УДК 517.946

А.Г. Петрова

Обратная задача затвердевания бинарного сплава*

1. Постановка задачи. Рассмотрим классическую одномерную модель затвердевания бинарной смеси при отсутствии диффузии в твердой фазе [1]: требуется определить распределение температуры $\theta_i(x,t)$ и концентрации $c_i(x,t)$ в твердой ($\Omega_s(t) = (0, s(t))$, индекс "s") и жидкой ($\Omega_l(t) = (s(t), 1)$, индекс "l") фазах, удовлетворяющих уравнениям теплопроводности в обеих фазах

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a_i^2 \frac{\partial \theta_i}{\partial x}\right), i = s, l,$$

где a_i^2 – коэффициенты температуропроводности, и уравнениям диффузии

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D_i \frac{\partial c_i}{\partial x}\right)$$

с коэффициентом диффузии D_l примеси в жидкой фазе и коэффициентом диффузии $D_s = 0$ в твердой фазе. На границе фазового перехода $x = s(t)$, которая предполагается гладкой функцией, выполнены условия фазового равновесия (для простоты линии ликвидуса и солидуса предполагаются прямыми с угловыми коэффициентами m_s, m_l, а температуру фазового перехода чистого вещества без ограничения общности можно считать равной нулю)

$$\theta_s = \theta_l = m_l c_l = m_s c_s, x = s(t),$$

и пара условий Стефана, являющихся следствиями законов сохранений энергии и массы:

$$s'(t) = \kappa_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x} - \kappa_l \frac{\partial \theta_l}{\partial x}, \ \ x = s(t),$$

где κ_i есть частное от деления соответствующего коэффициента теплопроводности на произведение общей плотности и удельной скрытой теплоты фазового перехода, и

$$s'(t)(c_s - c_l) = D_l \frac{\partial \theta_l}{\partial x}, \ \ x = s(t).$$

Начально краевая задача дополняется заданием начальных данных для концентраций, температур, начального положения границы фазового перехода и граничных режимов на известных границах для температуры и концентрации.

Обратная задача. Определить начальную концентрацию примеси в жидкой фазе $c_l(x)$ по известному распределению концентрации примеси в затвердевшей части в конце процесса $c_s(x,T)$ из условия минимизации функционала

$$I(c_0) = \int_0^T (c_l(s(t)t) - c_s(s(t),t) \cdot m_s/m_l)^2 dt, \quad (1.0)$$

где $c_l(x,t), c_s(x,t)$ являются решением следующей задачи:

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a_i^2 \frac{\partial \theta_i}{\partial x}\right), x \in \Omega_i(t), t \in (0,T), i = s, l; \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial c_s}{\partial t} = 0, x \in \Omega_s(t), t \in (0,T); \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial c_l}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D_l \frac{\partial c_l}{\partial x}\right), x \in \Omega_l(t), t \in (0,T); \quad (1.3)$$

$$\theta_s = \theta_l = m_s c_s, x = s(t), t \in (0,T); \quad (1.4)$$

$$s'(t) = \kappa_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x} - \kappa_l \frac{\partial \theta_l}{\partial x}, \ \ x = s(t), t \in (0,T); \quad (1.5)$$

$$s'(t)(c_s - c_l) = D_l \frac{\partial \theta_l}{\partial x}, \ \ x = s(t), t \in (0,T); \quad (1.6)$$

$$\theta_i(x,0) = \varphi_i(x), x \in \overline{\Omega_i}(0), \ \ s(0) = s_0 \in (0,1); \quad (1.7)$$

$$\theta_s(0,t) = f_s(t), \ \ \theta_l(0,t) = f_l(t), t \in (0,T); \quad (1.8)$$

$$c_s(x,T) = \bar{c}(x), x \in \overline{\Omega_s}(T); \quad (1.9)$$

$$c_l(1,t) = c_l^1(t), t \in [0,T]; \quad (1.10)$$

$$c_l(x,0) = c_0(x), x \in \overline{\Omega_l}(0). \quad (1.11)$$

Будем считать, что данные задачи удовлетворяют неравенствам, определяющим твердую и жидкую фазы:

$$\theta_s(x,t) < m_s c_s(x,t), x \in \Omega_s(t), t \in (0,T); \quad (1.12)$$

$$\theta_l(x,t) > m_l c_l(x,t), x \in \Omega_l(t), t \in (0,T); \quad (1.13)$$

$$0 \le c_s(x,t) \le 1, x \in \Omega_s(t), t \in [0,T]; \quad (1.14)$$

$$0 \le c_l(x,t) \le 1, x \in \Omega(t), t \in [0,T], \quad (1.15)$$

*Работа выполнена при поддержке ведомственно-аналитической программы "Развитие научного потенциала Высшей школы 2009-2010" №2.2.2.4/4278 и гранта СО РАН № 116.2009.

