УДК 512.552.4

А.С. Кузьмина

О строении колец с планарными графами делителей нуля

В данной работе рассматриваются ассоциативные кольца.

Определение. *Графом делителей нуля кольца* R (не обязательно коммутативного и не обязательно имеющего единицу) называется граф, вершинами которого являются все ненулевые делители нуля кольца (односторонние и двусторонние), причем две различные вершины x, y соединяются ребром тогда и только тогда, когда либо $xy = 0$, либо $yx = 0$ (см.: [1]).

Граф делителей нуля кольца R обычно обозначается через $\Gamma(R)$. Мы также будем использовать такое обозначение.

Идея построения графа делителей нуля впервые была использована в работе [2], в которой решались проблемы, связанные с раскраской графов делителей нуля коммутативных колец. Граф делителей нуля И. Бек определил следующим образом: в качестве вершин графа делителей нуля коммутативного кольца он рассматривал все элементы кольца, причем две различные вершины x и y соединял ребром тогда и только тогда, когда $xy = 0$.

В работе [3] Д. Андерсон и Ф. Ливингстон несколько изменили способ построения графа делителей нуля: вершинами графа делителей нуля коммутативного кольца с единицей считались все ненулевые делители нуля кольца. По мнению авторов, такое определение лучше иллюстрирует структуру множества делителей нуля кольца. Действительно, например, в [3, с. 438] доказано, что граф делителей нуля коммутативного кольца с единицей, вершинами которого являются лишь ненулевые делители нуля кольца, является связным. Если же рассматривать в качестве вершин графа все элементы кольца, то это утверждение становится очевидным, поскольку нуль – вершина, которая является смежной для всех остальных вершин кольца.

Позже в печати появились работы, в которых исследовались графы делителей нуля некоммутативных колец. Для некоммутативного кольца используются два определения графа делителя нуля. Во-первых, введено понятие ориентированного графа делителя нуля: вершинами такого графа считаются все делители нуля (левосторонние и правосторонние), причем две различные вершины соединяются ориентированным ребром $x \longrightarrow y$ тогда и только тогда, когда $xy = 0$ (см., в частности, работы: [1, 4]. Во-вторых, используется определение, приведенное нами выше (определенный таким образом граф делителей нуля не ориентирован)[1].

В дальнейшем на протяжении всей работы мы, говоря о графе делителей нуля кольца, будем подразумевать определение, приведенное нами в начале статьи (ясно, что в случае коммутативности кольца такое определение графа делителей нуля совпадает с определением Д. Андерсона и Ф. Ливингстона из работы [3]).

Часто в работах, посвященных графам делителей нуля, изучаются кольца, графы делителей нуля которых обладают тем или иным свойством. Так, в работах [5–7] исследуются коммутативные кольца с единицей, графы делителей нуля которых планарны. В частности, в статье [6] описаны все конечные коммутативные кольца с единицей, имеющие планарные графы делителей нуля. Работа [7] посвящена исследованию бесконечных коммутативных колец с единицей, граф делителей нуля которых планарен.

Настоящая работа посвящена исследованию колец (необязательно имеющих единицу и необязательно коммутативных), графы делителей нуля которых планарны [8, 9]. В первом разделе доказаны некоторые свойства графа делителей нуля кольца. Аналоги некоторых из этих свойств (предложения 1.1, 1.2) были доказаны для коммутативного случая в работе [3]. Во втором разделе мы описываем конечные подпрямо неразложимые кольца, удовлетворяющие тождествам $x^2 - x^3 f(x) = 0, p^t x = 0$, где $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ и $p > 2$ – простое число, и имеющие планарные графы делителей нуля. В третьем разделе изучаются локальные кольца, удовлетворяющие тождеству $x^2 - x^3 f(x) = 0$, где $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, графы делителей нуля которых планарны. Четвертый раздел посвящен исследованию конечных нильпотентных колец, имеющих планарные графы делителей нуля.

Введем обозначения и определения, исполь-

[1] Как видно из ссылок в работе [1] и неориентированный, и ориентированные графы делителей нуля некоммутативного кольца исследовались также в следующей работе: *Redmond S.P.* The zero-divisor graph of a noncommutative ring // Int. J. Commut. Rings. 2002. №1(4). P. 203–211.

зуемые в настоящей работе. Пусть для простого числа p

$N_{p^2} =< a; a^2 = pa, p^2a = 0 >;$

$A_{p^n} = \begin{pmatrix} GF(p^n) & GF(p^n) \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

$A^0_{p^n} = \begin{pmatrix} GF(p^n) & 0 \\ GF(p^n) & 0 \end{pmatrix};$

$B_p = \begin{pmatrix} GF(p) & GF(p) \\ 0 & GF(p) \end{pmatrix};$

$T_{2,p} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}; a, b \in GF(p) \right\};$

$N_{p,p} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; a, b \in GF(p) \right\}.$

В данной работе радикал Джекобсона кольца R обозначается через $J(R)$. Под термином *"локальное кольцо"* мы понимаем такое конечное кольцо R с единицей, для которого фактор-кольцо $R/J(R)$ является полем. Через $D(R)$ будем обозначать множество всех (односторонних и двусторонних) делителей нуля кольца R, через $N(R)$ – множество нильпотентных элементов кольца R. Кроме того, будем полагать $D(R)^* = D(R) \setminus \{0\}$.

Для любого элемента $a \in R$, где R – произвольное кольцо, будем использовать следующие обозначения: $l(a) = \{x \in R; xa = 0\}$, $r(a) = \{x \in R; ax = 0\}$, $ann(a) = l(a) \cap r(a)$.

Приведем некоторые определения из теории графов, используемые в настоящей работе (см.: [10–12]).

Маршрутом в графе G называется такая последовательность ребер $E_0, E_1, \ldots, E_n$ графа G, что конечная вершина ребра E_i совпадает с начальной вершиной ребра E_{i+1} для всех $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Маршрут называется *цепью*, если каждое его ребро встречается в нем не более одного раза. Маршрут называется *простой цепью*, если все его вершины различны. Граф G называется *связным*, если любая пара его различных вершин соединена простой цепью. *Длина маршрута* – количество ребер в нем. *Расстоянием* $d(u, v)$ между двумя различными вершинами u и v графа G называется длина кратчайшей простой цепи, соединяющей их; если u и v не соединены, то полагаем $d(u, v) = \infty$. *Диаметр* связного графа G есть максимальное расстояние между двумя его вершинами. Диаметр графа G обозначается $diam(G)$. *Степенью вершины* графа называется число ребер, инцидентных этой вершине.

Граф называется *конечным*, если множество его вершин и множество его ребер конечно [11]. *Двудольный граф* G – это граф, множество вершин V которого можно разбить на два непересекающихся непустых подмножества V_1 и V_2 таким образом, что каждое ребро графа G соединяет вершины из разных подмножеств. Если двудольный граф G содержит все ребра, соединяющие множества V_1 и V_2, то этот граф называется *полным двудольным*. Полные двудольные графы обозначаются $K_{n,m}$, где $n = |V_1|$ и $m = |V_2|$. *Полным n-вершинным графом* K_n называется граф (без петель и кратных ребер), все n вершины которого смежны между собой. *Эйлеровым* графом называется граф, имеющий цикл, в котором содержатся все вершины и все ребра графа и в котором каждое ребро встречается один раз. Граф называется *планарным*, если его можно изобразить на плоскости таким образом, чтобы никакие два его ребра не пересекались.

