УДК 519.49

А.В. Кислицин, Ю.Н. Мальцев

О коммутативности ассоциативных колец, удовлетворяющих тождествам

Введение. В 1905 г. Веддерберн доказал коммутативность любого конечного тела. Этот результат играет большую роль в различных вопросах алгебры, например, в теории представлений групп и в теории алгебр. На нем основывается единственное доказательство того факта, что в конечных проективных плоскостях из справедливости теоремы Дезарга вытекает справедливость теоремы Паппа. Помимо этого, теорема Веддерберна служит отправной точкой в изучении условий, которые влекут за собой коммутативность кольца.

С тех пор, как Веддерберн доказал свою знаменитую теорему, многие ведущие алгебраисты начали доказывать так называемые теоремы коммутативности, т.е. выявлять условия, при которых ассоциативные кольца будут являться коммутативными. Исследования коммутативности колец связаны с такими именами, как И. Капланский, Ш. Амицур, К. Прочези, Х. Белл, К. Фейс, и многими другими.

Цель данной работы – указать условия, накладываемые на кольца, которые влекут их коммутативность. В данной работе рассматриваются только ассоциативные кольца.

Коммутативность PI-колец. В 1993 г. Белл и Клейн в работе [1] рассмотрели часто встречающееся при доказательстве критериев коммутативности тождество $[x^n, y] = nx^{n-1}[x, y]$. Авторы доказали, что если в кольце R для каждого элемента $x \in R$ найдется целое $n = n(x) > 1$ такое, что $[x^n, y] = nx^{n-1}[x, y]$ для всех $y \in R$, то $C(R) \subseteq \mathrm{un}\, R$.

Имеет место следующее обобщение этого результата.

Теорема 1. *Пусть R – ассоциативное кольцо, удовлетворяющее тождеству $[p(x), y] = p'(x)[x, y]$, где $p(t) \in \mathbf{Z}[t]$, $p(1) = \pm 1$, старший коэффициент p равен ± 1 и $p'(1) = n = \deg p \geq 2$. Тогда коммутаторный идеал лежит в ниль-радикале, т.е. $C(R) \subseteq \ln R$. В частности, если R – полупервичное кольцо, то R коммутативно.*

Доказательство. Рассмотрим фактор-кольцо $R/\ln R$, где $\ln R$ – нижний ниль-радикал кольца R. Докажем, что кольцо $R/\ln R$ коммутативно.

По теореме Бэра $R/\ln R = \sum\limits_{i\in I} \oplus_s R_i$, где $R_i = R/P_i$ – первичные кольца. Докажем, что каждое кольцо R_i, $i \in I$ является коммутативным. Итак, пусть R – первичное кольцо, удовлетворяющее тождеству $[p(x), y] = p'(x)[x, y]$.

Тогда R удовлетворяет полилинейному тождеству, некоторый коэффициент которого равен ± 1. По теореме Роуэна $Z(R) \neq (0)$ и $RZ^{-1} = D_m$, где D – тело, причем $T(R) = T(RZ^{-1}) = T(D_m)$; т.е. идеалы тождеств этих колец совпадают. Предположим, что $m > 1$. Подставив в тождество $[p(x), y] = p'(x)[x, y]$ $x = e_{11} + e_{12}$, $y = e_{11} + e_{21}$, получим, что $\pm(e_{11} - e_{12} - e_{21} - e_{22}) = -2ne_{12}$. Противоречие. Следовательно, $m = 1$ и $RZ^{-1} = D$ – тело.

По теореме Капланского $[D : Z(D)] < \infty$. Если $|Z(D)| < \infty$, то $|D| < \infty$ и по теореме Веддерберна $D = Z(D)$.

Если $|Z(D)| = \infty$, то, делая подстановки $x \to \lambda x$ и выделяя однородную компоненту старшей степени, получим тождество $[x^n, y] = nx^{n-1}[x, y]$ в теле D. Пусть K – максимальное подполе в теле D. Тогда $D \otimes_{ZZ^{-1}} K = K_t$ и K_t удовлетворяет тождеству $[x^n, y] = nx^{n-1}[x, y]$.

Предположим, что $t > 1$. Подстановка $x = e_{11} + e_{12}$, $y = e_{11} + e_{21}$ приводит к противоречию, т.е. $t = 1$. Получим, что $D = D \otimes_{ZZ^{-1}} 1 \subset D \otimes_{ZZ^{-1}} K = K$, т.е. D – поле. Следовательно, первичное кольцо R является коммутативным кольцом.

