УДК 512.54.01

В.В. Лодейщикова

О квазимногообразиях Леви, порожденных нильпотентными группами*

Пусть $\mathcal{M}$ – класс групп. Обозначим через $L(\mathcal{M})$ класс всех групп G, в которых нормальное замыкание $(x)^G$ любого элемента x из G принадлежит $\mathcal{M}$. Класс $L(\mathcal{M})$ групп называется *классом Леви, порожденным* $\mathcal{M}$. Классы Леви были введены в [1] под влиянием работы [2], в которой дана классификация групп с абелевыми нормальными замыканиями вида $(x)^G$. Известно [3], что если $\mathcal{M}$ – многообразие групп, то $L(\mathcal{M})$ также многообразие групп. В [4] доказано, что если $\mathcal{M}$ – квазимногообразие групп, то $L(\mathcal{M})$ также является квазимногообразием групп. Классы Леви $L(\mathcal{M})$ для квазимногообразий $\mathcal{M}$, порождаемых нильпотентными группами, исследовались в [5].

Пусть $\mathcal{N}_c$ – многообразие нильпотентных групп ступени $\leq c$, $\mathcal{N}_{c,\infty}$ – квазимногообразие нильпотентных групп без кручения ступени $\leq c$, $\mathcal{N}_{c,p}$ – многообразие нильпотентных групп ступени $\leq c$ и экспоненты p, $\mathcal{R}_p$ (p – простое число) – многообразие нильпотентных групп ступени ≤ 2 и экспоненты p, $q\mathcal{K}$ – квазимногообразие, порожденное классом групп $\mathcal{K}$ (если $\mathcal{K} = \{G\}$, то вместо $q\{G\}$ будем писать qG). Известно [2], что класс $L(\mathcal{N}_1)$ является многообразием 2-энгелевых групп. В [6] доказано, что $L(\mathcal{N}_2)$ совпадает с многообразием 3-энгелевых групп. Согласно [6], существует 3-энгелева группа без кручения, ступень нильпотентности которой равна 4. Отсюда следует, что $L(\mathcal{N}_{2,\infty})$ не содержится в классе $\mathcal{N}_{3,\infty}$.

В [4] найдены условия, при выполнении которых квазимногообразие $L(\mathcal{M})$ нильпотентно. А именно, доказано, что если $\mathcal{K}$ – произвольное множество нильпотентных групп ступени 2 без элементов порядков 2 и 5 и централизатор любого неединичного элемента, не принадлежащего центру каждой группы из $\mathcal{K}$, – абелева подгруппа, то $L(q\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{N}_3$. В доказательстве этого результата отсутствие элементов порядка 5 нужно только для установления того, что всякая 3-порожденная группа из $L(q\mathcal{K})$ нильпотентна класса ≤ 4. Поэтому в [7] данный результат был усилен и доказана аналогичная теорема для произвольного множества нильпотентных групп ступени 2 без элементов порядка 2.

Основным результатом настоящей статьи является

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{N}$ – одно из следующих квазимногообразий: $\mathcal{N}_{2,\infty}$, $\mathcal{R}_p$ (p – простое, $p \neq 2$) и пусть $\mathcal{K}$ – произвольный класс групп из $\mathcal{N}$, содержащий неабелеву группу. Предположим, что во всякой группе из $\mathcal{K}$ централизатор любого элемента, не принадлежащего центру этой группы, является абелевой подгруппой. Тогда*

1) *если $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{2,\infty}$, то $L(q\mathcal{K}) = \mathcal{N}_{3,\infty}$ и*

2) *если $\mathcal{N} = \mathcal{R}_p$ (p – простое число, $p \neq 2$), то $L(q\mathcal{K}) = \mathcal{N}_{3,p}$.*

Замечание. Пусть $G \in \mathcal{N}_{3,3}$. Известно [8, с. 290], что любая группа экспоненты 3 является 2-энгелевой. Из [2] следует, что нормальное замыкание произвольного элемента группы x из G будет абелевым. Значит, $(x)^G \in \mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ – произвольный нетривиальный класс групп из $\mathcal{R}_3$. Отсюда следует, что $\mathcal{N}_{3,3} = L(\mathcal{K})$ и, в частности, теорема 1 верна для случая $p = 3$.

