумента $t - \tau$ в нижнем пределе интегрирования. После преобразований и второго дифференцирования по верхнему пределу получаем дифференциальное уравнение для определения скорости фронта воспламенения при $t > \tau$

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{v(t)-v(t-\tau)}{\tau}. \qquad (6)$$

Таким образом, видно, что даже в простейшем случае линейного ядра скорость фронта воспламенения определяется соотношением 6, относящемся к особому классу дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Специфика воспламеняющейся дисперсной среды такова, что поведение скорости фронта воспламенения определяется не только состоянием среды в рассматриваемый момент времени, но и поведением среды в предшествующие моменты. Физическая причина такого поведения среды состоит в том, что вспыхнувшие частицы меняют свои оптические свойства независимо от интенсивности воздействующего излучения [1]. Заметим, что это, видимо, характерная особенность низкопороговых нелинейных взаимодействий оптического излучения с дисперсными системами. Аналогом задачи Коши для подобного уравнения будет уже не значение искомой функции в начальный момент времени, а задание зависимости решения от времени на отрезке $0 < t < \tau$. Следовательно, начальным условием для (5) является решение уравнения (3) на промежутке $0 < t < \tau$. Решение на указанном промежутке может быть найдено обычными методами и далее считается известным.

Уравнение (6) относится к классу уравнений, которые можно записать в общем виде

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t-\tau), x(t)); \qquad (7)$$

с заданным условием $x(t) = x_0(t)$ на отрезке $0 < t < \tau$. Функция $x_0(t)$ предполагается известной и является аналогом краевого условия для уравнения (7). Пусть необходимо найти решение уравнения (7) в интервале $\tau < t < T$, где, разумеется, $T > \tau$. Введем число $N = T / \tau$, округленное до целого, и рассмотрим вспомогательную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = F(x_0(t-\tau), x_1(t)) \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = F(x_1(t-\tau), x_2(t)) \\ \qquad \ldots \\ \dfrac{dx_N(t)}{dt} = F(x_{N-1}(t-\tau), x_N(t)) \end{cases} \qquad (8)$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} x_1(\tau) = x_0(\tau) \\ x_2(2\tau) = x_1(2\tau) \\ \qquad \ldots \\ x_N(N\tau) = x_{N-1}(N\tau) \end{cases}$$

Данная система является системой взаимозацепленных дифференциальных уравнений, однако при известном решении уравнения n уравнение с номером $n + 1$ превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение с определенной задачей Коши, которое может быть решено независимо. Таким образом, начиная с $n = 1$, можно построить решение системы. Пусть такое решение построено и функции $x_n(t)$ теперь известны. В этом случае может быть построено и решение уравнения (7). Действительно, легко увидеть, что функция $x(t)$, определенная как

$$x(t) = \begin{cases} x_0(t),\ 0 < t < \tau \\ x_1(t),\ \tau < t < 2\tau \\ \qquad \ldots \\ x_N(t),\ (N-1)\tau < t < N\tau \end{cases} \qquad (9)$$

является решением уравнения (7). При этом для построения численного решения системы дифференциальных уравнений (8) достаточно для каждой неизвестной функции $x_n(t)$ ограничиться ее определением на ограниченном интервале в соответствии с системой (9).

Конкретная реализация процедуры построения решения была осуществлена с помощью математического пакета для автоматизации научных исследований Maple, который оказался чрезвычайно удобным для решения подобных задач. Анализ решения показал, что асимптотическое поведение решения при больших временах совпадает с поведением скорости фронта воспламенения, предсказанным ранее в работе [2].

Библиографический список

1. Букатый, В.И. Воздействие лазерного излучения на твердый аэрозоль / В.И. Букатый, И.А. Суторихин, В.Н. Краснопевцев, А.М. Шайдук. – Барнаул, 1994.

2. Букатый, В.И. Скорость волны просветления в воспламеняющемся аэрозоле / В.И. Букатый, А.М. Сагалаков, А.А. Тельнихин, А.М. Шайдук // Деп. ВИНИТИ. – 1981. – №2375-81 от 19 июня 1981 г.

3. Шайдук, А.М. О горении аэрозольных частиц в поле электромагнитного излучения / В.И. Букатый, Е.П. Жданов, А.М. Шайдук // Физика горения и взрыва. – 1982. – №3.