Напомним также, что граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного $K_{3,3}$ или K_5 (теорема Куратовского [12, с. 133]). На протяжении данной статьи мы неоднократно будем пользоваться этой теоремой.

1. Некоторые свойства графа делителей нуля кольца

Предложение 1.1. *Пусть R – произвольное кольцо. Тогда граф $\Gamma(R)$ конечный в том и только том случае, когда либо кольцо R конечно, либо $D(R) = \{0\}$.*

Доказательство. Положим, что $\Gamma(R)$ является конечным и непустым графом. Тогда найдутся ненулевые $x, y \in R$, такие, что $xy = 0$. Поскольку $r(x) \subset D(R)$, то $r(x)$ – конечное множество. Кроме того, $yr \in r(x)$ для всех $r \in R$. Если кольцо R бесконечно, то найдется $i \in r(x)$ такой, что множество $J = \{t \in R | yt = i\}$ бесконечно. Для всех $t, s \in J$ имеем $y(t - s) = 0$. Таким образом, множество $r(y) \subset D(R)$ бесконечно; противоречие. Следовательно, кольцо R должно быть конечным. Обратное утверждение очевидно. Предложение доказано.

Предложение[2] **1.2.** *Пусть R – произвольное кольцо. Тогда граф $\Gamma(R)$ связный и $diam(\Gamma(R)) \leq 3$.*

Доказательство. Если $\Gamma(R)$ состоит лишь из одной вершины, то все доказано. Поэтому будем полагать, что в $\Gamma(R)$ найдутся две различные вершины x и y. Если $xy = 0$ или $yx = 0$, то $d(x, y) = 1$. Поэтому будем считать, что $xy \neq 0$ и $yx \neq 0$.

[2] Как видно из ссылок в работе [1], данное утверждение независимо было доказано в следующей работе: *Redmond S.P.* The zero-divisor graph of a noncommutative ring // Int. J. Commut. Rings. 2002. №1(4). P. 203–211.

Пусть $x^2 = y^2 = 0$. Если $xy = y$, то $0 = x^2y = xy$; противоречие. Если $xy = x$, то $0 = xy^2 = xy$; противоречие. Таким образом, $xy \neq x, xy \neq y$. Тогда $x - xy - y$ является простой цепью длины 2, соединяющей x и y.

Пусть $x^2 = 0$ и $y^2 \neq 0$. Тогда найдется $b \in D(R)^* \setminus \{x, y\}$, такой, что $yb = 0$ либо $by = 0$. Пусть $yb = 0$. Если $bx = 0$, то x и y соединены простой цепью длины 2: $x - b - y$. Пусть $bx \neq 0$. Если $bx = x$, то $0 = ybx = yx$; противоречие. Если $bx = y$, то $0 = bx^2 = yx$; противоречие. Следовательно, $bx \neq x$ и $bx \neq y$. Поэтому x и y соединены простой цепью длины 2: $x - bx - y$. Для случая, когда $by = 0$, рассуждая таким же образом, можно показать, что x и y соединены простой цепью длины 2.

Аналогично рассматривается случай, когда $x^2 \neq 0$ и $y^2 = 0$.

Далее, пусть $x^2 \neq 0, y^2 \neq 0$. Тогда найдется $b \in D(R)^* \setminus \{x, y\}$, такой, что $yb = 0$ либо $by = 0$, и найдется $a \in D(R)^* \setminus \{x, y\}$, такой, что $xa = 0$ либо $ax = 0$. Если $a = b$, то x и y соединены простой цепью длины 2: $x - a - y$. Пусть $a \neq b$. Возможны следующие случаи: 1) $xa = 0, by = 0$; 2) $ax = 0, yb = 0$; 3) $ax = 0, by = 0$; 4) $xa = 0, yb = 0$. Пусть $xa = 0, by = 0$. Если $ab = 0$, то x и y соединены простой цепью длины 3: $x - a - b - y$. Пусть $ab \neq 0$. Если $ab = x$, то $0 = xab = x^2$; противоречие. Если $ab = y$, то $0 = aby = y^2$; противоречие. Таким образом, $ab \neq x, ab \neq y$. Поэтому x и y соединены простой цепью длины 2: $x - ab - y$. Аналогично рассматривается случай, когда $ax = 0, yb = 0$.

Пусть теперь $ax = 0, by = 0$. Если $ya = 0$, то x и y соединены простой цепью длины 2: $x - a - y$. Пусть $ya \neq 0$. Если $ya = x$, то $0 = yax = x^2$; противоречие. Если $ya = y$, то $yax = yx = 0$. Снова получили противоречие. Таким образом, $ya \neq x, ya \neq y$. Если $ya = b$, то x и y соединены простой цепью длины 2: $x - ya - y$. Если же $ya \neq b$, то x и y соединены простой цепью длины 3: $x - ya - b - y$.

Аналогично рассматривается случай, когда $xa = 0, yb = 0$ (в этом случае длина цепи, соединяющей x и y, зависит от произведения ay). Предложение доказано.

Предложение 1.3. *Пусть $\Gamma(R) = K_{n,m}$ для некоторого кольца R. Тогда либо в кольце R нет ненулевых нильпотентных элементов, либо $\Gamma(R) = K_{1,m}$.*

Доказательство. Пусть $\Gamma(R) = K_{n,m}$ и $D(R)^* = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Если R содержит ненулевой нильпотентный элемент, то найдется такой ненулевой элемент $a \in R$, что $a^2 = 0$. Поскольку $a^2 = 0$, то $a \in D(R)^*$, т.е. a является вершиной в $\Gamma(R)$. Следовательно, $a \in V_1$ или $a \in V_2$. Положим, что $a \in V_1$.

Пусть $a \neq -a$. Следовательно, $-a \in V_2$. Предположим, что $V_1 \setminus \{a\} \neq \emptyset$, и возьмем $v \in V_1 \setminus \{a\}$. Тогда $-av = 0$ либо $v(-a) = 0$, т.е. $av = 0$ или $va = 0$; противоречие. Следовательно, $V_1 = \{a\}$ и $\Gamma(R) = K_{1,m}$.

Пусть $a = -a$. Если $V_1 = \{a\}$, то все доказано. Положим, что $V_1 \setminus \{a\} \neq \emptyset$. Возьмем $v \in V_1 \setminus \{a\}$ и $b \in V_2$. Тогда или $ab = 0$, или $ba = 0$. Заметим, что $av \neq 0$ и $va \neq 0$, причем $va^2 = 0, a^2v = 0$, т.е. $va, av \in V_2$. Однако либо $(va)b = 0$, либо $b(av) = 0$. Следовательно, $b = va$ или $b = av$. Кроме того, $(va)(av) = 0$, т.е. $va = av = b$. В силу произвольности выбора элемента b имеем $V_2 = \{b\}$ и $\Gamma(R) = K_{1,m}$. Предложение доказано.

