УДК 512.54.01

С.С. Глотов

О квазимногообразии, порожденном группой кватернионов*

Через $L_q(\mathcal{M})$ условимся обозначать решетку квазимногообразий, содержащихся в квазимногообразии $\mathcal{M}$, через $q\mathcal{R}$ – квазимногообразие, порожденное классом групп $\mathcal{R}$. Если класс $\mathcal{R} = \{G\}$ содержит лишь одну группу G, то вместо $q\mathcal{R}$ пишем просто qG.

Пусть $\mathcal{M}$ – произвольное квазимногообразие групп. Если множество всех собственных подквазимногообразий в $\mathcal{M}$, частично упорядоченное по включению, имеет максимальные элементы, то эти максимальные элементы называются максимальными квазимногообразиями (или коатомами) в решетке $L_q(\mathcal{M})$. Исследование коатомов в решетке $L_q(\mathcal{M})$ является важной задачей, поскольку умение находить порождающее множество групп каждого из коатомов часто приводит к описанию решетки $L_q(\mathcal{M})$.

Несложно заметить, что множество максимальных квазимногообразий групп не более чем счетно. В [1] доказано, что если G – конечная группа, то решетка $L_q(qG)$ имеет непустое конечное множество коатомов. Здесь же найден метод построения этих коатомов. Для почти полициклических групп G в [2] доказано, что множество коатомов в решетке $L_q(qG)$ конечно и всякое собственное квазимногообразие, содержащееся в qG, содержится в некотором из этих коатомов. Если конечно-порожденная группа G является расширением абелевой группы при помощи почти полициклической, то по [3] $L_q(qG)$ содержит лишь конечное множество коатомов.

Конечно-порожденная группа B, для которой решетка $L_q(qB)$ не имеет коатомов, найдена в [2]; конечно-порожденная группа G, для которой решетка $L_q(qG)$ имеет бесконечное множество коатомов, построена в [4].

Мы исследуем вопрос: когда каждое из максимальных квазимногообразий порождается одной конечной группой? С.А. Шаховой [5] для диэдральной группы D восьмого порядка показано, что единственное максимальное квазимногообразие в решетке $L_q(qD)$ не порождается конечной группой. В данной работе доказан аналогичный результат для группы кватернионов восьмого порядка.

Пусть $\mathcal{K}$ – некоторое квазимногообразие групп, $\mathcal{K}(G)$ – пересечение всех нормальных неединичных подгрупп N группы G, таких, что $G/N \in \mathcal{K}$.

Напомним, что неединичная группа $G \in \mathcal{K}$ называется подпрямо $\mathcal{K}$-неразложимой, если $\mathcal{K}(G) \neq (1)$. Иначе, группа G называется подпрямо $\mathcal{K}$-разложимой.

Подгруппа A декартова произведения $G = \overline{\prod_{i\in I}} G_i$ называется поддекартовым произведением групп G_i, если проекция A на каждый множитель G_i совпадает с G_i.

Будем использовать следующие обозначения:

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел;

$Z(G)$ – центр группы G;

(a) – циклическая группа, порожденная элементом a;

гр$(a_1, \ldots, a_n)$ – группа, порожденная элементами $a_1, \ldots, a_n$;

$A \leq B$ означает, что A – подгруппа группы B;

$A \cong B$ означает, что A изоморфна B;

$ker\varphi$ – ядро гомоморфизма φ;

$\bar{g}$ – образ элемента g при естественном гомоморфизме группы G на фактор-группу G/N;

гр$(x_1, \ldots, x_n \parallel t_1 = t_1', \ldots)$ – представление группы в порождающих $x_1, \ldots, x_n$ с определяющими соотношениями $t_1 = t_1', \ldots$

Нам понадобится следующий признак принадлежности конечно-определенной группы G квазимногообразию $q\mathcal{R}$ (частный случай теоремы 3[1]).