Следовательно, кольцо $R/\ln R$ коммутативно и любой коммутатор, а значит и коммутаторный идеал $C(R)$, лежат в ниль-радикале $\ln R$. В частности, если R – полупервичное кольцо, то оно коммутативно.

Теорема доказана.

В работе [2] исследовались кольца с делением, удовлетворяющие тождеству $(xy)^n = x^m y^m$ $(n + m \geq 3)$. Авторы доказали коммутативность тела, удовлетворяющего этому соотношению. Ослабление условия, наложенного авторами на тело, привело к следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть D – тело. Если существуют такие многочлены $f(t)$, $g(t)$, $h(t) \in \mathbf{Z}[t]$, что степень хотя бы одного из них больше 1, их старшие коэффициенты равны ± 1 и для любых $x, y \in R$ выполняется тождество $f(xy) = g(x)h(y)$, то D – поле.*

Доказательство. Пусть $f(t) = a_0t^n + a_1t^{n-1} + \ldots + a_n$, $g(t) = b_0t^m + b_1t^{m-1} + \ldots + b_m$, $h(t) = c_0t^k + c_1t^{k-1} + \ldots + c_k$, где $a_0 = \pm 1$, $b_0 = \pm 1$, $c_0 = \pm 1$.

Линеаризуем тождество $f(xy) = g(x)h(y)$ относительно переменной x, для чего рассмотрим случаи:

1) $n < m$.

В этом случае линеаризация по x приводит к тождеству $(\sum x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m})h(y) = 0$. Линеаризуя полученное тождество по y, будем иметь, что $(\sum x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m})(\sum y_{j_1} y_{j_2} \ldots y_{j_m}) = 0$ – нетривиальное полилинейное тождество в теле D.

2) $n > m$.

Тогда линеаризация по x приводит к тождеству $\sum x_{i_1} yx_{i_2} y...x_{i_m} y = 0$. Следовательно, D удовлетворяет нетривиальному полилинейному тождеству.

3) $n = m$.

Тогда линеаризация по x и по y опять приводит нас к нетривиальному полилинейному тождеству $(\sum x_{i_1} x_{i_2} ...x_{i_m})(\sum y_{j_1} y_{j_2} ...y_{j_m}) - -\sum x_{l_1} y_{t_1} x_{l_2} y_{t_2} ...x_{l_m} y_{t_m} = 0$.

Получили, что в любом случае тело D удовлетворяет нетривиальному полилинейному тождеству.

По теореме Капланского тело D конечномерно над своим центром $Z(D)$.

Если центр $Z(D)$ конечен, то по теореме Капланского D конечно и по теореме Веддерберна $D = Z(D)$.

Пусть $|Z(D)| = \infty$. Рассмотрим случаи.

1) $n < m$.

Тогда выделим однородную компоненту степени m по x. Получим: $x^m h(y) = 0$. Выделим однородную компоненту степени k по y. Получим, что $x^m y^k = 0$. Но в теле нет делителей нуля, значит этот случай невозможен.

2) $n > m$.

Тогда $(xy)^n = 0$. Но в теле не может быть ненулевых нильпотентных элементов, следовательно, второй случай также невозможен.

Получили, что $n = m$, а значит, $n = m = k$. Положим $\deg f = \deg g = \deg h = n$.

Выделяя теперь однородную компоненту старшей степени в тождестве $f(xy) = g(x)h(y)$, получим: $(xy)^n = x^n y^n$.

Пусть K – максимальное подполе в теле D. Тогда $D \otimes_{Z(D)} K = K_t$. На K_t переносятся однородные компоненты тождества $f(xy) = g(x)h(y)$. В частности, в K_t выполнимо тождество $(xy)^n - x^n y^n = 0$. Предположим, что $t > 1$. Выполняя подстановку $x = e_{12}$, $y = e_{21}$, получим, что $e_{11} = 0$. Противоречие. Следовательно, $t = 1$. Имеем: $D = D \otimes_{Z(D)} 1 \subseteq D \otimes_{Z(D)} K = K$. Таким образом, $D = Z(D)$ – поле.

Теорема доказана.