Из теории графов известно, что связный граф является эйлеровым в том и только в том случае, если каждая вершина этого графа имеет четную степень.

Теорема 1.1. *Пусть R – конечное кольцо с единицей. Граф $\Gamma(R)$ является эйлеровым в том и только в том случае, если R удовлетворяет одному из следующих условий:*

(1) R – поле;

(2) $R = \oplus_{i=1}^{k} GF(p_i^{\alpha_i})$, причем $p_i \neq 2$ при $i = 1, ..., k$ и $k \geq 2$;

(3) R – такое локальное кольцо, что $|R| = 2^n, n \geq 2$, и $x^2 = 0$ для всех $x \in J(R)$.

Доказательство. Предположим, что R – конечное кольцо с единицей и граф $\Gamma(R)$ является эйлеровым. Пусть $n = |R| = {p_1}^{\alpha_1} \ldots {p_s}^{\alpha_s}, s \geq 1$. Тогда $R = R_1 \oplus \ldots \oplus R_s$, где $|R_i| = {p_i}^{\alpha_i}, i = 1, \ldots, s$.

Случай 1. Пусть $s \geq 2$ и e_i – единица кольца $R_i, i \leq s$.

Рассмотрим элемент $a = (0, \ldots, 0, e_i, 0, \ldots, 0)$. Его аннулятор равен

$$R_1 \oplus \ldots \oplus R_{i-1} \oplus \{0\} \oplus R_{i+1} \oplus \ldots \oplus R_s,$$

и число смежных вершин для элемента a в $\Gamma(R)$ равно

$${p_1}^{\alpha_1} \ldots {p_{i-1}}^{\alpha_{i-1}} {p_{i+1}}^{\alpha_{i+1}} \ldots {p_s}^{\alpha_s} - 1.$$

Так как граф $\Gamma(R)$ эйлеров, то это число должно быть четным, т.е. $p_i \neq 2$ для всех $i \leq s$. Таким образом, n – нечетное число. В частности, если $2x = 0$ для некоторого $x \in R$, то $x = 0$. Пусть найдется такой ненулевой элемент $u \in R$, что $u^2 = 0$. Тогда $u \neq -u$ и степень элемента u в графе $\Gamma(R)$ будет нечетной. Действительно, вершина $-u$ является смежной с u и для любой смежной с u вершины $y (y \neq -u)$ вершина

$-y$ тоже является смежной с u. Таким образом, мы показали, что степень u нечетна; противоречие. Следовательно, при $s \geq 2$ в кольце R нет ненулевых нильпотентных элементов, т.е. R – прямая сумма полей $GF(q_i), 1 \leq i \leq k$, где q_i – нечетные числа.

Случай 2. Пусть $|R| = p^n$, где $p > 2$ – простое число и $n \geq 2$ – натуральное число.

Если $J(R) \neq 0$, то найдется $0 \neq a \in J(R)$, такой, что $a^2 = 0$. Тогда $a \neq -a$ и степень a нечетна. Действительно, $-a$ является смежной с a. Кроме того, для любой вершины y, смежной с вершиной a и не равной $-a$, вершина $-y$ тоже является смежной с a. Таким образом, мы показали, что если $a^2 = 0$, то степень вершины a нечетна. Противоречие. Следовательно, $J(R) = 0$ и R – прямая сумма полей характеристики p.

Случай 3. Пусть $|R| = 2^n$, где $n \geq 2$. Предположим, что в кольце R существует такой элемент $a \in D(R)^*$, что $a^2 \neq 0$ и $ann(a) \neq (0)$. По теореме Лагранжа $|l(a)|, |r(a)|, |ann(a)|$ – четные числа. Следовательно, степень элемента a, равная

$$|(l(a) \cup r(a)) \setminus \{0\}| = |l(a)| + |r(a)| - |ann(a)| - 1,$$

является нечетным числом. Полученное противоречие показывает, что для каждого $a \in D(R)$ $a^2 = 0$ либо $ann(a) = (0)$.

Далее, если $J(R) = 0$, то R – прямая сумма полных матричных колец над полями характеристики 2. Однако $e_{11}^2 \neq 0$ и $ann(e_{11}) \neq 0$, поскольку $e_{22} \in ann(e_{11})$. Значит, в разложении R не может быть матричных колец даже второго порядка, т.е. $R = \oplus_{i=1}^{k} GF(2^{\beta_i})$. Пусть $k \geq 2$ и e_1 – единица поля $GF(2^{\beta_1})$. Обозначим $a = (e_1, 0, 0, \ldots, 0) \in R$. Тогда $a^2 \neq 0$ и $ann(a) \neq (0)$; противоречие. Следовательно, $k = 1$ и R – поле.

Пусть теперь $J(R) \neq 0$. Следовательно, $R/J(R) \cong \oplus_{i=1}^{k} M_{n_i}(GF(2^{\beta_i}))$ и найдется такое натуральное число $N \geq 1$, что $J(R)^N \neq 0$, $J(R)^{N+1} = 0$. Для любого ненулевого $a \in J(R)$ имеем $ann(a) \neq (0)$, поскольку $0 \neq J(R)^N \subseteq ann(a)$. Поэтому $a^2 = 0$ для всех $a \in J(R)$. Пусть $e_1, ..., e_k$ – система ортогональных идемпотентов, образы которых в $R/J(R)$ являются единицами в $M_{n_1}(GF(2^{\beta_1})), ..., M_{n_k}(GF(2^{\beta_k}))$ соответственно. Пусть $k \geq 2$. Тогда $e_1^2 \neq 0$ и $ann(e_1) \neq (0)$, поскольку $e_2 \in ann(e_1)$; противоречие. Значит, $k = 1$ и $R/J(R) = M_{n_1}(GF(2^{\beta_1}))$. Предположим, что $n_1 > 1$. В силу нильпотентности $J(R)$ кольцо R является SBI-кольцом [13, с. 84]. Следовательно, согласно [13, с. 86], систему матричных единиц кольца $M_{n_1}(GF(2^{\beta_1}))$ можно поднять в кольцо R. Рассуждая таким же способом, как это было сделано выше, придем к противоречию. Значит, $n_1 = 1$ и R – локальное кольцо.

Обратно, пусть $R = \oplus_{i=1}^{s} GF(p_i^{\alpha_i})$, $p_i \neq 2$ при $i = 1, ..., s$. Элемент $a = (a_1, \ldots, a_s)$ является делителем нуля тогда и только тогда, когда $a_i = 0$ для некоторого i. Рассмотрим произвольный делитель нуля $a = (a_1, a_2, \ldots, a_s)$. Пусть I – множество всех индексов i, для которых $a_i = 0$. Тогда множество смежных с элементом a вершин совпадает со множеством $(A_1 \oplus \ldots \oplus A_s) \setminus \{0\}$, где $A_k = GF(p_k^{\alpha_k})$ при $k \in I$ и $A_k = (0)$ при $k \notin I$. Поэтому степень элемента a равна $\prod_{k \in I} {p_k}^{\alpha_k} - 1$. Это четное число. Следовательно, граф $\Gamma(R)$ эйлеров.