Теорема (признак принадлежности). Конечно-определенная в квазимногообразии $\mathcal{N}$ группа G принадлежит квазимногообразию, порожденному классом групп $\mathcal{R}$ ($\mathcal{R} \subseteq \mathcal{N}$), тогда и только тогда, когда для любого элемента $g \in G$, $g \neq 1$ существует гомоморфизм φ_g группы G в некоторую группу из класса $\mathcal{R}$, такой, что $\varphi_g(g) \neq 1$.

Для каждого простого числа p положим:

$$K = \text{гр}(a, b \parallel a^{p^2} = 1, a^p = b^p, b^{-1}ab = a^{p+1});$$

$\mathcal{M}$ – класс всех групп из qK, не содержащих подгрупп, изоморфных K.

Согласно [1], $\mathcal{M}$ является единственным максимальным квазимногообразием в решетке $L_q(qK)$ и определяется в qK квазитождеством

$(\forall x)(\forall y)(x^{p^2} = 1 \;\&\; x^p = y^p \;\&\; y^{-1}xy = x^{p+1} \to [x, y] = 1)$.

Через $\mathcal{K}$ будем обозначать многообразие, задаваемое тождествами:

$(\forall x)(x^{p^2} = 1)$,

*Работа выполнена при поддержке АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы" (Мероприятие 1).

$(\forall x)(\forall y)([x,y]^p = 1)$,

$(\forall x)(\forall y)(\forall z)([x,y,z] = 1)$,

где p – фиксированное простое число.

Рассмотрим группу G_n, $n \in \mathbb{N}$, имеющую в многообразии $\mathcal{K}$ представление

$G_n = \text{гр}(x_1,\dots,x_n \parallel x_i^p = [x_i, x_{i-(2j+1)}]$,

$1 \le 2j+1 < i, i = 2,\dots,n$,

$[x_{2i}, x_{2j}] = 1, 2 \le 2i, 2j \le n$,

$[x_{2i+1}, x_{2j+1}] = 1, 1 \le 2i+1, 2j+1 \le n)$.

В частности, G_1 – циклическая группа порядка p^2.

Нам понадобятся следующие свойства группы G_n (см. [5]):

1. Всякий элемент $g \in G_n$ может быть записан в виде $g = x_1^{m_1}\dots x_n^{m_n}$, где $0 \le m_i < p^2$, $i = 1,\dots,n$.

2. $G_n/(x_n) \cong G_{n-1}$, $n = 2,3,\dots$.

3. $Z(G_n) = \{x_1^{m_1}\dots x_n^{m_n} \mid m_i \equiv 0 \pmod p$, $i = 1,\dots,n\}$ – центр группы G_n, $n = 2,3,\dots$.

4. $\text{гр}(x_1,\dots,x_{n-1}) \cong G_{n-1}$.

5. $\text{гр}(x_2,\dots,x_n) \cong G_{n-1}$.

Будем пользоваться теоремой Ремака в следующем виде.

Теорема (Ремак)[6]. Если $N_i \lhd G$ $(i \in I)$, $\bigcap\limits_{i\in I} N_i = (1)$, то группа G изоморфна поддекартовому произведению групп G/N_i $(i \in I)$.

Будем ссылаться на следующую теорему.

Теорема (Дик)[7, с. 392]. Пусть $\mathcal{M}$ – данное квазимногообразие, $G, H \in \mathcal{M}$, и пусть группа G имеет в $\mathcal{M}$ представление

$$G = \text{гр}(\{x_i \mid i \in I\} \parallel \{r_j(x_{i_1},\dots,x_{i_j}) = 1 \mid j \in J\}).$$

Предположим, что группа H содержит множество элементов $\{g_i \mid i \in I\}$ такое, что для любого $j \in J$ равенство $r_j(g_{i_1},\dots,g_{i_j}) = 1$ истинно в H. Тогда отображение $x_i \to g_i$ $(i \in I)$ продолжимо до гомоморфизма $\varphi : G \to H$.

