УДК 517.765

С.В. Дронов

О свойстве фундаментальности сегментов класса натуральных чисел

Настоящая работа выполнена в аксиоматике альтернативной теории множеств (AST) и продолжает цикл работ, посвященных задаче распространения функций и последовательностей на гипердействительные структуры. При построении одного из распространений (способ микрокопирования) в [1] возникла проблема существования предела фундаментальной последовательности в гипердействительной структуре, построенной по сегменту A, более широкому, чем сегмент конечных натуральных чисел $\mathbf{FN}$. Те сегменты, для которых такие пределы существуют, в [1] назывались фундаментальными. Здесь мы докажем, что практически все нетривиальные сегменты $\mathbf{N}$ являются таковыми, а также рассмотрим вопрос существования пределов монотонных ограниченных последовательностей и ситуацию, когда фундаментальная последовательность содержит лишь счетное количество членов.

1. Фундаментальность последовательных сегментов. Всюду в работе под словом *сегмент* условимся понимать начальный отрезок класса натуральных чисел $\mathbf{N}$. Сегмент A называем аддитивным, если для любых $n, m \in A$ справедливо $n + m \in A$. Как в [1], через $^*_A\mathbf{R}$ будем обозначать гипердействительную структуру, порожденную этим сегментом. A-последовательность $\mathbf{x} = \{x_n,\ n \in A\} \subset {^*_A\mathbf{R}}$ условимся называть фундаментальной, если она теоретико-множественно определима и

$$(\forall n \in A)(\exists j_n \in A)(\forall t, s \in A)$$
$$t, s \geq j_n \ \Rightarrow\ |x_t - x_s| \leq \tfrac{1}{n}. \qquad (1)$$

Число $x \in {^*_A\mathbf{R}}$ назовем пределом $\mathbf{x}$ относительно A, если

$$(\forall k \in A)(\exists v_k \in A)(\forall t \in A)$$
$$t \geq v_k \Rightarrow |x_t - x| \leq \tfrac{1}{k}. \qquad (2)$$

Сегмент A, следуя [1], будем называть фундаментальным, если любая фундаментальная A-последовательность имеет предел относительно A.

Замечание 1. Поскольку арифметические операции и отношение порядка на $^*_A\mathbf{R}$ определяются по рациональным представителям соответствующих элементов гипердействительной структуры, то все вопросы, связанные с (1)–(2), можно решать в рамках класса рациональных чисел $\mathbf{Q}$. Например, (2) выполнено тогда и только тогда, когда при произвольном выборе рациональных $^*x_n \in x_n$, некотором $^*x \in \mathbf{Q}$ и произвольном $k \in A$ имеет место

$$(\exists v_k \in A)(\forall t \in A)\ t \geq v_k \Rightarrow |^*x_t - {^*x}| \leq \frac{1}{k}.$$

Тогда в качестве x в (2) можно взять тот элемент $^*_A\mathbf{R}$, представителем которого является $^*x$, что мы будем записывать как $x = {^\circ_A}(^*x)$.

Описанный сейчас процесс коротко договоримся называть переходом в $\mathbf{Q}$.

Лемма 1. *Пусть сегмент A аддитивен. Тогда любая теоретико-множественно определимая A-последовательность элементов $^*_A\mathbf{R}$, имеющая предел, фундаментальна.*

Доказательство. Пусть выполнено (2), $k \in A$ и $t, s \geq v_{2k}$. Тогда

$$|x_t - x_s| \leq |x_t - x| + |x_s - x| \leq \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть A – аддитивный сегмент, A-последовательность $\mathbf{x}$ монотонна и фундаментальна. Тогда $\mathbf{x}$ имеет предел относительно A.*

Замечание 2. Несмотря на то, что фундаментальные последовательности являются ограниченными, одной монотонности и ограниченности оказывается недостаточно для существования предела. Пусть, например, $\alpha \notin \mathbf{FN}$, $A = \{\gamma \in \mathbf{N} : (\exists k \in \mathbf{FN})\ \gamma < \alpha k\}$. Рассмотрим $x_n = \sqrt{n}, n \in A$. Ясно, что сегмент аддитивен и $x_n < \alpha$. Тем не менее предел у $\mathbf{x}$ отсутствует в силу леммы 1, поскольку при произвольном n $|x_{2n} - x_n| > 0,4\sqrt{n}$.