Пусть R – локальное кольцо, причем $|R| = 2^n, n \geq 2$, и $x^2 = 0$ для всех $x \in J(R)$. Заметим, что для локального кольца $D(R) = J(R)$ (см.: [14, с. 74]). Далее, для любых $x, y \in D(R)$ имеем $0 = (x + y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = xy + yx$, т.е. $xy = -yx$. Поэтому $ann(x) = l(x) = r(x)$ для любого элемента $x \in D(R)$. Возьмем произвольный элемент $a \in D(R)^*$. Поскольку $a^2 = 0$, то $ann(a) \neq (0)$. Следовательно, $ann(a)$ имеет четный порядок. Поэтому степень элемента a, равная $|ann(a)| - |\{0, a\}|$, является четным числом (если степень элемента a равна нулю, то в силу связности графа делителей нуля граф $\Gamma(R)$ состоит из одной вершины a и, следовательно, эйлеров). Таким образом, мы показали, что граф $\Gamma(R)$ эйлеров. Теорема доказана.

2. Подпрямо неразложимые конечные кольца, удовлетворяющие тождеству вида $x^2 = x^3 f(x)$, где $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ и имеющие планарные графы делителей нуля

Лемма 2.1. *Пусть R – кольцо, удовлетворяющее некоторому тождеству вида*

$$x^2 = x^3 f(x), \tag{1}$$

где $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, и K – ниль-идеал кольца R. Тогда $xy + yx = 0, x^2 = 0$ и $2xyz = 0$ – тождества в K. В частности, если $p^t R = 0, t \geq 1$ и $p \neq 2$, то $K^3 = 0$.

Доказательство. Пусть $a \in K$ – произвольный ненулевой элемент. Тогда $a^N = 0$ для некоторого натурального числа $N > 1$. Используя тождество (1), получим, что $a^2 = a^3 f(a) = a^4 \left(f(a)\right)^2 = \ldots = a^N \left(f(a)\right)^{N-2} = 0$. Таким образом, $a^2 = 0$ для всех $a \in K$. Пусть $a, b \in K$. Тогда $(a+b)^2 = 0$, т.е. $0 = a^2 + ab + ba + b^2 = ab + ba$. Таким образом, $ab + ba = 0$ для всех $a, b \in K$. Далее, возьмем произвольные элементы $a, b, c \in K$. Воспользовавшись тождеством $ab + ba = 0$, получим, что $a(bc) = -(bc)a = -b(ca) = (ca)b =$

$c(ab) = -abc$, т.е. $2abc = 0$. Если же $p^tR = 0, t \geq 1$ и $p \neq 2$, то $abc = 0$. Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Графы* $\Gamma(A_{p^n}), \Gamma(A^0_{p^n})$ *при* $p^n > 3$ *не планарны. Графы* $\Gamma(A_3), \Gamma(A^0_3)$ *планарны. Граф* $\Gamma(B_p)$ *не планарен при* $p > 2$.

Доказательство. Граф $\Gamma(A_{p^n})$ при $p^n > 3$ не планарен, поскольку граф делителей нуля множества $\{e_{11}, \alpha e_{11}, \beta e_{11}\} \cup \{e_{12}, \alpha e_{12}, \beta e_{12}\}$, где $\alpha, \beta \in GF(p^n) \setminus \{0,1\}$ и $\alpha \neq \beta$, содержит в качестве подграфа $K_{3,3}$. Аналогично граф $\Gamma(A^0_{p^n})$ при $p^n > 3$ не планарен, поскольку граф делителей нуля множества $\{e_{11}, \alpha e_{11}, \beta e_{11}\} \cup \{e_{21}, \alpha e_{21}, \beta e_{21}\}$, где $\alpha, \beta \in GF(p^n) \setminus \{0,1\}$ и $\alpha \neq \beta$, также содержит в качестве подграфа $K_{3,3}$. Граф $\Gamma(B_p)$ не планарен при $p > 2$, поскольку граф множества $\{e_{11}, 2e_{11}, e_{12}\} \cup \{e_{22}, 2e_{22}, 2e_{12}\}$ содержит в качестве подграфа $K_{3,3}$. Поскольку все вершины графа $\Gamma(A_3)$, кроме e_{12} и $2e_{12}$, имеют степень 2, то граф $\Gamma(A_3)$ не может содержать подграфа, гомеоморфного K_5 или $K_{3,3}$. Поэтому граф $\Gamma(A_3)$ планарен. Аналогично все вершины графа $\Gamma(A^0_3)$, кроме e_{21} и $2e_{21}$, имеют степень 2. Поэтому $\Gamma(A^0_3)$ также планарен. Лемма доказана.

Предложение 2.1. *Пусть R – подпрямо неразложимое конечное кольцо, удовлетворяющее некоторому тождеству вида (1), причем граф $\Gamma(R)$ планарен. Пусть $p^tR = 0$, где $p > 2$ – простое число. Тогда для кольца R выполняется одно из следующих условий:*

(1) $R \cong GF(p^n)$;

(2) $R^3 = (0)$;

(3) R *– локальное кольцо, такое, что* $J(R)^3 = (0)$;

(4) $R \cong A_3(A^0_3)$.

Доказательство. Обозначим $J(R)^* = J(R) \setminus \{0\}$. Если $J(R) = 0$, то по теореме Веддерберна-Артина $R = M_k(GF(p^n))$. Если $k \geq 2$, то, по лемме 2.2 $\Gamma(R)$, не планарен; противоречие. Значит, $R \cong GF(p^n)$. Если $R = J(R)$, то, по лемме 2.1, $R^3 = (0)$.

Пусть $J(R) \neq (0), R \neq J(R)$ и $p^tR = 0$, где $p > 2$ – простое число. Тогда $R/J(R) \cong \oplus_{i=1}^k M_{n_i}(GF(q_i))$. По лемме 2.1 $xy + yx = 0, x^2 = 0, xyz = 0$ – тождества в $J(R)$. Покажем, что $n_1 = \ldots = n_k = 1$. Пусть $e_1, ..., e_k$ – система ортогональных идемпотентов, образы которых в $R/J(R)$ являются единицами в $M_{n_1}(GF(q_1)), ..., M_{n_k}(GF(q_k))$ соответственно. Предположим, например, что $n_1 > 1$. В силу нильпотентности $J(R)$ кольцо R является SBI-кольцом [13, с. 84]. Следовательно, согласно [13, с. 86], найдутся такие элементы $x, y, z, t \in e_1Re_1$, что $x^2 = x, y^2 = y, zt = x, tz = y, z^2 = t^2 = 0, xy = yx = 0, yz = zx = 0, xz = zy = z$. Тогда граф множества $\{x, 2x, z\} \cup \{y, 2y, 2z\}$ содержит в качестве подграфа $K_{3,3}$; противоречие. Следовательно, $n_1 = \ldots = n_k = 1$ и $R/J(R) \cong \oplus_{i=1}^k GF(q_i)$.