Нам понадобится также следующая

Лемма 1[5]. $G_n \notin qG_{n-1}$, $n = 2, 3, \dots$.

Всю необходимую информацию о группах можно найти в [6], о квазимногообразиях – в [7–9].

Лемма 2. При каждом $n \in \mathbb{N}$ группа G_n содержится в квазимногообразии $\mathcal{M}$.

Доказательство. В [5] показано, что $G_n \in qK$. Осталось установить, что группа K не вложима в группу G_n.

Пусть, напротив, группа K вложима в группу G_n. Тогда $qG_n = qK$. Из включения $G_{n+1} \in qK$ теперь следует, что $G_{n+1} \in qG_n$. Но по лемме 1 $G_{n+1} \notin qG_n$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 3. При $p = 2$ группа G_2 является подпрямо $\mathcal{M}$-неразложимой, и $x_2^2 \in \mathcal{M}(G_2)$.

Доказательство. По свойству 3 группы G_2, центр группы G_2 совпадает с множеством $\{1,\ x_1^2,\ x_2^2,\ x_1^2x_2^2\}$. Кроме того, хорошо известно (см., например: [6, с. 141, теорема 2]), что в нильпотентной группе любая нетривиальная нормальная подгруппа имеет неединичное пересечение с центром. Эти факты позволяют после несложных вычислений выписать все собственные неединичные нормальные подгруппы группы G_2, не содержащие x_2^2. Искомый список состоит из следующих подгрупп: $N_1 = (x_1^2)$, $N_2 = (x_1^2x_2^2)$.

Рассмотрим фактор-группы G_2/N_1 и G_2/N_2. Группа G_2/N_1 изоморфна диэдральной группе

$$D = \text{гр}(a, b \parallel a^4 = 1, b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1})$$

порядка 8. Так как $|K| = |D| = 8$ и D – подпрямо неразложимая группа, то из признака принадлежности легко выводится, что $D \notin qK$, откуда $G_2/N_1 \notin \mathcal{M}$. Группа G_2/N_2 изоморфна группе K. Из определения класса $\mathcal{M}$ теперь следует, что $G_2/N_2 \notin \mathcal{M}$.

Вышесказанное означает, что всякая неединичная нормальная подгруппа группы G_2, фактор-группа по которой принадлежит $\mathcal{M}$, содержит элемент x_2^2. Поскольку $G_2/(x_2^2)$ – абелева группа, то $G_2/(x_2^2) \in \mathcal{M}$, значит, $\mathcal{M}(G_2) = (x_2^2)$. Лемма доказана.

Лемма 4. При $p = 2$ и при каждом натуральном числе n, группа G_n является подпрямо $\mathcal{M}$-неразложимой.

Доказательство. Так как G_1 – циклическая группа порядка 4, то она является подпрямо $\mathcal{M}$-неразложимой, и $x_1^2 \in \mathcal{M}(G_1)$.

По лемме 3, группа G_2 – подпрямо $\mathcal{M}$-неразложима, и $x_2^2 \in \mathcal{M}(G_2)$.

В силу индукции предполагаем, что G_{n-1} является подпрямо $\mathcal{M}$-неразложимой группой и $x_{n-1}^2 \in \mathcal{M}(G_{n-1})$.

Пусть N – неединичная нормальная подгруппа группы G_n, такая, что $G_n/N \in \mathcal{M}$. Будем показывать, что $x_n^2 \in N$.

Так как пересечение неединичной нормальной подгруппы с центром в любой нильпотентной группе нетривиально [6, с. 141, теорема 2], то, ввиду свойства 3 группы G_n, достаточно рассмотреть следующие три случая.

Случай 1. Подгруппа N содержит неединичный элемент вида $x_2^{2\varepsilon_2}\dots x_n^{2\varepsilon_n}$, где $\varepsilon_i \in \{0,1\}$, $i = 2,\ \dots\ ,n$.