Напомним некоторые определения и обозначения. Как обычно, $[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy$, $[x,y,z] = [[x,y],z]$, $\gamma_1 G = G$, $\gamma_{i+1}G = [\gamma_i G, G], i \geq 1$, $\mathrm{гр}(a_1, a_2, \ldots)$ – группа, порожденная элементами $a_1, a_2, \ldots$, (a) – циклическая группа, порожденная элементом a, $(x)^G = \mathrm{гр}(g^{-1}xg \mid g \in G)$ – нормальное замыкание элемента x в группе G, $F_n(\mathcal{M})$ – свободная группа в квазимногообразии $\mathcal{M}$ ранга n, $\ker\varphi$ – ядро гомоморфизма φ, $Z(G)$ – центр группы G, G' – коммутант группы G, $A \times B(a = b)$ – прямое произведение групп A, B с объединенными центральными подгруппами (a), (b), т. е. $A \times B(a = b) = A \times B/(ab^{-1})$.

В дальнейшем будем использовать следующие коммутаторные тождества, истинные во всякой группе [9]:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)([xy, z] = [x,z][x,z,y][y,z]),$$

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)([x, yz] = [x,z][x,y][x,y,z]),$$

$$(\forall x)(\forall y)([x^{-1}, y] = [y,x][y,x,x^{-1}]).$$

Нам понадобится *признак принадлежности* конечно определенной группы G квазимногообразию $q\mathcal{K}$, являющийся частным случаем теоремы 3 [10]:

конечно-определенная группа G принадлежит квазимногообразию $q\mathcal{K}$ тогда и только

*Работа выполнена при поддержке АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы"(Мероприятие 1).

тогда, когда для любого элемента $g \in G$, $g \neq 1$ существует гомоморфизм φ_g группы G в некоторую группу из класса $\mathcal{K}$ такой, что $\varphi_g(g) \neq 1$.

Также нам будет необходима

Теорема (Дик) [11]. *Пусть группа G имеет в данном квазимногообразии $\mathcal{N}$ представление*

$$\text{гр}(\{x_i \mid i \in I\} \parallel \{r_j(x_{j_1}, \dots, x_{j_{l(j)}}) = 1 \mid j \in J\}).$$

Предположим, что $H \in \mathcal{N}$ и группа H содержит множество элементов $\{g_i \mid i \in I\}$ такое, что для всякого $j \in J$ равенство $r_j(g_{j_1}, \dots, g_{j_{l(j)}}) = 1$ истинно в H. Тогда отображение $x_i \to g_i (i \in I)$ продолжается до гомоморфизма G в H.

При написании тождеств кванторы всеобщности иногда будут опускаться. С основными понятиями теории групп можно познакомиться в [9, 12], а теории квазимногообразий – в [11, 13, 14].

Лемма 1. *Пусть G – 2-ступенно нильпотентная группа без кручения, порожденная элементами $x, x_1, ..., x_n$, и $\text{гр}(x_1, ..., x_n)$, является свободной абелевой подгруппой ранга n. Тогда $G \in qF_2(\mathcal{N}_2)$.*

Доказательство индукцией по n. При $n = 1$ группа G является свободной нильпотентной ступени 2, поэтому $G \in qF_2(\mathcal{N}_2)$. Зафиксируем представление группы G в порождающих $x, x_1, ..., x_n$ в многообразии $\mathcal{N}_2$.