Заметим, что при $k > 3$ граф множества $\{e_1, 2e_1, e_2\} \cup \{e_3, 2e_3, e_4\}$ содержит в качестве подграфа граф $K_{3,3}$. Следовательно, $k \leq 3$.

Покажем, что для любого $i, 1 \leq i \leq k$, правый идеал $e_iJ(S)$ является двусторонним идеалом кольца S. Поскольку $xy = -yx$ – тождество в $J(R)$, то $J(R)(e_iJ(R)) \subseteq e_iJ(R)^2 \subseteq e_iJ(R)$. Пусть, далее, $s \notin J(R)$. Тогда $s = \sum_{j=1}^k \alpha_j e_j + q$, где $q \in J(R)$, $\alpha_j \notin J(R)^*, j = 1, ..., k$. Значит, $se_iJ(R) = \alpha_i e_iJ(R) + qe_iJ(R)$. Обозначим $q_i = \alpha_i e_i - e_i\alpha_i \in J(R), i = \overline{1,k}$. Тогда $\alpha_i e_iJ(R) = (\alpha_i e_i)e_iJ(R) = (q_i + e_i\alpha_i)e_iJ(R) \subseteq J(R)e_iJ(R) + e_iJ(R) \subseteq e_iJ(R)$. Следовательно, $se_iJ(R) = \alpha_i e_iJ(R) + qe_iJ(R) \subseteq e_iJ(R)$. Тем самым доказано, что $e_iJ(R) \triangleleft R, i = \overline{1,k}$. Аналогично доказывается, что односторонние идеалы $J(R)e_i$, $(1 - e_i)J(R) = \{b - e_ib | b \in J(R)\}$, $J(R)(1 - e_i) = \{b - be_i | b \in J(R)\}, i = \overline{1,k}$ являются двусторонними идеалами кольца R.

Поскольку $R \neq J(R)$, то, по крайней мере, один из идемпотентов $e_i, i = \overline{1,k}$, не равен нулю. Не нарушая общности, мы можем положить, что $e_1 \neq 0$. Для завершения доказательства предложения рассмотрим следующие случаи.

Случай 1. $e_1J(R) = (0)$.

Покажем, что $J(R)e_1 \neq (0)$. Предположим противное, т.е. $J(R)e_1 = (0)$. Рассмотрим идеал $I = Re_1R$. Поскольку $e_1 \neq 0$, то $I \neq (0)$. Покажем, что $I \cap J(R) = (0)$. Пусть $q = \sum_{i=1}^m x_ie_1y_i \in I \cap J(R)$, где $x_i, y_i \in R, i \leq m$. Мы можем записать $x_i = \sum_{j=1}^k \alpha_{ij}e_j + q_i$, $y_i = \sum_{l=1}^k \beta_{il}e_l + q'_i$, где $q_i, q'_i \in J(R)$, $\beta_{il}e_l - e_l\beta_{il} = q'_{il} \in J(R)$, $\alpha_{ij}, \beta_{il} \notin J(R)^*$. Тогда имеем

$$q = \sum_{i=1}^m \left((\sum_{j=1}^k \alpha_{ij}e_j + q_i)e_1(\sum_{l=1}^k \beta_{il}e_l + q'_i) \right) =$$

$$= \sum_{i,j,l} \alpha_{ij}e_je_1\beta_{il}e_l = \sum_{i,l} (\alpha_{i1}e_1(e_l\beta_{il} + q'_{il})) =$$

$$= \sum_{i=1}^k \alpha_{i1}e_1\beta_{i1}.$$

Далее,

$$q = \sum_{i=1}^k \alpha_{i1}e_1e_1\beta_{i1} = \sum_{i=1}^k (\alpha_{i1}e_1(\beta_{i1}e_1 + q'_{i1})) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^k \alpha_{i1}e_1\beta_{i1} \right) e_1 = qe_1 = 0.$$

Следовательно, $I \cap J(R) = (0)$, причем $J(R) \neq (0)$ и $I \neq (0)$. Получили противоречие с тем, что кольцо R подпрямо неразложимо. Поэтому

$J(R)e_1 \neq (0)$. Так как $J(R)(1-e_1)$ – идеал кольца R и $J(R)e_1 \cap J(R)(1-e_1) = (0)$, то $J(R)(1-e_1) = 0$. Отсюда следует, что $J(R) = J(R)e_1$. Значит, $J(R)^2 = J(R)e_1 J(R) = (0)$. Кроме того, $pJ(R) = pJ(R)e_1 = J(R)pe_1 \subseteq J(R)^2 = (0)$ и $pe_1 = pe_1^2 = e_1(pe_1) \in e_1 J(R) = (0)$, т.е. $pJ(R) = 0$ и $pe_1 = 0$.

Если $k = 1$, то $pR = 0$ и R – $GF(p)$-алгебра. По теореме Веддерберна-Мальцева, $R = GF(q_1)e_1 \dot{+} J(R)$, где $e_1 J(R) = (0), J(R) = J(R)e_1$. Пусть u – ненулевой элемент из $J(R)$. Тогда $uR = uGF(q_1)e_1 \triangleleft R$. Если существует ненулевой элемент $v \in J(R)$, не содержащийся в uR, то $uR \cap vR = (0)$. Противоречие. Следовательно, $J(R) = uR$ и $R \cong A^0_{q_1}$. По лемме 2.1 $R \cong A^0_3$.

Если $k \geq 2$, то $(0) = J(R)e_1 \cap J(R)e_j = J(R) \cap J(R)e_j = J(R)e_j$ при $j \geq 2$. Рассуждая так же, как это было сделано выше, получим, что $J(R) = e_j J(R)$, $j \geq 2$. Если $k = 3$, то $J(R) = e_2 J(R) = e_3 J(R)$ и $J(R) = e_2 e_3 J(R) = (0)$. Противоречие. Следовательно, $k = 2, J(R) = e_2 J(R) e_1, pe_1 = 0, pe_2 = (pe_2)e_2 \in J(R)e_2 = (0)$ и R – $GF(p)$-алгебра. По теореме Веддерберна-Мальцева, $R = GF(q_1)e_1 \dot{+} GF(q_2)e_2 \dot{+} J(R)$. Пусть u – ненулевой элемент из $J(R)$. Тогда $ue_1 = e_2 u = u$. Подкольцо, порожденное элементами $\{e_1, e_2, u\}$, изоморфно кольцу B_p. Однако по лемме 2.1 при $p > 2$ граф $\Gamma(B_p)$ не планарен, поэтому случай $k = 2$ невозможен.

Аналогично при $J(R)e_1 = (0)$ получаем $R \cong A_3$.

Случай 2. $e_1 J(R) \neq (0)$ **и** $J(R)e_1 \neq (0)$.