Пусть $B_1 = \text{гр}(x_2,\dots,x_n) \le G_n$. По свойству 5 группы G_n, группа B_1 изоморфна группе G_{n-1}. Поскольку

$$B_1/B_1 \cap N \cong B_1N/N \le G_n/N,$$

то $B_1/B_1 \cap N \in \mathcal{M}$. Так как $x_2^{2\varepsilon_2}\dots x_n^{2\varepsilon_n} \in$

$B_1 \cap N$, то $B_1 \cap N$ – неединичная нормальная подгруппа группы B_1. В силу предположения индукции, $x_n^2 \in B_1 \cap N \leq N$.

Случай 2. Элемент вида $x_1^2 x_2^{2\varepsilon_2} \dots x_{n-1}^{2\varepsilon_{n-1}}$ содержится в N, где $\varepsilon_i \in \{0,1\}$, $i = 2, \dots, n-1$.

Если $n = 2$, то требуемое следует из леммы 3, поэтому предполагаем, что $n \geq 3$.

Пусть $B_2=$ гр$(x_1, \dots, x_{n-1}) \leq G_n$. Тогда по свойству 4 группы G_n группа B_2 изоморфна группе G_{n-1}. Поскольку

$$B_2/B_2 \cap N \cong B_2N/N \leq G_n/N,$$

то $B_2/B_2 \cap N \in \mathcal{M}$. Так как $x_1^2 \dots x_{n-1}^{2\varepsilon_{n-1}} \in B_2 \cap N$, то $B_2 \cap N$ – неединичная нормальная подгруппа группы B_2. В силу предположения индукции, $x_{n-1}^2 \in B_2 \cap N \leq N$. Попадаем в первый случай и получаем $x_n^2 \in N$.

Случай 3. Подгруппа N одержит элемент вида $x_1^2 x_2^{2\varepsilon_2} ... x_{n-1}^{2\varepsilon_{n-1}} x_n^2$, где $\varepsilon_i \in \{0,1\}$, $i = 2, \dots, n-1$.

Обозначим через m – число порождающих, участвующих в записи фиксированного элемента $x_1^2 x_2^{2\varepsilon_2} \dots x_{n-1}^{2\varepsilon_{n-1}} x_n^2$ с ненулевым показателем степени.

Предположим сначала, что m – нечетное число. Допустим, что $x_n^2 \notin N$, тогда, по признаку принадлежности, существует гомоморфизм $\varphi : G_n/N \to K$, такой, что $\varphi(\bar{x}_n^2) \neq 1$. Так как группа K содержит единственный элемент порядка 2, то $\varphi(\bar{x}_n^2) = a^2$, следовательно, $\varphi(\bar{x}_n)$ – элемент четвертого порядка. Из того, что $a^2 = \varphi(\bar{x}_n^2) = \varphi([\bar{x}_n, \bar{x}_{n-1}])$, получаем, что $\varphi(\bar{x}_{n-1})$ – элемент четвертого порядка. Аналогично показывается, что $\varphi(\bar{x}_i)$ – элемент порядка 4 при каждом i. Следовательно, $\varphi(\bar{x}_i^2) = a^2$. Так как m – нечетное число, то видим, что $\varphi(\bar{1}) = \varphi(\bar{x}_1^2 \bar{x}_2^{2\varepsilon_2} \dots \bar{x}_{n-1}^{2\varepsilon_{n-1}} \bar{x}_n^2) = a^2$, а это неверно. Таким образом, $x_n^2 \in N$ в этом случае.

Теперь рассмотрим случай, когда m – четное число. Будем предполагать, что $x_{n-1}^2 x_n^2 \notin N$ (иначе попадаем в случай 1). Тогда для элемента $\bar{x}_{n-1}^2 \bar{x}_n^2$ из G_n/N существует гомоморфизм $\varphi : G_n/N \to K$, такой, что $\varphi(\bar{x}_{n-1}^2 \bar{x}_n^2) \neq 1$. Значит, $\varphi(\bar{x}_{n-1}^2 \bar{x}_n^2) = a^2$ – элемент второго порядка.