В 1992 г. Лаффи и МакХэйл в работе [3] показали, что любое кольцо, удовлетворяющее тождеству $f(x) = 0$, где $f(t) = a_1t + a_2t^2 + \ldots + a_nt^n \in t\,\mathbf{Z}[t]$ будет коммутативным тогда и только тогда, когда $a_1 = \pm 1$, либо $a_1 = \pm 2$, $a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ – нечетное и a_2 – нечетное.

Заменив тождество $f(x) = 0$ на $f(g(x)) = 0$, где $g(t) = b_1t + b_2t^2 + \ldots + b_mt^m \in t\,\mathbf{Z}[t]$, удалось получить следующий результат.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{R}$ = var <$f(g(x)) = 0$>, где $f(t) = a_1t + a_2t^2 + \ldots + a_nt^n \in t\,\mathbf{Z}[t]$, $g(t) = b_1t + b_2t^2 + \ldots + b_mt^m \in t\,\mathbf{Z}[t]$. $\mathfrak{R}$ – коммутативное многообразие в том и только том случае, когда выполнено одно из условий:*

1) $b_1 = \pm 1$, $a_1 = \pm 2$, a_2 – нечетное, $a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ – нечетное, $g(1)$ – нечетное;

2) $a_1 = \pm 1$, $b_1 = \pm 2$, b_2 – нечетное $b_2 + b_3 + \ldots + b_m$ – нечетное, $f(1)$ – нечетное;

3) $a_1 = \pm 1$, $b_1 = \pm 1$.

Доказательство. Заметим, что

$$f(g(x)) = a_1(\sum_{i=1}^{m} b_i x^i) + a_2(\sum_{i=1}^{m} b_i x^i)^2 + \ldots + a_n(\sum_{i=1}^{m} b_i x^i)^n = ,$$

$$= c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_{nm}x^{nm}$$

где $c_1 = a_1b_1$, $c_2 = a_1b_2 + a_2b_1^2$.

По теореме Лаффи произвольное кольцо R, удовлетворяющее тождеству $f = 0$ является коммутативным в том и только том случае, когда либо $c_1 = \pm 1$, либо

1) c_2 – нечетное;

2) $c_1 = \pm 2$;

3) $c_2 + c_3 + \ldots c_{nm}$ – нечетное.

Предположим, что $\mathfrak{R}$ – коммутативное многообразие. Тогда по теореме Лаффи либо $c_1 = a_1b_1 = \pm 1$, либо $c_1 = \pm 2$, c_2 – нечетное и $c_2 + c_3 + \ldots c_{nm}$ – нечетное.

Если $c_1 = \pm 1$, то $a_1 = \pm 1$ и $b_1 = \pm 1$. Если же $c_1 = \pm 2$, c_2 – нечетное и $c_2 + c_3 + \ldots c_{nm}$ – нечетное, то рассмотрим следующие случаи.

Случай 1. $a_1 = \pm 1$, $b_1 = \pm 2$.

По теореме Лаффи, $c_2 = \pm b_2 + 4a_2$ – нечетное, а значит и b_2 – нечетное. $c_2 = a_1b_2 + a_2b_1^2 = \pm b_2 + 4a_2$ и $c_2 + c_3 + \ldots + c_{nm} = f(g(1)) - a_1b_1$. Следовательно, $f(g(1)) = c_1 + c_2 + \ldots c_{nm}$ – нечетное число и $b_1 + b_2 + \ldots b_m$ – нечетное, поскольку в противном случае $a_1(b_1 + b_2 + \ldots + b_m) + a_2(b_1 + b_2 + \ldots + b_m)^2 + \ldots + a_n(b_1 + b_2 + \ldots + b_m)^n$ было бы четным.

Таким образом, получим что $b_1 = \pm 2$, b_2 – нечетное, $b_2 + b_3 + \ldots + b_m$ – нечетное и $a_1 = \pm 1$. При этом $f(1)$ – нечетное, так как в противном случае $a_1(b_1 + b_2 + \ldots + b_m) + a_2(b_1 + b_2 + \ldots + b_m)^2 + \ldots + a_n(b_1 + b_2 + \ldots + b_m)^n$ было бы четным, что противоречит теореме Лаффи.

Случай 2. $a_1 = \pm 2$, $b_1 = \pm 1$.

Тогда $c_1 = \pm 2$. Поскольку c_2 – нечетное, то a_2 также нечетное. Так как $c_2 + c_3 + \ldots + c_{nm}$ – нечетное, то получим, что $b_1 + b_2 + \ldots + b_m$ также нечетно. Поскольку $a_1(b_1 + b_2 + \ldots + b_m) + a_2(b_1 + b_2 + \ldots + b_m)^2 + \ldots + a_n(b_1 + b_2 + \ldots + b_m)^n$ нечетно, то $a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ также нечетное и $g(1)$ – нечетное.