условиям монотонности фазовой границы $s(t)$ [2] и условиям согласования 1-го порядка, которые для нашей задачи имеют вид:

$$\varphi_s(0) = f_s(0), \varphi_l(1) = f_l(0),$$

$$\varphi_s(s_0) = \varphi_l(s_0) = m_s\bar{c}(s_0)$$

$$\frac{df_s}{dt}(0) = a_s^2\frac{d^2\varphi_s}{dx^2}(0), \frac{df_l}{dt}(0) = a_l^2\frac{d^2\varphi_l}{dx^2}(1),$$

$$s'(0) = \kappa_s\frac{d\varphi_s}{dx}(s_0) - \kappa_l\frac{d\varphi_l}{dx}(s_0),$$

$$s'(0) = (\bar{c}(s_0) - c_0(s_0)) = D_l\frac{dc_0}{dx}(s_0),$$

$$\frac{d\varphi_s}{dx}(s_0)s'(0) + a_s^2\frac{d^2\varphi_s}{dx^2}(s_0) =$$

$$\frac{d\varphi_l}{dx}(s_0)s'(0) + a_l^2\frac{d^2\varphi_l}{dx^2}(s_0) =$$

$$= m_s\frac{d\bar{c}}{dx}(s_0)s'(0), \qquad (1.16)$$

неравенствам, определяющим фазы в начальный момент и на известных границах:

$$\varphi_s(x) < m_s\bar{c}(x), x \in \Omega_s(0),$$

$$\varphi_l(x) > m_l c_0(x), x \in \Omega_l(0),$$

$$f_s(t) < m_s\bar{c}(0), f_l(t) > m_l c_l^1(t), t \in [0,T], \qquad (1.17)$$

а также естественным ограничениям для концентрации

$$0 < c_0 < 1, x \in \Omega_l(0),$$

$$0 < c_l^1(t) < 1, t \in [0,T]. \qquad (1.18)$$

Отметим, что наша задача будет соответствовать квазиравновесной модели затвердевания лишь при нулевом минимуме функционала (1.0). В противном случае условие $\theta_l = m_l c_l$, т.е. $m_s c_s = m_l c_l$ не может выполняться всюду на границе фазового перехода: условие (1.4) вместе с неравенствами

$$\theta_s \le m_s c_s, x \in \Omega_s(t), \;\; \theta_l \le m_l c_l, x \in \Omega_l(t),$$

определяющими твердую и жидкую фазы, обеспечивают лишь неравенства

$$m_s c_s \ge m_l c_l, x = s(t). \qquad (1.19)$$

В двух случаях удается доказать разрешимость обратной задачи: $\bar{c} \equiv const$; $\bar{c}(x)$ – линейная функция, заданная на интервале $[0,1]$ так, что $\bar{c}'(x)(1 - m_l/m_s) > 0$ при $\kappa_s = \kappa_l$, поскольку именно в этих случаях очевидна классическая разрешимость задачи Стефана для функций $\theta_i(x,t) - m_s\bar{c}(x), i = s,l$ и свободной границы $s(t)$ [3]. Итак, будем считать, что имеет место одна из описанных ситуаций и выполнены неравенства

$$\varphi_l > m_s\bar{c}(x), x \in \Omega_l(0), \;\; f_l(t) > m_s\bar{c}(1), t \in [0,T]. \qquad (1.20)$$

2. Теорема о разрешимости задачи 1. Здесь, в леммах 1–3 определяются условия на известные функции, обеспечивающие разрешимость задачи (1.1)–(1.15). При этих условиях доказывается существование функции

$$c_0(x) \in L_\infty(s_0,1), \;\; 0 \le c_0(x) \le 1$$

почти всюду в $[s_0,1]$ доставляющей минимум функционалу $I(c_0)$.