Доказательство леммы 2. Перейдем в $\mathbf{Q}$ и будем считать, что $\mathbf{x}$ возрастает. Зафиксируем некоторое $n \in A$ и построим монотонное продолжение $\mathbf{x}$ до некоторого $\alpha_n \notin A$ так, чтобы для любого натурального m выполнялось

$$j_n \leq m \leq \alpha_n \ \Rightarrow\ |{^*x_{\alpha_n}} - {^*x_m}| \leq \frac{1}{n}.$$

Возможность построения такого продолжения обоснована в [2]. Отсюда при $m \in A$

$$m \geq j_n \Rightarrow \left(-\frac{1}{n} + {^*x_{\alpha_n}} \leq {^*x_m} < {^*x_{\alpha_n}}\right). \quad (3)$$

Без ограничения общности можно считать, что A-последовательность $\alpha_n,\ n \in A$ не возрастает и, по теореме 1 из [3], $A \neq \cap\{\alpha_n,\, n \in A\}$. Поэтому найдется такое $\alpha \notin A$, что $(\forall n \in A)\ \alpha_n \geq \alpha$. Выберем $x = {}^{\circ}_{A}({}^{*}x_{\alpha})$ – это тот элемент ${}^{*}_{A}\mathbf{R}$, для которого ${}^{*}x_{\alpha}$ является представителем. Член последовательности с номером α может быть взят из любого из построенных продолжений – нетрудно показать, что они идентичны с точки зрения A-отождествления.

При $m \geq j_n$ из (3) получаем, что

$$^{*}x_m \geq {}^{*}x_{\alpha_n} - \frac{1}{n} \geq {}^{*}x_{\alpha} - \frac{1}{n},$$

откуда, привлекая монотонность и замечание 1, приходим к справедливости (2). Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть A – аддитивный сегмент $\mathbf{x} \subset {}^{*}_{A}\mathbf{R}$ – теоретико-множественно определимая A-последовательность. Тогда из $\mathbf{x}$ можно выбрать монотонную подпоследовательность $y_p = x_{n_p},\ p \in A$.*

Доказательство. Число $a \in {}^{*}_{A}\mathbf{R}$ назовем левым для последовательности $\mathbf{x}$, если

$$(\forall n \in A)(\exists k_n \in A)\ k_n \geq n \ \&\ x_{k_n} \geq a.$$

Все числа, не являющиеся левыми, назовем правыми. Все члены $\mathbf{x}$, лежащие справа от левого числа a, или, соответственно, слева от правого числа a, назовем подконтрольными числами для a. Построим вспомогательную последовательность $z_k,\ k \in A$ по индукции. Пусть $z_1 = x_1$. Если z_k уже построено, то в качестве z_{k+1} возьмем любое из чисел, подконтрольных z_k. Далее возможны два случая.

1. $(\exists m \in A)(\forall n \geq m)\ z_n$ – левое число. Тогда $y_p = z_{m+p},\ p \in A$ монотонно не убывает;
2. $(\forall m \in A)(\exists n_m \in A)\ z_{n_m}$ – правое число. Тогда $y_p = z_{n_p},\ p \in A$ монотонно не возрастает.

Лемма доказана.

Теорема 1. *Сегмент $\mathbf{N}$ фундаментален тогда и только тогда, когда аддитивен.*

Доказательство. Пусть A – аддитивный сегмент, A-последовательность $\mathbf{x}$ фундаментальна. Выберем из нее монотонную подпоследовательность $y_p = x_{n_p},\ p \in A$. По лемме 2 у нее есть предел $x \in {}^{*}_{A}\mathbf{R}$, т.е., для произвольного $n \in A$

$$(\exists \gamma_n \in A)(\forall p \in A)\ p \geq \gamma_n \Rightarrow |y_p - x| \leq \frac{1}{n}. \quad (4)$$

Возьмем любое $k \in A$ и выберем $p \in A,\ p > \max\{j_{2k},\ \gamma_{2k}\}$. Тогда $n_p \geq j_{2k}$, и из (1), (4) следует, что при $t \geq j_{2k}$ выполнено

$$|x_t - x| \leq |x_t - y_p| + |y_p - x| \leq \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k},$$

что совпадает с (2).