Так как $e_1 J(R) \cap e_2 J(R) = (0)$ и $J(R)e_1 \cap J(R)e_2 = (0)$, то в силу того, что кольцо R подпрямо неразложимо, имеем $e_2 J(R) = (0)$ и $J(R)e_2 = (0)$. Кроме того, так как $(1-e_1)J(R) \cap e_1 J(R) = (0)$ и $J(R)(1-e_1) \cap J(R)e_1 = (0)$, то $(1-e_1)J(R) = (0)$ и $J(R)(1-e_1) = (0)$. Поэтому $e_1 J(R) = J(R) = J(R)e_1$.

Рассмотрим идеал $I = Re_2 R$. Возьмем $q \in Re_2 R \cap J(R)$. Проведя те же рассуждения, что и при рассмотрении случая 1, можно показать, что $q = qe_2 = 0$. Следовательно, $Re_2 R \cap J(R) = (0)$. Поскольку кольцо R подпрямо неразложимо и $J(R) \neq (0)$, то $Re_2 R = (0)$, т.е. $e_2 = 0$. Значит, $k = 1$.

Покажем, что e_1 – единица кольца R. Любой элемент a из кольца R может быть записан следующим образом: $a = e_1\alpha + q = \beta e_1 + q'$, где $q, q' \in J(R), \alpha, \beta \notin J(R)^*$. Значит, $e_1 a = e_1 \alpha + q = a$ и $ae_1 = \beta e_1 + q' = a$. Итак, e_1 – единица кольца R и R – локальное кольцо. Предложение доказано.

Как видно из предложения 2.1, задача полного описания конечных подпрямо неразложимых колец, удовлетворяющих тождеству вида (1) и имеющих планарный граф делителей нуля, разбивается на два случая: описание нильпотентных колец и описание локальных колец, имеющих планарные графы делителей нуля. Оказывается, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть R – подпрямо неразложимое конечное кольцо, удовлетворяющее некоторому тождеству вида $x^2 = x^3 f(x), f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, причем $p^t R = 0$, где $p > 2$ – простое число. Граф $\Gamma(R)$ планарен тогда и только тогда, когда R изоморфно одному из следующих колец:*

(1) $R \cong GF(p^n), p > 2, n \geq 1$;

(2) $R \cong A_3 (A^0_3)$;

(3) $R = \langle a : a^2 = 0, pa = 0 \rangle, p = 3, 5$;

(4) $R \cong \mathbb{Z}_{p^2}, p = 3, 5$;

(5) $R \cong T_{2,p}, p = 3, 5$.

Мы сначала докажем ряд вспомогательных утверждений и в конце раздела 4 вернемся к доказательству теоремы 2.1.

3. Локальные кольца, удовлетворяющие тождеству вида $x^2 = x^3 f(x)$, где $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, и имеющие планарные графы делителей нуля

На протяжении всего этого раздела мы будем использовать для локального кольца R следующее обозначение: $M = J(R)$. Напомним, что $D(R) = M$ для локального кольца R [14, с. 74] и по лемме 1.2 $x^2 = 0, xy + yx = 0, 2xyz = 0$ для всех $x, y, z \in M$. Все результаты данного раздела доказываются для локального кольца с $M \neq 0$, поскольку для любого поля граф делителей нуля пуст, следовательно, планарен.

Лемма 3.1 [14, с. 36]. *Пусть R – локальное кольцо. Тогда $|R| = p^t, |M| = p^r$, где p – некоторое простое число и $1 \leq r < t$.*

Предложение 3.1. *Пусть R – локальное кольцо с $M \neq 0$, удовлетворяющее тождеству вида (1) и имеющее планарный граф делителей нуля. Тогда R удовлетворяет одному из следующих условий:*

(1) $M^2 = 0, |M| \leq 5, |R| \leq 25$;

(2) $M^3 = 0, |M^2| = 2$;

(3) $M^3 \neq 0, M^4 = 0, |R| = 2^t, t \geq 4$.

Доказательство. Пусть $M^2 = 0$. Если $|M| \geq 6$, то $K_5 \subseteq \Gamma(R)$; противоречие. Следовательно, $|M| \leq 5$. Поскольку M – правое векторное пространство над полем R/M, то $|R/M| \leq |M| \leq 5$ и $|R| \leq 25$.

Рассмотрим случай, когда $M^2 \neq (0)$, $M^3 = (0)$. Если $\left|M^2\right| \geq 4$, то $|M| \geq 8$. Поэтому мы можем взять попарно различные ненулевые элементы $a, b, c \in M^2$ и попарно различные ненулевые элементы $x, y, z \in M \setminus \{a, b, c\}$. Граф $\{a, b, c\} \cup \{x, y, z\}$ содержит в качестве подграфа $K_{3,3}$; противоречие. Следовательно, $\left|M^2\right| \leq 3$. Покажем, что случай $\left|M^2\right| = 3$ невозможен. Пусть $\left|M^2\right| = 3$ и $M^2 = \{0, x, 2x\}, x^2 = 0$. Возьмем произвольный элемент $y \in M \setminus M^2$. Поскольку $y^2 = 0$, то граф делителей нуля множества $\{x, 2x, y, 2y, x + y\}$ образует K_5; противоречие. Следовательно, $\left|M^2\right| = 2$.

Осталось рассмотреть случай $M^3 \neq 0$. По лемме 2.1 $|R| = 2^t, t \geq 4$. Покажем, что индекс нильпотентности M в этом случае равен 4. Предположим противное, а именно: $M^{k-1} \neq 0$, $M^k = 0$, $k \geq 5$. Тогда $\left|M^2\right| \geq 8$ и $\left|M^{k-2}\right| \geq 4$. Кроме того, $M^2 M^{k-2} = 0$ и $k - 2 > 2$. Поэтому, взяв попарно различные ненулевые элементы $a, b, c \in M^{k-2}$ и $x, y, z \in M^2 \setminus \{a, b, c\}$, мы получим, что граф $K_{3,3}$ является подграфом графа $\Gamma(R)$; противоречие. Следовательно, $M^4 = 0$. Предложение доказано.

Теорема 3.1. *Пусть R – локальное кольцо с $M \neq 0$, удовлетворяющее тождеству вида (1) и имеющее планарный граф делителей нуля. Тогда R удовлетворяет одному из следующих условий:*

(1) $M^2 = 0, |M| \leq 5, |R| \leq 25$;

(2) $M^3 = 0, \left|M^2\right| = 2, |M| \leq 8, |R| \leq 16$, $R/M = \mathbb{Z}_2$;

(3) $M^4 = 0, \left|M^3\right| = 2, \left|M^2\right| = 4, |M| \leq 16$, $|R| \leq 32$, $R/M = \mathbb{Z}_2$.