Лемма 1. Пусть

$$\varphi_i \in H^{2+\alpha}(\overline{\Omega_i}(0)), f_i \in H^{1+\alpha/2}([0,t]),$$

$$c_l^1 \in H^{1+\alpha/2}([0,T]), c_0 \in H^{1+\alpha/2}(\overline{\Omega}_i(0))$$

и выполнены условия (1.16)–(1.18), (1.21). Кроме того, пусть

$$s'(0) > 0; \varphi_s''(x) < 0, x \in \overline{\Omega}_s(0), \varphi_l''(x) \le 0, x \in \overline{\Omega}_l(0);$$

$$f_s'(t) < 0, \;\; f_l'(t) \le 0, t \in [0,T].$$

Тогда задача (1.1)–(1.11) имеет единственное решение

$$\theta_i \in H^{2+\alpha}, c_l \in H^{2+\alpha}, i = s,l, \;\; s(t) \in H^{1+\alpha/2}[0,T],$$

$$c_s(x,t) = \bar{c}(x),$$

причем $s(t)$ монотонно возрастает при $t \in [0,T)$.

Доказательство. Рассмотрим задачу (1.1), (1.4), (1.5), (1.7), (1.8), где $c_s(s(t),t)$ в условии (1.4) заменено на $\bar{c}(s(t))$. Очевидно, эта задача представляет собой задачу Стефана относительно функций

$$\theta_i(x,t) - m_s\bar{c}(x), i = s,l, \;\; s(t),$$

для которой в силу условий леммы имеет место монотонность свободной границы: $s'(t) > 0, t \in [0,T)$. [2]. Тогда из (1.2) и (1.9) следует, что $c_s(x,t) = \bar{c}(x)$ и, естественно, $c_s(s(t),t) = \bar{c}(x)$. Итак, задача (1.1)– (1.11) распалась. Осталось решить начально-краевую задачу (1.3), (1.6), (1.10), (1.11) для функции $c_l(x,t)$ в области с известной монотонной границей $x = s(t)$. Очевидно, эта задача имеет единственное решение c_l из класса $H^{2+\alpha}$ [4].

Лемма 2. Пусть $s(t) \in H^{1+\alpha/2}[0,T]$,

$$s'(t) > 0, \;\; \mu = \max s'(t) < \infty;$$

неотрицательные функции $c_l(t)$ и $c_0(x)$ удовлетворяют неравенствам

$$1-\exp\{-\mu^2T/D_l-(1-s_0)\mu/D_l\}\le$$

$$\le c_l(t)\le \exp\{-\mu^2T/D_l-(1-s_0)\mu/D_l\},$$

$$1-\exp\{-\mu^2T/D_l-(1-s_0)\mu/D_l\}\le$$

$$\le c_0(x)\le \exp\{-\mu^2T/D_l-(1-s_0)\mu/D_l\}.$$

Тогда решение задачи (1.3), (1.6), (1.10), (1.11) $c_l(x,t)$ неотрицательно и не превосходит единицы.

Доказательство. Подробно проведем доказательство утверждения о том, что концентрация не превышает единицы. Для этого введем функцию

$$v(x,t)=c_l(x,t)\cdot\exp\{-\mu^2t/D_l+\mu x/D_l\}.$$

Для нее имеем:

$$v_t=D_lv_{xx}-2\mu v_x, x\in\Omega_l(t), t\in(0,t),$$

$$v(x,0)=c_0(x)\exp\{\mu x/D_l\},$$

$$v(1,t)=c_l^1(t)\exp\{-\mu^2t/D_l+\mu/D_l\},$$

$$D_lv_x-v(\mu-s')=s'\overline{c}(s(t))\exp\{-\mu^2t/D_l+$$

$$+\mu s/D_l\}, x=s(t).$$

В силу принципа максимума и леммы о знаке производной в точке экстремума [5]

$$v(x,t)\le\max\{\max c_0(x)\exp(\mu\cdot x/D_l),$$

$$\max c_l^1(t)\exp(\mu/D_l-\mu^2\cdot t/D_l)\}.$$

Следовательно,

$$c_l(x,t)\le\exp\{-\mu\cdot x/D_l+\mu^2t/D_l+$$

$$+\mu/D_l-\mu^2\cdot T/D_l-(1-s_0)\mu/D_l\}\le 1.$$

Теперь достаточно проделать все вышеизложенное для функции $1-c_l$, чтобы убедиться в неотрицательности концентрации.