Рассмотрим теперь простой пример, показывающий, что без условия аддитивности сегмент не является фундаментальным. Пусть сегмент A не аддитивен. Тогда при достаточно больших $\gamma \in A\ 2\gamma \notin A$. Возьмем одно из таких γ. Рассмотрим $x_n = \frac{2}{n},\ n \in A$. Убедимся, что эта последовательность фундаментальна. Для этого выберем $t, s \in A, t > s > \gamma$. В этих предположениях

$$|x_t - x_s| < \frac{2(t-\gamma)}{t\gamma} = \frac{2}{\gamma} - \frac{2}{t} < \frac{2}{\gamma} - \frac{2}{2\gamma} = \frac{1}{\gamma}.$$

Осталось заметить, что в справедливости (1) достаточно было убедиться для больших n.

С другой стороны, ясно, что единственный претендент на роль предела этой последовательности – число 0 – не удовлетворяет (2). Действительно, при том же выборе γ

$$|x_n| < \frac{1}{\gamma} \Longleftrightarrow n > 2\gamma,$$

но $2\gamma \notin A$. Теорема доказана.

2. Об углублении свойства фундаментальности. Естественным образом возникает желание погрузить неаддитивный сегмент в больший аддитивный. Эту возможность мы сейчас и рассмотрим.

Теорема 2. *Пусть A – последовательный сегмент, $\alpha \notin A$. Тогда для произвольной фундаментальной A-последовательности $\mathbf{x}$ найдется сегмент B, заключенный между A и α, и продолжение $\mathbf{x}$, которое имеет предел относительно B. Сегмент B может быть дополнительно наделен свойством замкнутости относительно любой заранее фиксированной теоретико-множественно определимой операции.*

Доказательство. Перейдем в $\mathbf{Q}$. Из теоретико-множественной определимости $\mathbf{x}$ следует, что ее возможно продолжить за A. Пусть она определена при $n \leq \delta,\ \delta \notin A$. Из (1) и теоремы 1 в [3], как и при доказательстве леммы 2, извлекаем возможность найти такое $\delta_0 \notin A$, что для любого $\gamma \in A$

$$(\exists j_\gamma)(\forall t, s)\ j_\gamma \leq t, s \leq \delta_0 \Rightarrow |x_t - x_s| \leq \frac{1}{\gamma}.$$

Продолжим последовательность j_γ до некоторого $\beta \notin A$. Выберем аддитивный сегмент B так, чтобы он обладал нужными свойствами замкнутости и $A \subseteq B \subset \min\{\delta, \delta_0, \beta, \alpha\}$. Это можно сделать в соответствии с теоремой 12 из [4]. Тогда (при обратном переходе в ${}^*_A\mathbf{R}$) последовательность $x_n, n \in B$ имеет предел по теореме 1. Теорема доказана.

3. Существование σ-пределов. В п. 5 работы [1] было введено понятие σ-сходящейся последовательности. Рассмотрим здесь это понятие подробнее. Счетный класс элементов $\mathbf{x} = \{x_n,\ n \in \mathbf{FN}\} \subset {}^*_A\mathbf{R}$ назывался в работе [1] σ-фундаментальной последовательностью, если

$$(\forall n \in A)\,(\exists j_n \in \mathbf{FN})\,(\forall t, s \in \mathbf{FN})$$
$$t, s \leq j_n \;\Rightarrow\; |x_t - x_s| \leq \tfrac{1}{n}. \qquad (5)$$

Там же $\mathbf{x}$ названа σ-сходящейся относительно A, если найдется $x \in {}^*_A\mathbf{R}$ такой, что для любого $k \in A$) имеет место

$$(\exists v_k \in \mathbf{FN})(\forall p \in \mathbf{FN})\; p \geq v_k \Rightarrow |x_p - x| \leq \frac{1}{k}. \quad (6)$$

Соответствующий x мы называем σ-пределом изучаемой последовательности $\mathbf{x}$. Сегмент A назовем σ-фундаментальным, если любая σ-фундаментальная последовательность является σ-сходящейся относительно A. Следующее утверждение очевидно.