Получим, что $b_1 = \pm 1$, $a_1 = \pm 2$, a_2 – нечетное, $a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ – нечетное и $g(1)$ – нечетное.

Докажем обратное.

Пусть $\mathfrak{R}$ = *var* <$f(g(x)) = 0$>. Рассмотрим случаи.

Случай 1. $a_1 = \pm 1$, $b_1 = \pm 1$.

Тогда $\mathfrak{R}$ – коммутативное многообразие в силу теоремы Лаффи.

Случай 2. $b_1 = \pm 1$, $a_1 = \pm 2$, a_2 – нечетное, $a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ – нечетное.

Тогда $f(g(1)) = 2(\pm x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m) + a_2(\pm x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m) + \ldots + a_n(\pm x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m)^n = \pm 2x + (2b_2 \pm a_2)x^2 + \ldots$, где $2b_2 \pm a_2$ – нечетное. Покажем, что $c_2 + c_3 + \ldots + c_{nm}$ – нечетное. $f(g(1)) \equiv (a_2 + a_3 + \ldots + a_n)g(1) \equiv 1(\mathrm{mod}2)$. Получим, что $c_2 + c_3 + \ldots + c_{nm}$ будет нечетным, поскольку $a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ и $g(1)$ – нечетные по условию.

Случай 3. $a_1 = \pm 1$, $b_1 = \pm 2$, b_2 – нечетное $b_2 + b_3 + \ldots + b_m$ – нечетное.

Тогда $f(g(x)) = \pm(\pm 2x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m) + a_2(\pm 2x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m) + \ldots + a_n(\pm 2x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m)^n = \pm 2x + (\pm b_2 + b_1^2a_2)x^2 + \ldots = \pm 2x + (\pm b_2 + 4a_2)x^2 + \ldots$. В итоге получим, что $f(g(1)) \equiv (b_2 + b_3 + \ldots + b_n)(\pm(a_2 + a_3 + \ldots + a_n)) \equiv 1(\mathrm{mod}2)$. Поскольку $b_2 + b_3 + \ldots + b_m$ – нечетное и $f(1)$ – нечетное, то $f(g(1)) = c_2 + c_3 + \ldots + c_{nm})$ также будет нечетным.

По теореме Лаффи $\mathfrak{R}$ – коммутативное многообразие.

Теорема доказана.

Коммутативность PI-колец нулевой характеристики. Кроме тел П. Андрзеевский и Б. Гланк в работе [2] рассмотрели кольца с единицей нулевой характеристики, удовлетворяющие тождествам $(xy)^n = x^ny^n$ и $(xy)^n = (yx)^n$. Авторы доказали коммутативность данного класса колец с этими тождествами. Ослабив условия, наложенные авторами на эти кольца, мы доказали следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть R – кольцо с единицей и char R = 0. Если найдутся такие многочлены* $f(t)$, $g(t)$, $h(t) \in t\,\mathbf{Z}[t]$, *что степень хотя бы одного из них больше* 1 *и для всех* $x, y \in R$ *выполняется тождество* $f(xy) = g(x)h(y)$, *то R коммутативно.*

Доказательство. Пусть $f(t) = a_0t^n + a_1t^{n-1} + \ldots + a_n$, $g(t) = b_0t^m + b_1t^{m-1} + \ldots + b_m$, $h(t) = c_0t^k + c_1t^{k-1} + \ldots + c_k$.

Покажем, что степени многочленов равны, т.е. $n = m = k$. В начале покажем, что $2n = m + k$. Пусть это не так. Тогда либо $2n > m + k$, либо $2n < m + k$. Пусть, например, $2n > m + k$. В тождестве $f(xy) = g(x)h(y)$ положим $x = y$. Тогда в полученном тождестве старший член будет иметь вид a_0x^{2k} и $a_0x^{2k} = 0$. Полагая $x = 1$, получим, что $a_0 = 0$. Противоречие.

Аналогично показывается невозможность случая $2n < m + k$. Следовательно, $2n = m + k$.