Лемма 3. Пусть $s(t)$ удовлетворяет условиям леммы 2, а $\overline{c}(x)$ –линейная функция, заданная на $[0,1]$ так, что

$$\overline{c}'(x)(1-K)\ge 0,\ \ K=m_l/m_s.$$

Предположим, что

$$(c_l^1(t)-\overline{c}(1)/K)(1-K)\ge 0,$$

$$(c_0(x)-\overline{c}(x)/K)(1-K)\ge 0.$$

Тогда для решения задачи (1.3), (1.6), (1.10), (1.11) справедлива оценка

$$(c_l(x,t)-\overline{c}(x)/K)(1-K)\ge 0.$$

Доказательство. Введем функцию

$$w(x,t)=(c_l(x,t)-\overline{c}(x)/K)\exp\{-\mu^2t/D_l+\mu x/D_l\}.$$

Для нее имеем задачу, подобную той, что рассматривалась при доказательстве леммы 2. Также, используя принцип максимума и лемму о знаке производной в точке экстремума [5], получим оценку $w(x,t)(1-K)\ge 0$, из которой следует, что в случае $K<1$ имеем $c_l(x,t)\ge\overline{c}(x)/K$, а в случае $K<1$ – $c_l(x,t)\ge\overline{c}(x)/K$.

Таким образом, подчинив данные задачи, помимо естественных ограничений, следующих из определения фаз, условиям монотонности свободной границы, мы доказали существование и единственность решения задачи (1.1)–(1.11), причем $\mu=\max s'(t)$ конечен и зависит от разностей

$$\varphi_i(x)-m_s\overline{c}(x), f_s(t)-m_s\overline{c}(1), f_l(t)-m_s\overline{c}(1).$$

Леммы 2, 3 дают ограничения на входные функции, обеспечивающие выполнение условий (1.12)–(1.15) для решений задачи (1.1)–(1.11).

Теорема 1. Пусть заданные функции φ_i, $f_i(i=s,l)$, c_l^1, $\overline{c}$ удовлетворяют условиям лемм 2, 3, а также при $K<1$ условию

$$0\le\overline{c}(x)\le K\exp\{-\mu^2T/D_l-(1-s_0)\mu/D_l\},\quad(2.1)$$

а при $K>1$– условию

$$K(1-exp\{-\mu^2T/D_l-(1-s_0)\mu/D_l\}\le\overline{c}(x)\le 1.\quad(2.2)$$

Тогда обратная задача имеет решение $c_0(x)\in L_\infty(s_0,1)$ и $c_0(x)\ge 0$ почти всюду на $[s_0,1]$.

Замечание. Как уже отмечалось, условия леммы 1 относятся к разностям

$$\varphi_i(x)-m_s\overline{c}(x), f_s(t)-m_s\overline{c}(1), f_l(t)-m_s\overline{c}(1)$$

и $\mu=\max\ s'(t)$ определяется этими разностями. Поэтому условия (2.1) ((2.2)) оставляют достаточную свободу в выборе исходных данных.

Доказательство теоремы. Обозначим через Λ множество функций $c_0(x)\in H^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_l(0))$ со значениями из интервала $[0,1]$, удовлетворяющих условиям согласования 1-го порядка для задачи (1.1)–(1.11) и обеспечивающих выполнение условий (1.13), (1.15) для решения θ_i, c_i, s задачи (1.1)–(1.11) (условия (1.12), (1.14) выполнены очевидным образом вследствие леммы 1). В силу лемм 2, 3 и условий (2.1), (2.2) множество Λ содержит бесконечное много элементов.