Лемма 4. *Если A – аддитивный сегмент, то любая σ-сходящаяся относительно A последовательность является σ-фундаментальной.*

Для дальнейшего нам потребуется еще одно понятие. Пусть B – произвольный сегмент. B-последовательность $\mathbf{m} = \{m_k,\ k \in B\}$ условимся называть стабилизирующейся, если

$$(\exists p \in B)\,(\forall k \in B)\; k \geq p \Rightarrow m_k = m_p.$$

Лемма 5. *Пусть сегмент B строго больше* $\mathbf{FN}$, $\mathbf{m} = \{m_s,\ s \in B\} \subset \mathbf{FN}$ *– монотонно неубывающая теоретико-множественно определимая B-последовательность. Если она не стабилизируется, то B – σ-сегмент, т.е. найдется счетный набор натуральных чисел* $\alpha_j,\ j \in \mathbf{FN}$, *такой, что* $B = \cup\{\alpha_j | j \in \mathbf{FN}\}$.

Доказательство. Если $\mathbf{m}$ не стабилизируется, то можно построить ее строго возрастающую подпоследовательность $m_{k_j},\ j \in \mathbf{FN}$ по индукции. При этом в силу строгой монотонности для произвольного j будет выполнено $m_{k_j} \geq j$, откуда $\cup\{m_{k_j} | j \in \mathbf{FN}\} = \mathbf{FN}$. Определим

$$A_j = \{n \in B |\, m_n \leq m_{k_j}\},\ j \in \mathbf{FN}.$$

Тогда из свойств монотонности $\mathbf{m}$ следует, что A_j – теоретико-множественно определимый сегмент, т.е. натуральное число (см., например: [2, лемма 1]), которое мы и обозначим α_j. Очевидно, что $\alpha_j, j \in \mathbf{FN}$ – требуемый набор, поскольку

$$t \in B \;\Rightarrow\; m_t \in \mathbf{FN} \Rightarrow (\exists j)\; m_t \leq m_{k_j}.$$

Лемма доказана.

Теорема 3. *Произвольный аддитивный сегмент σ-фундаментален.*

Доказательство. Пусть A аддитивен. Исходя из (5), рассмотрим класс последовательностей $\mathbf{j} = \{j_n,\ n \in A\} \subset \mathbf{FN}$ для всех возможных σ-фундаментальных последовательностей $\mathbf{x}$. Очевидно, что $\mathbf{j}$ можно считать неубывающей. Если хотя бы одна $\mathbf{j}$ не стабилизируется, то A – σ-сегмент. Но, как следует из [1, лемма 3] и теоремы 1 настоящей работы, такой сегмент является σ-фундаментальным.

Если же все $\mathbf{j}$ стабилизируются, то перейдем в $\mathbf{Q}$ и рассмотрим любую конкретную $\mathbf{x}$. Для произвольного $n \in A$ при $t, s \geq j_p$ справедливо $|x_t - x_s| \leq \frac{1}{n}$. Это означает, что x_t, x_s в ${}^*_A\mathbf{R}$ совпадают, т.е. при $t \geq j_p$ последовательность $\mathbf{x}$ постоянна, и существование ее предела очевидно. Теорема доказана.

Замечание 3. Из доказательства теоремы 3 вытекает, что понятие σ-предела имеет содержательный характер лишь для σ-сегментов. Для остальных сегментов класс σ-фундаментальных последовательностей исчерпывается стабилизирующимися последовательностями, т.е. фактически лишь константами.

4. О монотонных ограниченных последовательностях. При доказательстве фундаментальности аддитивных сегментов было использовано существование предела специальной монотонной последовательности. Изучим здесь условия, при которых подобные пределы существуют (ср. пример из замечания 2).

Сегмент A будем называть парафундаментальным, если произвольная монотонная теоретико-множественно определимая последовательность $\mathbf{x}$, обладающая свойством A-ограниченности:

$$(\exists m \in A)(\forall s \in A)\; |x_s| \leq m,$$

имеет предел $x \in {}^*_A\mathbf{R}$. Будем говорить, что сегмент A замкнут относительно функции $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, если $(\forall s \in A)\; f(s) \in A$.