Предположим сначала, что это представление имеет вид:

$$G = \text{гр}(x, x_1, ..., x_n \parallel [x_i, x_j] = 1, i, j = 1, ..., n).$$

Возьмем произвольный элемент $g \in G$, $g \neq 1$. По признаку принадлежности достаточно построить гомоморфизм φ группы G в некоторую группу $F \in qF_2(\mathcal{N}_2)$, при котором $\varphi(g) \neq 1$. Если $g \notin G'$, то в качестве искомого отображения берем естественный гомоморфизм $\varphi{:}G \to G/G'$. Далее, пусть $g \in G'$. Тогда $g = [x, x_1]^{s_1}...[x, x_n]^{s_n}$, где не все s_i равны нулю. Пусть, для определенности, $s_{i_0} \neq 0$. Рассмотрим свободную 2-ступенно нильпотентную группу $F_2(\mathcal{N}_2)$, порожденную элементами a и b. По теореме Дика отображение $x \to a$, $x_{i_0} \to b$, $x_j \to 1$, $j = 1, ..., n$, $j \neq i_0$, продолжаемо до гомоморфизма $\varphi{:}G \to F_2(\mathcal{N}_2)$. При этом $\varphi(g) = [a, b]^{s_{i_0}} \neq 1$. Таким образом, показано, что в рассматриваемом случае $G \in qF_2(\mathcal{N}_2)$.

Считаем, что из определяющих соотношений группы G следует равенство вида

$$x^t x_1^{t_1} ... x_n^{t_n} \prod_{i=1}^{n} [x, x_i]^{f_i} = 1.$$

Достаточно рассмотреть следующие четыре случая.

Случай 1. $t \neq 0$. Тогда G – абелева группа, что не так.

Случай 2. Из определяющих соотношений группы G следует равенство вида $x_j^{k_j} = \prod_{i=1}^{n} [x, x_i]^{s_i}$, причем $k_j \neq 0$. Если таких соотношений несколько, тогда выбираем то, где k_j – наименьшее положительное число. Для произвольного элемента $z \in G$ имеем: $[z, x_j^{k_j}] = [z, x_j]^{k_j} = 1$. Откуда $[z, x_j] = 1$. Значит,

$$G = \text{гр}(x, x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n) \times$$

$$\times (x_j)(x_j^{k_j} = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j}} [x, x_i]^{s_i}).$$

По предположению индукции $\text{гр}(x, x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n) \in qF_2(\mathcal{N}_2)$. Лемма 7 [15] (см. также: [13, теорема 4.2.25]) непосредственно дает, что $G \in qF_2(\mathcal{N}_2)$.

Случай 3. Равенство вида $\prod_{i=1}^{n} [x, x_i]^{s_i} = 1$, где не все s_i равны нулю, верно в G. Можно считать, что $s_1 \neq 0, ..., s_l \neq 0$, $s_{l+1} = 0, ..., s_n = 0$, $1 < l \leq n$ и $\text{НОД}(s_1, ..., s_l) = 1$.

Заметим, что элемент $h_1 = x_1^{s_1} x_2^{s_2} ... x_l^{s_l}$ принадлежит центру группы G. Рассмотрим циклическую подгруппу, порожденную h_1, и покажем, что она является сервантной в группе $H = \text{гр}(x_1, ..., x_l)$. Пусть уравнение $y^m = h_1^r$, $r \neq 0$ имеет решение в группе H. Покажем разрешимость данного уравнения в подгруппе (h_1). Это верно при $m = 1$. Считаем, что $m \geq 2$. Можно предполагать, что $\text{НОД}(m, r) = 1$.

Пусть $(x_1^{q_1} ... x_l^{q_l})^m = (x_1^{s_1} ... x_l^{s_l})^r$ для некоторых целых $q_1, ..., q_l$. Тогда $q_i m - s_i r = 0$, $i = 1, ..., l$. Видим, что $s_i = w_i m$ для подходящих чисел $w_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, ..., l$. Поскольку $\text{НОД}(s_1, ..., s_l) = 1$, то $m = \pm 1$, что не так. Следовательно, подгруппа (h_1) сервантная и, как хорошо известно (см., например: [12, с. 150; 9, гл. 3, § 3, теорема 2]), выделяется прямым сомножителем в группе H.

