УДК 519.6

С.С. Кузиков

К методам численного расчета течений стратифицированной жидкости

Исследование течений неоднородной жидкости представляет интерес как в теоретическом отношении, так и для решений многих практических задач гидроэнергетики, гидрологии, метеорологии и т.д. Наличие вертикального градиента плотности может существенно повлиять на характер течения жидкости. Одним из проявлений указанного фактора является возможность выборочного изъятия определенных слоев водной массы из устойчиво стратифицированного водоема. Обзоры литературы по аналитическим и численным методам исследования стратифицированных течений приводятся в [1–4]. В работах [1, 4] построены решения стационарных уравнений в случае линейной зависимости плотности от функции тока, но они позволяют лишь качественно оценить картину течения. Показано, что при $Fr > \dfrac{1}{\pi}$ областей с возвратным течением нет, а для $Fr < \dfrac{1}{\pi}$ начинается образование таких течений. Авторы работы [5] подобную задачу решили посредством последовательного уточнения границы раздела области селективного отбора и области «возвратного» течения, в которой предполагалось отсутствие течения.

В данной работе предлагается метод численного расчета плоского течения идеальной неоднородной жидкости с помощью аналитического представления решения для функции вихря. Указанные течения в поле силы тяжести описываются системой:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}; \qquad (1)$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-g; \qquad (2)$$

$$u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}=0; \qquad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \qquad (4)$$

где $(x, y) \in \Omega$, Ω – ограниченная область в R^2; $u(x, y)$, $v(x, y)$ – компоненты вектора скорости $\bar{u}=(u,v)$; $\rho(x, y)$ – плоскость; $p(x, y)$ – давление; g – величина ускорения силы тяжести.

Пусть ρ_0 – характерная для данной жидкости плотность. Введем новые переменные:

$$u' = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}u, \quad v' = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}v\,.$$

Функции ψ' и ω' определим следующими соотношениями:

$$\frac{\partial \psi'}{\partial y}=u', \ \ \frac{\partial \psi'}{\partial x}=-v', \ \ \omega'=\frac{\partial v'}{\partial x}-\frac{\partial u'}{\partial x}$$

и будем называть в дальнейшем функцией тока и вихрем.

С помощью известных преобразований и приведения переменных величин к безразмерному виду система уравнений (1)–(4) принимает следующий вид:

$$u\frac{\partial \omega}{\partial x}+v\frac{\partial \omega}{\partial y}=-\frac{1}{Fr^2}\frac{\partial \rho}{\partial x}; \qquad (5)$$

$$u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}=0; \qquad (6)$$

$$\Delta\psi=-\omega; \qquad (7)$$

$$u=\frac{\partial \psi}{\partial y}, \ \ v=-\frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad (8)$$

где $Fr=\dfrac{V_0}{\sqrt{gH\dfrac{\Delta\rho}{\rho_0}}}$ – плотностное число Фруда; V_0 – характерная скорость; H – характерный размер области течения; $\Delta\rho = \rho_{\max} - \rho_{\min}$ (штрихи у переменных опущены).

Решение системы (5)–(8) будем искать в области $\Omega = \{(x, y) \in R^2 \,/\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$, граница которой состоит из трех участков: Γ^0 – непроницаемая часть; Γ^1 – участок втекания; Γ^2 – участок вытекания, причем

$$\Gamma^0 = \{y = 0,\ 0 \le x \le 1\} \cup \{y = 0,\ 0 \le x \le 1\} \cup$$
$$\cup \{x = 1,\ 0 \le y \le y_1,\ y_2 \le y \le 1\};$$
$$\Gamma^1 = \{x = 0,\ 0 \le y \le 1\};$$
$$\Gamma^2 = \{x = 1,\ y_1 \le y \le y_2\},\ 0 \le y_1 < y_2 \le 1.$$

Для системы дифференциальных уравнений (5)–(8) поставим следующие краевые условия:

На Γ^1:

$$\psi=\psi^1(y),\ \left(\frac{\partial\psi^1}{\partial y}>0\right),\ \psi^1(0)=0,\ \psi^1(1)=\psi^0;$$

$$\omega=\omega^1(y);$$
$$\rho=\rho^1(y),\ (0\le\rho^1\le 1);$$

На Γ^0:

$$\psi = 0,\ \{y = 0,\ 0 \le x \le 1\} \cup \{x = 1,\ 0 \le y \le y\};$$
$$\psi = \psi^0 = conts,\ \{y = 1,\ 0 \le x \le 1\} \cup \{x = 1,\ y_2 \le y \le 1\}$$

На Γ^2:

$$\psi=\psi^2(y),\ \left(\frac{\partial\psi^2}{\partial y}>0\right),\ \psi^2(y_1)=\psi^1(0),\ \psi^2(y_2)=\psi^0$$

В терминах вектора скорости граничные условия означают, что всюду на границе области Ω задана нормальная составляющая вектора скорости и, кроме того, на участке втекания дополнительно известны значения вихря ω и плотности ρ.