Теорема 4. *Сегмент является парафундаментальным тогда и только тогда, когда он замкнут относительно всех монотонно возрастающих теоретико-множественно определимых функций.*

Доказательство. Пусть A парафундаментален, а функция f монотонно возрастает, но для некоторого $s_0 \in A$ $f(s_0) \notin A$. Определим

$$g(s) = \max\{k |\, f(k) \leq s\}.$$

Ясно, что $g(s) \geq t \ \Leftrightarrow \ s \geq f(t)$. Пусть

$$x_k \ = \ \frac{1}{2} - \frac{1}{g(k)}, \ k \in A.$$

Понятно, что ни одно число, кроме $\frac{1}{2}$, не может претендовать на роль предела этой последовательности. Но

$$\left|x_k - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{s_0} \ \Leftrightarrow \ g(k) \geq s_0 \ \Leftrightarrow \ k \geq f(s_0),$$

или $k \notin A$. Этим доказана необходимость.

Докажем достаточность. Заметим, что сегмент, замкнутый относительно любых возрастающих функций, является мультипликативным, а следовательно, и аддитивным. Теперь предположим, что монотонная A-ограниченная последовательность $\mathbf{x}$ не имеет предела. Изменяя при необходимости знак у всех ее членов и добавляя к ним некоторую постоянную, можно считать, что последовательность возрастает, и для некоторого $m \in A$ справедливо $0 < x_s < m, \ s \in A$. Используя лемму 2, получаем

$$(\exists \delta \in A)(\forall k \in A)(\exists s_k \in A) \quad x_{s_k} - x_s \geq \frac{1}{\delta}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $(\forall k \in A) \ s_k \geq \max\{k, s_{k-1}\}$. Определим по индукции

$$g^{(0)}(k) = s_k, \ g^{(n+1)}(k) = s_{g^{(n)}(k)}.$$

Тогда по построению

$$(\forall n \in A) \quad x_{g^{(n+1)}(k)} - x_{g^{(n)}(k)} \geq \frac{1}{\delta},$$

и, если мы введем $f(k) = g^{(m\delta)}(k)$, то, дополнительно привлекая неотрицательность членов последовательности, получим

$$x_{f(k)} > \sum_{n=1}^{m\delta} \left(x_{g^{(n)}(k)} - x_{g^{(n-1)}(k)}\right) \geq m,$$

а значит, $f(k)$ не может принадлежать A. Тем самым построена монотонно возрастающая функция, относительно которой сегмент не замкнут. Полученное противоречие доказывает достаточность. Теорема доказана полностью.

Следствие. *Любой парафундаментальный сегмент является фундаментальным.*

Замечание 4. Доказанная теорема дает повод полагать, что парафундаментальных сегментов не так уж много. Но в [4] была построена теоретико-множественная операция $\nearrow$ (операция Аккермана), замкнутость относительно которой влечет замкнутость сегмента относительно любой операции из стандартной цепочки. С точки зрения [5] это позволяет считать, что все $\nearrow$-замкнутые сегменты являются парафундаментальными. Алгоритм построения таких сегментов, содержащих данный и расположенных достаточно близко к нему, подробно описан в [4]. Это дает нам возможность строить цепочки вложенных друг в друга гипердействительных конструкций, каждая из которых содержит пределы монотонных ограниченных последовательностей своих элементов.

Литература

1. Дронов, С.В. О непосредственном распространении гипердействительных функций / С.В. Дронов // Известия АлтГУ. – 2007. – №1.
2. Дронов, С.В. О четких продолжениях последовательностей / С.В. Дронов // Известия АлтГУ. – 1999.– №1.
3. Дронов, С.В. К возможности движения π-горизонта в AST / С.В. Дронов // Известия АлтГУ. – 2005. – №1.
4. Козлов, С.Д. О строении изотонного группоида на классе натуральных чисел в AST/ С.Д. Козлов, С.В. Дронов // Сиб. мат. журнал. – 1994. – №3.
5. Флоренский, П.А. О типах возрастания / П.А. Флоренский // Богословский вестник. – 1906. – №7/8.