Дополним h_1 элементами, которые обозначим через $h_2, ..., h_n$, до множества свободных порождающих группы $\text{гр}(x_1, ..., x_n)$. Если $h \in (h_1) \cap \text{гр}(x, h_2, ..., h_n) = 1$, то $G = \text{гр}(x, h_2, ..., h_n) \times (h_1)$ и по индукции $G \in qF_2(\mathcal{N}_2)$. Предположим, что существует неединичный элемент $h \in (h_1) \cap \text{гр}(x, h_2, ..., h_n)$. Тогда найдутся целые числа p, p_i, m_j,

$i, j = 2, ..., n$, не все равные нулю, такие, что $h = h_1^{p_1} = x^p h_2^{p_2} ... h_n^{p_n}[x, h_2^{m_2} ... h_n^{m_n}]$. Считаем, что p_1 – наименьшее с этим свойством. Группа G неабелева и $[x, h_1] = 1$, поэтому существует i такое, что $[h_i, x] \neq 1$, $i \in \{2, ..., n\}$. Видим, что $1 = [h_i, h_1^{p_1}] = [h_i, x]^p$. Поскольку группа G без кручения, то $p = 0$ и $h_1^{p_1} = h_2^{p_2} ... h_n^{p_n}[x, h_2^{m_2} ... h_n^{m_n}]$. Значит,

$$G = \text{гр}(x, h_2, ..., h_n) \times$$

$$\times (h_1)(h_1^{p_1} = h_2^{p_2} ... h_n^{p_n}[x, h_2^{m_2} ... h_n^{m_n}]).$$

По предположению индукции $\text{гр}(x, h_2, ..., h_n) \in qF_2(\mathcal{N}_2)$. Лемма 7 [15] (см. также: [13, теорема 4.2.25]) непосредственно дает, что $G \in qF_2(\mathcal{N}_2)$.

Случай 4. Из определяющих соотношений группы G следует равенство вида $x_1^{k_1} ... x_n^{k_n} = \prod_{i=1}^{n} [x, x_i]^{s_i}$, где число показателей k_j, не равных 0, строго больше 1.

Пусть НОД$(k_1, ..., k_n) = d$, $u_i = \frac{k_i}{d}$, $i = 1, ..., n$ и $h_1 = x_1^{u_1} ... x_n^{u_n}$. Заметим, что $[x, h_1] = 1$ и поэтому $h_1 \in Z(G)$. Рассмотрим циклическую подгруппу, порожденную h_1, и покажем, что она является сервантной в группе $H = \text{гр}(x_1, ..., x_n)$. Пусть уравнение $y^m = h_1^r$, $r \neq 0$, имеет решение в группе H. Покажем разрешимость данного уравнения в подгруппе (h_1). Это верно при $m = 1$. Считаем, что $m \geq 2$. Можно предполагать, что НОД$(m, r) = 1$.

Пусть $(x_1^{q_1} ... x_n^{q_n})^m = (x_1^{u_1} ... x_n^{u_n})^r$ для некоторых целых $q_1, ..., q_n$. Тогда $q_i m - u_i r = 0$, $i = 1, ..., n$. Видим, что $u_i = w_i m$ для подходящих чисел $w_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, ..., n$. Поскольку НОД$(u_1, ..., u_n) = 1$, то $m = \pm 1$, что не так. Значит, подгруппа (h_1) сервантная и, как хорошо известно (см., например: [12, с. 150; 9, гл. 3, § 3, теорема 2]), выделяется прямым сомножителем в группе H.