Доказательство. Для доказательства теоремы нам нужно оценить порядок кольца R в случаях (2) и (3) из предложения 3.1. Итак, пусть $M^3 = 0, \left|M^2\right| = 2$. Поскольку M^2 – правое векторное пространство над полем R/M, то $\left|M^2\right| \geq |R/M|$ и $R/M = \mathbb{Z}_2$. Если $|M| = 4$, то все доказано. Поэтому будем считать, что $|M| \geq 8$. Тогда $\left|M/M^2\right| \geq 4$. Пусть $M^2 = \{0, x\}$. Возьмем $m_1, m_2 \in M \setminus M^2$ такие, что $m_1 \neq m_2$ и $m_1 - m_2 \neq x$, т.е. $m_1 - m_2 \notin M^2$. Если $m_1 m_2 = 0$, то множество $\{x, m_1, m_2, m_1 + x, m_2 + x\}$ образует K_5; противоречие. Значит, $m_1 m_2 \neq 0$. Таким образом, $ann(m) = \{0, x, m, m + x\}$ для любого элемента $m \in M \setminus M^2$. Рассмотрим множество представителей ненулевых классов $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$ в M/M^2. Согласно только что доказанному, $m_i m_j \neq 0$ при $i \neq j$. Значит, $m_i m_j = x$ при $i \neq j$. Если $k \geq 4$, то имеем $m_1 m_2 = m_1 m_3 = m_1 m_4 = x$. Следовательно, $m_1(m_2 - m_3) = m_1(m_4 - m_3) = 0$. Значит, $m_2 - m_3, m_4 - m_3 \in ann(m_1) = \{0, x, m_1, m_1 + x\}$. В силу выбора m_2, m_3, m_4 элементы $m_2 - m_3, m_4 - m_3$ не могут быть равными нулю или x. Пусть $m_2 - m_3 \neq m_4 - m_3$. Тогда возможны два случая: 1) $m_2 - m_3 = m_1$, $m_4 - m_3 = m_1 + x$; 2)$m_2 - m_3 = m_1 + x$, $m_4 - m_3 = m_1$. Нетрудно видеть, что в обоих случаях $m_4 - m_2 \in M^2$; противоречие. Значит, $m_2 - m_3 = m_4 - m_3$, т.е. $m_2 = m_4$. Снова пришли к противоречию. Следовательно, $k \leq 3$. Поэтому $|M| = 2k + 2 \leq 8$ и $|R| \leq 16$.

Рассмотрим теперь случай, когда $M^3 \neq 0$, $M^4 = 0$, $|R| = 2^t$, $t \geq 4$. Если $\left|M^2\right| \geq 6$, то граф $\Gamma(R)$ содержит граф K_5. Следовательно, $\left|M^2\right| \leq 4$. Поскольку $M^3 \neq 0$, то $\left|M^3\right| = 2, \left|M^2\right| = 4, R/M = \mathbb{Z}_2$. Граф $\Gamma(R)$ связен и планарен, поэтому в $\Gamma(R)$ существует некоторая вершина $x \in M$, степень которой не превосходит 5 [12, с. 129]. Таким образом, $|l(x)| \leq 7$ (поскольку $0, x \in l(x)$). Следовательно, $|M| = |Mx| \cdot |l(x)| \leq \left|M^2\right| \cdot |l(x)| \leq 4 \cdot 7 = 28$, т.е. $|M| \leq 16$ и $|R| \leq 32$. Теорема доказана.

4. Конечные нильпотентые кольца, имеющие планарные графы делителей нуля

Предложение 4.1. *Пусть R – конечное нильпотентное кольцо, имеющее планарный граф делителей нуля. Тогда R удовлетворяет одному из следующих условий:*

(1) $R^2 = 0, |R| \leq 5$*;*

(2) $R^3 = 0, \left|R^2\right| \leq 3$*;*

(3) $R^4 = 0, \left|R^3\right| = 2, \left|R^2\right| = 4$.

Доказательство. Пусть $R^k = 0, R^{k-1} \neq 0$. Покажем, что $k \leq 4$. Предположим, что $k \geq 5$. Обозначим $t = \left[\frac{k}{2}\right]$. Тогда $R^t R^{t+1} = 0$ и $\left|R^{t+1}\right| \geq 4, \left|R^t\right| \geq 8$. Взяв три ненулевых элемента из R^{t+1} и три ненулевых элемента из $R^t \setminus R^{t+1}$, получим, что в $\Gamma(R)$ содержится граф $K_{3,3}$; противоречие. Следовательно, $R^4 = 0$. Если $R^2 = 0$, то в силу того, что $\Gamma(R)$ не может содержать K_5, получаем $|R| \leq 5$.

Пусть $R^3 = 0, R^2 \neq 0$. Если $\left|R^2\right| \geq 4$, то $|R| \geq 8$, поэтому $K_{3,3}$ содержится в $\Gamma(R)$; противоречие. Следовательно, $\left|R^2\right| \leq 3$.

Осталось рассмотреть случай, когда $R^3 \neq 0$. Ясно, что $\left|R^2\right| \leq 5$. Если же $\left|R^3\right| \geq 4$, то $|R| \geq 16$. Значит, $K_{3,3}$ содержится в $\Gamma(R)$; противоречие. Поэтому возможен единственный вариант: $\left|R^3\right| = 2$, $\left|R^2\right| = 4$. Предложение доказано.

Теорема 4.1. *Пусть R – конечное нильпотентное кольцо, имеющее планарный граф делителей нуля. Тогда R удовлетворяет одному из следующих условий:*

(1) $R^2 = 0$, $|R| \leq 5$*;*

(2) $R^3 = 0, \left|R^2\right| = 2, |R| \leq 12$*;*

(3) $R^3 = 0, \left|R^2\right| = 3, |R| \leq 18$*;*

(4) $R^4 = 0, \left|R^3\right| = 2, \left|R^2\right| = 4, |R| \leq 24$.

Доказательство. Согласно предложению 4.1, $R^4 = 0$. Для доказательства теоремы рассмотрим следующие случаи.

Случай 1. Пусть $R^4 = 0, R^3 \neq 0$**.** По предложению 4.1 имеем $\left|R^3\right| = 2, \left|R^2\right| = 4$.

1.1. Пусть $y^2 = 0$ для всех $y \in R$. Тогда по лемме 2.1 $xy + yx = 0$ для всех $x, y \in R$. Поскольку $R^3 \neq 0$, то найдутся такие попарно различные элементы $a, b, c \in R \setminus \{0\}$, что $abc \neq 0$. Элементы b, ab, bc, abc попарно различны. Действительно, если $ab = bc$, то $abc = bc^2 = 0$; противоречие. Если $abc = ab$, то $0 = abc^2 = abc$; противоречие. Аналогично из того, что $abc = bc$, следует $0 = a^2ba = abc$; противоречие. Таким же образом доказывается, что элемент b не равен ни одному из элементов ab, bc, abc. Предположим, что $|l(b) \setminus \{0, b, ab, bc, abc\}| \geq 2$ и $b_1, b_2 \in l(b) \setminus \{0, b, ab, bc, abc\}$. Тогда множество $\{b, b_1, b_2\} \cup \{ab, bc, abc\}$ образует $K_{3,3}$; противоречие. Следовательно, $|l(b)| \leq 6$. Поэтому $|R| = |l(b)| \cdot |Rb| \leq |l(b)| \cdot \left|R^2\right| \leq 6 \cdot 4 = 24$.