Пусть $c_0^j(x) \in \Lambda$ – минимизирующая последовательность для функционала I, т.е.

$$\lim_{j\to\infty}\int\limits_0^T (c_l^j(s(t),t) - \overline{c}(s(t))/K)^2 dt = I_{min}, \quad (2.3)$$

где $c_l^j(x,t)$ – решение задачи (1.3), (1.6), (1.10), (1.11), соответствующее начальному распределению c_0^j. Очевидно, что

$$\|c_0^j\|_{L_p(s_0,1)} \le 1, \forall p > 1. \quad (2.4)$$

Умножая обе части равенства (1.3) на $c_l^j(x,t) - c_l^1(t)$ и интегрируя по области $Q_l(t) = \{s(\tau) < x < 1, 0 < \tau < t\}$ с учетом того, что значения функций $c_l^j(x,t), c_l^1(t), \overline{c}(x)$ лежат в промежутке $[0,1]$, получим оценку

$$\|c_l^j\|_{W_2^{1,0}(Q_l(T))} \le M_0, \quad (2.5)$$

где M_0 не зависит от номера j. В силу (2.4) и (2.5) можно выделить последовательность индексов (оставим для нее прежние обозначения) так, чтобы $\{c_0^j(x)\}$ сходилась слабо в $L_p(s_0,1)$, а $\{c_l^j\}$ – слабо в $W_2^{1,0}(Q_l(T))$.

Обозначим слабые пределы соответственно $\widetilde{c}_0(x)$ и $\widetilde{c}_l(x,t)$. При этом $\widetilde{c}_0(x)$ является обобщенным решением задачи (1.3), (1.6), (1.10), (1.11), соответствующим начальному распределению $c_0(x)$, т.е.

$$\int\limits_0^T\int\limits_{s(t)}^1 (-\widetilde{c}_l\frac{\partial\eta}{\partial t} + D_l\frac{\partial\widetilde{c}_l}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x})dxdt = \int\limits_{s(0)}^1 \widetilde{c}_0(x)\eta(x,0)dx$$

для любых гладких η таких, что

$$\eta(s(t),t) = \eta(1,t) = 0, t\in[0,T],$$

$$\eta(x,T) = 0, x \in (s(T),1).$$

В этом легко убедиться, переходя к слабому пределу в обеих частях равенства

$$\int\limits_0^T\int\limits_{s(t)}^1 (-\widetilde{c}_l^j\frac{\partial\eta}{\partial t} + D_l\frac{\partial\widetilde{c}_l^j}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x})dxdt = \int\limits_{s(0)}^1 \widetilde{c}_0^j(x)\eta(x,0)dx.$$

Из локальных оценок решений параболических уравнений [4] следует, что

$$|\widetilde{c}_l^j|^{(2+\alpha)}_{Q_l^n(T)} \le M(n),$$

где $Q_l^n(T) = \{s(t) < x < 1, \ 1/n < t < T\}$, а $M(n)$ не зависит от номера j. Поэтому для каждого n из последовательности $\{\widetilde{c}_l^j(x,t)\}$ можно извлечь подпоследовательность, сильно сходящуюся к решению $\widetilde{c}_l(x,t)$ в норме $H^{2+\alpha-\delta,1+\alpha/2-\delta/2}(\overline{Q}_l^n(T))$, ($\delta$-малое).

Убедимся, что

$$\int\limits_0^T (\widetilde{c}_l(s(t),t) - \overline{c}_s(s(t))/K)^2 dt = I_{\min}.$$

Для этого покажем, что соответствующая разность меньше любого наперед заданного ε. В самом деле: в силу (2.3) существует j_0 такое, что при всех $j \ge j_0$

$$\int\limits_0^T (c_l^j(s(t),t) - \overline{c}_s(s(t))/K)^2 dt - I_{\min} < \varepsilon/3.$$

Поскольку $0 \le c_l^j(x,t) \le 1, (x,t) \in \overline{Q}_l(T)$ и $\widetilde{c}(x,t) \in W_2^{1,0}(Q_l(T)$, можно выбрать n_0 так, чтобы для любого j

$$\int\limits_0^{1/n_0} (\widetilde{c}_l(s(t),t) - c_l^j(s(t),t))(\widetilde{c}_l(s(t),t) +$$

$$c_l^j(s(t),t) - 2\overline{c}_s(s(t))/K)dt < \varepsilon/3.$$

Пусть теперь $\{c_l^{j(n_0)}(x,t)\}$ – подпоследовательность, сходящаяся к $\widetilde{c}_l(x,t)$ в норме $H^{2+\alpha-\delta,1+\alpha/2-\delta/2}(\overline{Q}_l^{n_0}(T))$. Тогда существует $j_0(n_0) \ge j_0$ такое, что