Обозначим через $h_1, ..., h_n$ новые порождающие $\text{гр}(x_1, ..., x_n)$. Тогда исходное равенство преобразуется в равенство вида $h_1^d = \prod_{i=1}^{n} [x, h_i]^{s_i}$ и, по случаю 2, $G \in qF_2(\mathcal{N}_2)$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть G – 2-ступенно нильпотентная группа экспоненты p (p – простое число, $p \neq 2$), порожденная элементами $x, x_1, ..., x_n$, и $\text{гр}(x_1, ..., x_n)$ изоморфна прямому произведению n циклических групп порядка p. Тогда $G \in qF_2(\mathcal{R}_p)$.*

Доказательство индукцией по n. При $n = 1$ группа G является свободной в $\mathcal{R}_p$, поэтому $G \in qF_2(\mathcal{R}_p)$. Зафиксируем представление группы G в порождающих $x, x_1, ..., x_n$ в многообразии $\mathcal{R}_p$. Если это представление имеет вид:

$$G = \text{гр}(x, x_1, ..., x_n \parallel [x_i, x_j] = 1, i, j = 1, ..., n),$$

то, по аналогии с доказательством леммы 1, показываем, что $G \in qF_2(\mathcal{R}_p)$. Считаем, что из определяющих соотношений группы G следует равенство вида $x^t x_1^{t_1} ... x_n^{t_n} \prod_{i=1}^{n} [x, x_i]^{f_i} = 1$, где $0 \leq t, t_j, f_i < p$, $i, j = 1, ..., n$.

Достаточно рассмотреть следующие четыре случая.

Случай 1. $t \neq 0$. Тогда G – абелева группа, что не так.

Случай 2. Из определяющих соотношений группы G следует равенство вида $x_j^{k_j} = \prod_{i=1}^{n} [x, x_i]^{s_i}$, k_j не делится на p. Тогда $G = \text{гр}(x, x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n)$ и, по индукции, $G \in qF_2(\mathcal{R}_p)$.

Случай 3. Равенство вида $\prod_{i=1}^{n} [x, x_i]^{s_i} = 1$, где не все s_i сравнимы с 0 по модулю p, верно в G. Можно считать, что $s_1 \not\equiv 0 (\text{mod} p)$,..., $s_l \not\equiv 0 (\text{mod} p)$, $s_{l+1} \equiv 0 (\text{mod} p)$,..., $s_n \equiv 0 (\text{mod} p)$, $1 < l \leq n$ и НОД$(s_1, ..., s_l) = 1$.

Рассмотрим циклическую подгруппу, порожденную элементом $h_1 = x_1^{s_1} x_2^{s_2} ... x_l^{s_l}$. Заметим, что $[x, h_1] = 1$ и $h_1 \in Z(G)$. Так как (h_1) – подгруппа порядка p, она выделяется прямым сомножителем в группе $H = \text{гр}(x_1, ..., x_n)$. Дополним h_1 элементами, которые обозначим через $h_2, ..., h_n$, до множества свободных порождающих группы H. Если $\text{гр}(x, h_2, ..., h_n) \cap (h_1) = (1)$, то $G = (h_1) \times \text{гр}(x, h_2, ... h_n)$ и, по индукции, $G \in qF_2(\mathcal{R}_p)$. Иначе $G = \text{гр}(x, h_2, ..., h_n)$, и видим, что $G \in qF_2(\mathcal{N}_2)$.

Случай 4. Из определяющих соотношений группы G следует равенство вида $x_1^{k_1} ... x_n^{k_n} = \prod_{i=1}^{n} [x, x_i]^{s_i}$, где число показателей k_j, не делящихся на p, строго больше 1.

Рассмотрим циклическую подгруппу, порожденную элементом $h_1 = x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_n^{k_n}$. Так как (h_1) – подгруппа порядка p, она выделяется прямым сомножителем в группе $H = \text{гр}(x_1, ..., x_n)$. Дополним h_1 элементами, которые обозначим через $h_2, ..., h_n$, до множества свободных порождающих группы H. Тогда исходное равенство преобразуется в равенство вида $h_1 = \prod_{i=1}^{n} [x, h_i]^{s_i}$ и, по случаю 2, $G \in qF_2(\mathcal{N}_2)$.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\mathcal{M} = \mathcal{N}_{3,\infty}$ в случае, когда $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{2,\infty}$; и $\mathcal{M} = \mathcal{N}_{3,p}$ в случае, когда $\mathcal{N} = \mathcal{R}_p$ (p – простое, $p \neq 2$). Покажем, что $\mathcal{M} \subseteq L(qF_2(\mathcal{N}))$. Хорошо известно [13, теорема 2.1.20], что всякое квазимногообразие порождается множеством своих конечно-порожденных групп. Поэтому достаточно показать, что любая конечно-порожденная группа G из $\mathcal{M}$ принадлежит классу Леви, порожденному квазимногообразием $qF_2(\mathcal{N})$.