Предположим теперь, что $m \neq n$. Тогда либо $m > k$, либо $m < k$. Пусть, например, $m > k$. По лемме 1 $b_0x^mh(y) = 0$. Снова получаем, что $b_0x^my^k = 0$. Полагая $x = y = 1$, получим, что $b_0 = 0$. Противоречие. Аналогично можно показать, что случай $m < k$ также невозможен. Итак, $n = m = k$. Будем полагать, что $\deg f = \deg g = \deg h = n$. Выделим в тождестве $f(xy) - g(x)h(y) = 0$ однородную компоненту старшей степени. Будем иметь: $a_0(xy)^n - b_0c_0x^ny^n = 0$. Положив $x = y = 1$, получим, что $a_0 = b_0c_0$. Поскольку $char\ R = 0$, то $(xy)^n - x^ny^n = 0$ – тождество в кольце R.

В тождестве $(xy)^n - x^ny^n = 0$ сделаем замену $x \to x + 1$. Получим, что $(xy + y)^n - (x + 1)^n y^n = 0$. Выделим в полученном тождестве однородную компоненту первой степени по x: $xy^n + y(xy)y^{n-2} + y^2(xy)y^{n-3} + \ldots + y^{n-1}xy - nxy^n = 0$. Затем сделаем замену $y \to y + 1$. Получим: $x(y + 1)^n + (y + 1)x(y + 1)^{n-1} + (y + 1)^2x(y + 1)^{n-2} + \ldots + (y + 1)^{n-1}x(y + 1) - nx(y + 1)^n = 0$.

Теперь выделим однородную компоненту первой степени относительно y: $nxy + yx + (n-1)xy + 2yx + (n-2)xy + \ldots + (n-1)yx + xy - n^2xy = 0$. Получим, что $xy(n + (n-1) + \ldots + 1 - n^2) + yx(1 + 2 + \ldots + (n-1)) = 0$, $(\frac{n(n-1)}{2} - n^2)xy + \frac{n(n-1)}{2}yx = 0$, $\frac{n(n-1)}{2}xy = \frac{n(n-1)}{2}yx$, откуда $\frac{n(n-1)}{2}[x, y] = 0$. Так как в $<R, +>$ нет аддитивного кручения, то $[x, y] = 0$ для всех $x, y \in R$.

Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть R – кольцо с единицей и char R = 0. Если найдутся такие многочлены* $f(t)$, $g(t) \in \mathbf{Z}[t]$, *что для всех* $x, y \in R$ *выполняется тождество* $f(xy) = g(yx)$, *то R – коммутативное кольцо.*

Доказательство. Пусть $f(t) = a_0t^n + a_1t^{n-1} + \ldots + a_n$, $g(t) = b_0t^m + b_1t^{m-1} + \ldots + b_m$.

Покажем, что степени многочленов f и g равны, т.е., $n = m$.

Если $n > m$, то получим, что $a_0(xy)^n = 0$. Противоречие.

Если же $n < m$, то вновь получаем $b_0(yx)^m = 0$. Снова противоречие. Итак, $n = m$. Будем полагать, что $\deg f = \deg g = n$.

Выделим в тождестве $f(xy) - g(yx) = 0$ однородную компоненту старшей степени. Будем иметь: $a_0(xy)^n - b_0(yx)^n = 0$. Положив $x = y = 1$, получим, что $a_0 = b_0$. Поскольку $char\ R = 0$, то $(xy)^n - (yx)^n = 0$ – тождество в кольце R.

В тождестве $(xy)^n - (yx)^n = 0$ сделаем замены $x \to x + 1$ и $y \to y + 1$. Выделяя после этого однородную компоненту первой степени по x и по y, получим, что $a(xy) = b(yx)$, где a и b – некоторые целые числа. Полагая $x = y = 1$, получим, что $a = b$. Поскольку $char\ R = 0$, то $xy = yx$ – тождество в кольце R.

Теорема доказана.

О гипотезе Мохаррама Хана. В работе [4] была сформулирована следующая гипотеза: пусть R – ассоциативное кольцо с единицей, α, β – автоморфизмы R и найдется целое $n > 1$ такое, что для любого $x \in R$ $\alpha(x^{n+1}) \pm \beta(x^n) \in Z(R)$. Будет ли R коммутативно?

Автор доказал справедливость этой гипотезы при $n = 2, 3, 4$ и при ограничениях на автоморфизмы. В данной работе доказаны следующие результаты. В частности, мы докажем справедливость гипотезы Хана при $n = 7, 8$.