$$\int\limits_{1/n_0}^T (\widetilde{c}_l(s(t),t) - c_l^{j_0(n_0)}(s(t),t))(\widetilde{c}_l(s(t),t) +$$

$$c_l^{j_0(n_0)}(s(t),t)) - 2\overline{c}_s(s(t))/K)dt < \varepsilon/3.$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^T (\widetilde{c}_l(s(t),t) - \overline{c}_s(s(t))/K)^2 dt - I_{\min} =$$

$$\int\limits_0^T (c_l^{j_0(n_0)}(s(t),t) - \overline{c}_s(s(t))/K)^2 dt - I_{\min} +$$

$$\int\limits_0^{1/n_0} (\widetilde{c}_l(s(t),t) - c_l^{j_0(n_0)}(s(t),t))(\widetilde{c}_l(s(t),t) +$$

$$c_l^{j_0(n_0)}(s(t),t) - 2\overline{c}_s(s(t))/K)dt +$$

$$\int\limits_{1/n_0}^T (\widetilde{c}_l(s(t),t) - c_l^{j_0(n_0)}(s(t),t))(\widetilde{c}_l(s(t),t) +$$

$$c_l^{j_0(n_0)}(s(t),t) - 2\overline{c}_s(s(t))/K) < \varepsilon.$$

В завершение доказательства осталось заметить, что, так как $\widetilde{c}_0(x)$ является слабым пределом в $L_p(s_0,1)$ последовательности функций, все значения которых принадлежат отрезку $[0,1]$, то $0 \leq \widetilde{c}_0(x) \leq 1$ почти всюду и $\widetilde{c}_0(x) \in L_\infty(s_0,1)$.

3. Автомодельная обратная задача. Считаем, что твердая фаза занимает область $(s(t),\infty)$, жидкая – $(0,s(t))$; $s(0)=0$. Известно окончательное распределение примеси в твердой фазе $c_s(x,T)=\overline{c}\equiv const$. Ищется начальное распределение примеси в жидкой фазе $c_l(x,0)=c_0\equiv const$ из условия минимизации функционала $J(c_0)$, определенного равенством (1.0), в котором c_l и c_S являются решением задачи (1.1)–(1.6), где $\Omega_s(t)=(0,s(t)),\Omega_l(t)=(s(t),\infty)$ с данными

$$\theta_l(x,0)=\theta_{l0}\equiv const, \tag{3.1}$$

$$\theta_s(0,t)=\theta_s^0\equiv const, \tag{3.2}$$

$$c_s(x,T)=\overline{c}(x)\equiv const, \tag{3.3}$$

$$c_l(x,0)=c_0(x)\equiv const, \tag{3.4}$$

удовлетворяющими условиям (1.12)–(1.15).

При этом, естественно, считаем, что

$$\theta_{l0}>m_sKc_0, \theta_s^0<m_s\overline{c}, 0<\overline{c}<\min\{1,K\}. \tag{3.5}$$

Считая, как и в обычной автомодельной термодиффузионной задаче, $s(t)=2\beta\sqrt{t}$, а θ_i, c_l – функциями соответственно $x/(2a_i\sqrt{t})$ и $x/(2\sqrt{D_lt})$, получим следующие известные явные формулы для решения задачи (1.1)–(1.6), (3.1)–(3.4):

$$\theta_s=\theta_s^0+(m_s\overline{c}-\theta_s^0)\cdot\mathrm{erf}(x/2a_s\sqrt{t})/\mathrm{erf}(\beta/a_s), \tag{3.6}$$

$$\theta_l=\theta_{l0}+(m_s\overline{c}-\theta_{l0})\cdot\mathrm{erfc}(x/2a_l\sqrt{t})/\mathrm{erfc}(\beta/a_l), \tag{3.7}$$

$$c_s=\overline{c}, \tag{3.8}$$

$$c_l=c_0+\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{D_l}}\beta(c_0-\overline{c})\mathrm{erfc}(x/2D_l\sqrt{t})/\exp\Big(-\beta^2/D_l-\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{D_l}}\beta\cdot\mathrm{erfc}(\beta/\sqrt{D_l}\Big), \tag{3.9}$$