1.2. Пусть $a^2 \neq 0$ для некоторого $a \in R$. Пусть $R^3 = \{0, x\}$. Предположим, что $\left|l(a) \setminus R^3\right| \geq 3$. Тогда найдутся попарно различные $a_1, a_2, a_3 \in l(a) \setminus R^3$. Заметим, что $a, x + a \notin l(a)$, поскольку $a^2 \neq 0$. Следовательно, множество $\{x, a, x + a\} \cup \{a_1, a_2, a_3\}$ образует $K_{3,3;}$ противоречие. Следовательно, $|l(a)| \leq 4$ и $|R| \leq 16$.

Случай 2. Пусть $R^3 = 0, \left|R^2\right| = 3$**.** Пусть также $R^2 = \{0, x, y\}$.

2.1. Пусть $z^2 = 0$ для всех $z \in R$. Возьмем произвольный элемент $b \in R \setminus R^2$. Если $|l(b) \setminus \{0, x, y, b\}| \geq 3$, то существуют попарно различные $b_1, b_2, b_3 \in l(b) \setminus \{0, x, y, b\}$. Видим, что множество $\{x, y, b\} \cup \{b_1, b_2, b_3\}$ образует $K_{3,3}$; противоречие. Значит, $|l(b)| \leq 6$ и $|R| \leq 18$.

2.2. Пусть $a^2 \neq 0$ для некоторого $a \in R$. Тогда $a, x + a, y + a \notin l(a)$. Предположим, что $\left|l(a) \setminus R^2\right| \geq 1$. Для любого $a_1 \in l(a) \setminus R^2$ множество $\{x, y, a_1\} \cup \{a, x + a, y + a\}$ образует $K_{3,3}$; противоречие. Значит, $|l(a)| = \left|R^2\right| = 3$ и $|R| \leq 9$.

Случай 3. Пусть $R^3 = 0, \left|R^2\right| = 2$**.** Пусть также $R^2 = \{0, x\}$.

3.1. Пусть $y^2 = 0$ для всех $y \in R$. Возьмем произвольный элемент $b \in R \setminus R^2$. Если $|l(b) \setminus \{0, x, b, x + b\}| \geq 3$, то для любых трех различных элементов $b_1, b_2, b_3 \in l(b) \setminus \{0, x, b, x + b\}$ множество $\{x, b, x + b\} \cup \{b_1, b_2, b_3\}$ образует $K_{3,3}$; противоречие. Поэтому $|l(b)| \leq 6$ и $|R| \leq 12$.

3.2. Пусть $a^2 \neq 0$ для некоторого $a \in R$. Тогда $x + a \notin l(a)$. Если $\left|l(a) \setminus R^2\right| \geq 3$, то для любых трех различных элементов $a_1, a_2, a_3 \in l(a) \setminus R^2$ множество $\{x, a, x + a\} \cup \{a_1, a_2, a_3\}$ образует $K_{3,3}$; противоречие. Следовательно, $|l(a)| \leq 4$ и $|R| \leq 8$. Теорема доказана.

Теперь, когда доказаны все необходимые результаты, мы можем приступить к доказательству теоремы 2.1.

Доказательство теоремы 2.1. Пусть R – подпрямо неразложимое конечное кольцо, удовлетворяющее некоторому тождеству вида $x^2 = x^3 f(x), f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, причем $p^t R = 0$, где $p > 2$ – простое число. По предложению 2.1, если кольцо R не является полем и не изоморфно кольцам A_3, A_3^0, то оно либо нильпотентно, либо локально. Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно.

Пусть кольцо R нильпотентно. Тогда по лемме 2.1 $y^2 = 0$ для всех $y \in R$. Из теоремы 4.1 следует, что либо R – кольцо с нулевым умножением на абелевой группе $(\mathbb{Z}_p, +), p = 3, 5$, либо $\left|R^2\right| = 3, |R| \leq 18$. Рассмотрим случай, когда $\left|R^2\right| = 3, |R| \leq 18$. Поскольку R подпрямо неразложимо, то $|R| = 9$. По [14, с. 54] кольцо R изоморфно либо $N_{3,3}$, либо кольцу N_9. Однако оба эти кольца не удовлетворяют никакому тождеству вида $x^2 = x^3 f(x)$.

Далее, пусть R – локальное кольцо. По теореме 3.1 $|R| \leq 25, |J(R)| \leq 5$, т.е. $|R| = p^2$, $|J(R)| = p$, $p = 3, 5$. По [14, с. 54] кольцо R изоморфно либо $\mathbb{Z}_{p^2}$, либо $T_{2,p}$, где $p = 3, 5$. Поскольку $J(\mathbb{Z}_{p^2})^2 = 0$ и $J(T_{2,p})^2 = 0$, то оба кольца удовлетворяют некоторым тождествам вида $x^2 = x^3 f(x)$. Далее, графы $\Gamma(T_{2,p})$ и $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})$ планарны, поскольку $\left|J(\mathbb{Z}_{p^2})\right| = |J(T_{2,p})| = p \leq 5$.

Нетрудно проверить, что все кольца из условия теоремы подпрямо неразложимы. Теорема доказана.

Литература

1. Akbari, S. On zero-divisor graphs of finite rings / S. Akbari, A. Mohammadian // Journal of Algebra. – 2007. – Vol. 314.

2. Beck, I. Coloring of Commutative Rings / I. Beck // Journal of Algebra. – 1988. – Vol. 116.

3. Anderson, D.F. The Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring / D.F. Anderson, P.S. Livingston // Journal of Algebra. – 1999. – Vol. 217(2).

4. Wu T. On directed zero-divisor graphs of

finite rings / T. Wu // Discrete Mathematics. – 2005. – № 296.

5. Akbari, S. When zero-divisor graph is planar or a complete r-partite graph / S. Akbari, H.R. Maimani, S. Yassemi // Journal of Algebra. – 2003. – Vol. 270.

6. Belshoff, R. Planar zero-divisor graphs / R. Belshoff, J. Chapman // Journal of Algebra. – 2007. – Vol. 316.

7. Smith, N. Infinite planar zero-divisor graphs / N. Smith // Communications in Algebra. – 2007. – Vol. 35.

8. Кузьмина, А.С. О строении конечных колец , имеющих планарные графы делителей нуля / А.С. Кузьмина // МАК-2007 : материалы 10-й регион. конф. по математике. – Барнаул, 2008.

9. Кузьмина, А.С. О строении колец с планарными графами делителей нуля / А.С. Кузьмина // Тезисы докладов Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша. – М., 2008.

10. Оре, О. Теория графов : пер. с англ. / О. Оре; под ред. Н.Н. Воробьева. – 2-е изд., стереотип. – М., 1980.

11. Татт, У. Теория графов : пер. с англ. / У. Татт. – М., 1988.

12. Харари, Ф. Теория графов : пер. с англ. / Ф. Харари; под ред. Г.П. Гаврилова. – М., 1973.

13. Джекобсон, Н. Строение колец / Н. Джекобсон. – М., 1961.

14. Елизаров, В.П. Конечные кольца / В.П. Елизаров. – М., 2006.