Так как $\varphi(\bar{x}_n^2) = \varphi([\bar{x}_n, \bar{x}_{n-1}])$ и элемент второго порядка группы K содержится в центре этой группы, то случай, когда $\varphi(\bar{x}_n)$ – элемент четвертого порядка, а $\varphi(\bar{x}_{n-1})$ – элемент второго порядка, невозможен. Сказанное означает, что в нашем случае $\varphi(\bar{x}_n) = a^2$ – элемент второго порядка, а $\varphi(\bar{x}_{n-1})$ – элемент четвертого порядка. Аналогично доказывается, что $\varphi(\bar{x}_i)$, при $i < n-1$, – элемент четвертого порядка. Значит, $\varphi(\bar{x}_i^2) = a^2$, при $i < n$, $\varphi(\bar{x}_n^2) = 1$. Так как $m-1$ нечетное число, то теперь выводим, что $\varphi(\bar{1}) = \varphi(\bar{x}_1^2 \bar{x}_2^{2\varepsilon_2} \dots \bar{x}_{n-1}^{2\varepsilon_{n-1}} \bar{x}_n^2) = \varphi(\bar{x}_1^2 \bar{x}_2^{2\varepsilon_2} \dots \bar{x}_{n-1}^{2\varepsilon_{n-1}}) \varphi(\bar{x}_n^2) = a^2$, что неверно.

Сказанное означает, что $x_{n-1}^2 x_n^2 \in N$. Теперь по случаю 1 $x_n^2 \in N$. Лемма доказана.

Теорема. Максимальное квазимногообразие в решетке $L_q(qK)$ не порождается конечной группой.

Доказательство. Заметим, что оно единственное и совпадает с $\mathcal{M}$. Допустим, что найдется такая конечная группа G, для которой $\mathcal{M} = qG$. Хорошо известно, что всякая группа из qG ($|G| < \infty$) вложима в декартову степень группы G и, следовательно, qG содержит лишь конечное множество подпрямо qG-неразложимых групп. В нашем случае по лемме 4 $\mathcal{M} = qG$ содержит бесконечное множество подпрямо $\mathcal{M}$-неразложимых групп. Это означает, что квазимногообразие $\mathcal{M}$ не порождается одной конечной группой. Теорема доказана.

Отметим, что работа выполнена под руководством профессора А.И. Будкина.

Библиографический список

1. Будкин, А.И. К теории квазимногообразий алгебраических систем / А.И. Будкин, В.А. Горбунов // Алгебра и логика. – 1975. – Т. 14, №2.

2. Будкин, А.И. О максимальных квазимногообразиях групп / А.И. Будкин // Алгебра и логика. – 1998. – Т. 37, №3.

3. Мальцев, А.И. Алгебраические системы / А.И. Мальцев. – М., 1970.

4. Budkin, A.I. On coatoms in lattices of quasivarieties of algebraic systems / A.I. Budkin // Algebra univers. 2001. V. 46.

5. Шахова, С.А. О квазимногообразии, порожденном конечной p-группой / С.А. Шахова // Матем. заметки. – 1993. – Т. 53, №3.

6. Будкин, А.И. Квазимногообразия групп / А.И. Будкин. – Барнаул, 2002.

7. Каргаполов, М.И. Основы теории групп / М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков. – М., 1972.

8. Блудов, В.В. О квазимногообразиях групп с бесконечным числом максимальных подквазимногообразий / В.В. Блудов // Алгебра и логика. – 2002. – Т. 41, №1.

9. Горбунов, В.А. Алгебраическая теория квазимногообразий / В.А. Горбунов. – Новосибирск, 1999.