Рассмотрим нормальное замыкание произвольного элемента x из G: $(x)^G = \text{гр}(x, [x, g] \mid g \in G)$. Если G – нильпотентная группа ступени ≤ 2, то видим, что $(x)^G$ – абелева и поэтому (см.: [2]) $G \in L(qF_2(\mathcal{N}))$. Считаем, что G – нильпотентная группа ступени 3. Группа G нильпотентная и конечно-порожденная, поэтому любая ее подгруппа является конечно-порожденной. Выберем порождающие $x, x_1, ..., x_n$ группы $(x)^G$ так, чтобы $\text{гр}(x_1, ..., x_n)$ была относительно свободной абелевой ранга n.

По леммам 1 и 2 $(x)^G \in qF_2(\mathcal{N})$. Значит, группа $G \in L(qF_2(\mathcal{N}))$. Отсюда следует, что $\mathcal{M} \subseteq L(qF_2(\mathcal{N}))$. Как уже отмечали (см.: [7, теорема 1]), $L(qF_2(\mathcal{N})) \subseteq \mathcal{M}$. Следовательно, $L(qF_2(\mathcal{N})) = \mathcal{M}$. Но $L(qF_2(\mathcal{N})) \subseteq L(q\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{M}$, значит, $L(q\mathcal{K}) = \mathcal{M}$. Теорема доказана.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору А.И. Будкину за полезные советы и постоянное внимание к работе.

Библиографический список

1. Kappe, L.C. On Levi-formations / L.C. Kappe // Arch. Math. – 1972. – V. 23, №6.

2. Levi, F.W. Groups in which the commutator operation satisfies certain algebraic condition / F.W. Levi // J. Indian Math. Soc. – 1942. – №6.

3. Morse, R.F. Levi-properties generated by varieties / R.F. Morse // The mathematical legacy of Wilhelm Magnus. Groups, geometry and special functions (Contemp. Math., 169), Providence, RI, Am. Math. Soc.– 1994.

4. Будкин, А.И. Квазимногообразия Леви / А.И. Будкин // Сиб. матем. журнал. – 1999. – V. 40, №2.

5. Будкин, А.И. О классах Леви, порожденных нильпотентными группами // А.И. Будкин / Алгебра и логика. – 2000. – V. 39, №6.

6. Kappe, L.C. On three-Engel groups / L.C. Kappe, W.P. Kappe // Bull. Aust. Math. Soc. – 1972. – V. 7, №3.

7. Будкин, А.И. О квазимногообразиях Леви, порожденных нильпотентными группами / А.И. Будкин, Л.В. Таранина // Сиб. матем. журнал. – 2000. – V. 41, №2.

8. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin; Heidelberg; New York, 1967.

9. Каргаполов, М.И. Основы теории групп / М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков. – М., 1972.

10. Будкин, А.И. К теории квазимногообразий алгебраических систем / А.И. Будкин, В.А. Горбунов // Алгебра и логика. – 1975. – V. 14, №2.

11. Мальцев, А.И. Алгебраические системы / А.И. Мальцев. – М., 1970.

12. Курош, А.Г. Теория групп / А.Г. Курош. – М., 1967.

13. Будкин, А.И. Квазимногообразия групп / А.И. Будкин. – Барнаул, 2002.

14. Горбунов, В.А. Алгебраическая теория квазимногообразий / В.А. Горбунов. – Новосибирск, 1999.

15. Будкин, А.И. О решетке квазимногообразий нильпотентных групп / А.И. Будкин // Сиб. матем. журнал. – 1994. – V. 33, №1.