Лемма 6. *Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей и* $a, b \in R$. *Если* $a^nb = 0$ *и* $(a + 1)^n b = 0$ *для некоторого целого положительного n, то* $b = 0$.

Доказательство. Пусть n – минимальное целое положительное число, удовлетворяющее условиям леммы. Воспользовавшись формулой бинома Ньютона, будем иметь: $a^nb + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b + \ldots + C_n^{n-1}ab + b = 0$. Умножив полученное равенство слева на a^{n-1}, получим, что $a^{n-1}b = 0$. Противоречие с минимальностью n.

Лемма доказана.

Теорема 7. *Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей,* α, β *– автоморфизмы R и найдется целое* $n > 1$ *такое, что для любого* $x \in R$ $\alpha(x^{n+1}) \pm \beta(x^n) \in Z(R)$. *Тогда* $2x \in Z(R)$. *В частности, если кольцо R – без 2-кручения, то оно коммутативно.*

Доказательство. Пусть $\alpha(x^{n+1}) + \beta(x^n) \in Z(R)$ и пусть, для определенности, n – нечетное. Заменяя

$x \to -x$, получим, что $\alpha(x^{n+1}) + \beta(x^n) \in Z(R)$. Складывая полученное отношение с исходным и вычитая из него, получим, что $2x^{n+1}$, $2x^n \in Z(R)$. Другими словами, $[2x^{n+1}, y] = 0$ и $[2x^n, y] = 0$ – тождества в R. Тогда $[2x^{n+1}, y] = 2x^n[x, y] + [2x^n, y]x = 0$. Отсюда получаем, что $x^n[2x, y] = 0$. В полученном равенстве заменим $x \to x + 1$. Получим, что $(x + 1)^n\, [2x, y] = 0$. Теперь из равенств $x^n[2x, y] = 0$ и $(x + 1)^n\, [2x, y] = 0$ по лемме 6 следует, что $[2x, y] = 0$. Если в R отсутствует 2-кручение, то $[x, y] = 0$.

Теорема доказана.

При помощи этой теоремы удалось получить следующие результаты.

Теорема 8. *Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей, α, β – автоморфизмы R и для любого $x \in R$ $\alpha(x^8) \pm \beta(x^7) \in Z(R)$. Тогда R коммутативно.*

Доказательство. Пусть $\alpha(x^8) \pm \beta(x^7) \in Z(R)$. Заменим $x \to x + 1$. Будем иметь: $\alpha\,(x^8 + 8x^7 + 28x^6 + 56x^5 + 70x^4 + 56x^3 + 28x^2 + 8x) + \beta\,(x^7 + 7x^6 + 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 + 21x^2 + 7x) \in Z(R)$. Используя теорему 7 и соотношение $\alpha(x^8) + \beta(x^7) \in Z(R)$, получим, что $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x \in Z(R)$. По известной теореме Херстейна R коммутативно.

Теорема доказана.

Теорема 9. *Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей, α, β – автоморфизмы R и для любого $x \in R$ $\alpha(x^9) + \beta(x^8) \in Z(R)$. Тогда R коммутативно.*

Доказательство. Пусть $\alpha(x^9) + \beta(x^8) \in Z(R)$. Заменим $x \to x + 1$. Получим:

$\alpha\,(x^9 + 9x^8 + 36x^7 + 84x^6 + 126x^5 + 126x^4 + 84x^3 + 36x^2 + 9x) + \beta\,(x^8 + 8x^7 + 28x^6 + 56x^5 + 70x^4 + 56x^3 + 28x^2 + 8x) \in Z(R)$. Используя теорему 7 и соотношение $\alpha(x^9) + \beta(x^8) \in Z(R)$, получим, что $x^8 + x \in Z(R)$. По теореме Херстейна R коммутативно.

Теорема доказана.

Библиографический список

1. Bell, H. Two Commutativity Problems for Rings / H. Bell, A. Klein // Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 28. – 1993.

2. Andrzejewski, P. A Note on the Commutativity of Rings / P. Andrzejewski, B. Glanc // Demonstratio Mathematica. – 2006. – Vol. XXXIX, №2.

3. Laffey, T. Polynomials that Force a Ring to Be Commutative / T. Laffey, D. MacHale // Proceedings of the Royal Irish Akademy. – 1992. – №2.

4. Khan, M. Commutativity of Rings with Constraints on Pair of Automorphisms / M. Khan // Advances in Theoretical and Applied Mathematics. – 2006. – Vol. 1, №2.