Приведем некоторые свойства гладких стационарных решений задачи (5)–(8), используемых при ее численном решении. Из уравнения (6) следует, что $\rho(x, y)$ сохраняет постоянное значение на линии тока $\psi = conts$, т.е. $\rho = \rho(\psi)$. Умножая это уравнение на ψ^k, где k – произвольное натуральное число, и интегрируя результат по Ω с учетом краевых условий, получим, что

$$\int_0^{\psi^0} \rho(\psi)\psi^k \,|_{\Gamma^1}\, d\psi = \int_0^{\psi^0} \rho(\psi)\psi^k \,|_{\Gamma^2}\, d\psi.$$

Откуда следует, что

$$\rho(\psi)\,|_{\Gamma^1} = \rho(\psi)\,|_{\Gamma^2}\ . \qquad (9)$$

Так как $\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{d\rho}{d\psi}\frac{d\psi}{dx} = -\frac{d\rho}{d\psi}v,$ то уравнение (5) представимо в виде $u\frac{\partial\omega}{\partial x} + v\frac{\partial\omega}{\partial y} = \frac{1}{Fr^2}\frac{d\rho}{d\psi}v.$

Это уравнение на линиях тока в силу равенств $u = \frac{dx}{dt},\ v = \frac{dy}{dt}$, где t – время, имеет вид:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{Fr^2}\frac{d\rho}{d\psi}\frac{dy}{dt}$$

или

$$d\omega = \frac{1}{Fr^2}\frac{d\rho}{d\psi}dy\ .$$

Интегрируя это уравнение вдоль линии тока, получим:

$$\omega(\psi, y) = \omega^1(\psi) + \frac{1}{Fr^2}\frac{d\rho(\psi)}{d\psi}(y - y_0(\psi))\ , \qquad (10)$$

где $\omega^1(y)$ и y_0 – значения вихря и ординаты y в точке входа данной линии тока $\psi = conts$ в область Ω. Функцию $\rho = \rho(\psi)$ доопределим следующим образом: $\rho(\psi) = \rho(0)$ если $\psi \le 0$; $\rho(\psi) = \rho(\psi_1(1))$ при $\psi \ge 1$.

Для численного решения поставленной задачи в области Ω построим сетку

$$\Omega_h = \{(nh_1, mh_2),\ n = \overline{0,N}, m = \overline{0,M}, h_1 = \frac{1}{N}, h_2 = \frac{1}{M}\}.$$

Множество граничных узлов обозначим Γ_h.

Уравнение (7) аппроксимируем по обычной пятиточечной схеме

$$\begin{aligned}\Delta_h\psi_{n,m} &= \frac{\psi_{n+1,m} - 2\psi_{n,m} + \psi_{n-1,m}}{h_1^2} + \\ &+ \frac{\psi_{n,m+1} - 2\psi_{n,m} + \psi_{n,m-1}}{h_2^2} = -\omega(\psi_{n,m}, y_m)\end{aligned} \ . \qquad (11)$$

$n = \overline{1, N-1},\ m = \overline{1, M-1}$.

Систему алгебраических уравнений (11) замыкаем заданием $\psi_{n,m}$ на Γ_h согласно краевым условиям дифференциальной задачи. Полученная система нелинейных алгебраических уравнений решается итерационным методом переменных направлений [5 6], при этом значение $\psi_{n,m}$ в правой части уравнения (11) берется с предыдущей итерации. Результаты численных расчетов при $\omega^1(y) \equiv 0$ согласуются с ранее проделанными расчетами, приведенными в работе [6, 7], при этом время расчетов значительно сокращается из-за меньшего количества арифметических операций.

Библиографический список

1. Yih, C.S. Stratified flows / C.S. Yih. – New-York, 1980.
2. Васильев, О.Ф. Стратифицированные течения / О.Ф. Васильев, В.И. Квон, Ю.М. Лыткин, И.Л. Розовский // Гидромеханика. Т. 8: Итоги науки и техники. – М., 1975.
3. Белолипецкий, В.М. Численное моделирование задач гидроледотермики водотоков / В.М. Белолипецкий, С.Н. Генова, В.Б. Туговиков, Ю.И. Шокин. – Новосибирск, 1994.
4. Белолипецкий, В.М. Математическое моделирование течений стратифицированной жидкости / В.М. Белолипецкий, В.Ю. Костюк, Ю.И. Шокин. – Новосибирск, 1991.
5. Ингберг М.С. Расчет истечения стратифицированной жидкости через слив с целью определения условия селективного отбора / М.С. Ингберг, А.К. Митра // Теоретические основы инженерных расчетов. – 1988. – №3.
6. Численные методы / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М., 1989.
7. Кузиков С.С. Метод численного расчета задач протекания стратифицированной жидкости / С.С. Кузиков, С.П. Семенов // Вычислительные технологии. – 1995. – Т. 4, №12.
8. Полуэктов, Р.А. Модели продукционного процесса сельскохозяйственных культур / Р.А. Полуэктов, Э.И. Смоляр, В.В. Терлеев, А.Г. Топаж. – СПб., 2006.
8. Сукачева, В.В. Моделирование радиационного режима / А.А. Гриценко, Л.Н. Рудова, В.В. Сукачева, Л.А. Хворова // Известия АлтГУ. – Барнаул, 1999. – №1(11).