где β – положительный корень уравнения

$$\beta=\kappa_s(m_s\overline{c}-\theta_s^0)\cdot\exp(-\beta^2/a_s^2)/(a_s\sqrt{\pi}\cdot\mathrm{erf}(-\beta/a_s))+$$
$$\kappa_l(m_s\overline{c}-\theta_{l0})\cdot\exp(-\beta^2/a_l^2)/(a_l\sqrt{\pi}\cdot\mathrm{erfc}(-\beta/a_l)).$$

В существовании положительного корня последнего уравнения легко убедиться, замечая, что правая часть стремится к "$+\infty$" при $\beta\to 0$ и к "$-\infty$" при $\beta\to+\infty$.

Утверждение. Пусть заданные константы $\theta_s^0,\theta_{l0},\overline{c}$ удовлетворяют, помимо условий (3.5), неравенству

$$\overline{c}\leq\frac{(\theta_{l0}-m_s\overline{c})\sqrt{D_l/\pi}\exp(-\beta^2/a_l^2)}{\Big(m_s(K-1)\beta\mathrm{erfc}(-\beta^2/D_l)\Big)}. \tag{3.10}$$

Тогда обратная автомодельная задача имеет решение

$$c_0=\overline{c}/K\cdot\left(1-\frac{\sqrt{\pi/D_l}\cdot\beta(1-K)\cdot\mathrm{erfc}(\beta/D_l)}{\exp(-\beta^2/D_l)}\right). \tag{3.11}$$

При этом $I(c_0)=0$.

Доказательство утверждения. Ограничимся случаем $K<1$. Нетрудно проверить, что для c_0, даваемого формулой (3.11), $I(c_0)=0$. Остается доказать справедливость неравенств (1.12)–(1-15). Заметим, что (1.12) и (1.14) очевидны. Докажем (1.15). Для этого рассмотрим функцию

$$f(\beta)=\exp(-\beta^2/D_l)-\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{D_l}}\beta\cdot\mathrm{erfc}(\beta/\sqrt{D_l}).$$

Для непрерывно дифференцируемой функции имеем: $f(0)=1, f(+\infty)=0, f'(\beta)<0$. Следовательно, $f(\beta)>0$. Поэтому $\overline{c}<c_0<1$. С другой стороны, вследствие (3.9), для $c_l(x,t)$ имеет место неравенство

$$c_0\leq c_l(x,t)\leq\overline{c}/K.$$

Таким образом, (1.15) выполнено.

Теперь докажем (1.13). На свободной границе $x=s(t)$ выполнены равенства

$$\theta_l=m_s\cdot\overline{c}=m_s\cdot K\cdot c_l.$$

В силу (3.5),

$$\theta_l=\theta_{l0}>m_sKc_0=m_sKc_l$$

при $x\to\infty$. Условие (3.10) с учетом (3.11) влечет

$$\frac{\partial\theta_l}{\partial x}(s(t),t)\geq m_sK\frac{\partial c_l}{\partial x}(s(t),t),$$

откуда и следует требуемое неравенство (1.15), иначе уравнение

$$\frac{\partial\theta_l}{\partial x}=m_sK\frac{\partial c_l}{\partial x},$$

которое в нашем случае имеет вид

$$A\exp(-x^2/4a_l^2t)=D\exp(-x^2/4D_lt),\ A,B=const,$$

имело бы по крайней мере два положительных корня, что, очевидно, невозможно.

Замечание. В случае неравенства, противоположного (3.10), для решения, соответствующего (3.11), условие (1.13) не выполнено: имеет место переохлаждение перед фронтом кристаллизации. Однако обратная задача может иметь решение, но минимум функционала $I(c_0)$ уже не будет равен нулю.

Библиографический список

1. Авдонин, Н.А. Математическое описание процессов кристаллизации / Н.А. Авдонин. – Рига, 1980.

2. Петрова, А.Г. Монотонность свободной границы в двухфазной задаче Стефана // А.Г. Петрова // Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1984. – Вып. 67.

3. Мейрманов, А.М. Задача Стефана / А.М. Мейрманов. – Новосибирск, 1986.

4. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. – М., 1967.

5. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа / А. Фридман. – М., 1968.