УДК 621.372.82

И.А. Лойко, В.В. Щербинин

Применение вариационного принципа в многомодовом приближении к задаче расчета характеристик согласования прямоугольного волновода с импедансным фланцем

Введение. Невыступающие волноводные излучатели получили широкое применение в радиотехнике СВЧ-диапазона [1]. Они применяются в системах передачи информации, медицине, радиолокации и устройствах волновой диагностики различных материальных сред. Волноводные излучатели могут использоваться как непосредственно, так и в составе многоэлементных антенных решеток. Основными достоинствами этого класса антенн являются простота изготовления и высокая механическая прочность, которая является следствием отсутствия хрупких элементов и выступающих частей.

Наиболее важные параметры любой антенны – это характеристики согласования (коэффициент отражения и входной адмитанс) [2]. При использовании антенны в качестве передающей нужно добиться максимальной излучаемой мощности, а для этого требуется минимизация коэффициента отражения от раскрыва волновода. Следовательно, нужно улучшать согласование невыступающего волноводного излучателя с источником СВЧ-сигнала.

Характеристики согласования зависят от геометрии волновода, свойств среды, заполнения волновода, характеристик фланца и спектра возбуждающего сигнала. Представляет интерес теоретическое рассмотрение электромагнитных процессов в волноводной системе и среде.

Для решения подобных задач используется метод интегральных уравнений. Интегральные уравнения в задачах дифракции данной задачи имеют сложный вид, и построить аналитическое решение в замкнутой форме не удается. Поэтому для их решения можно использовать различные приближенные методы, в частности метод моментов (Галеркина) [3] и вариационный подход [4].

В методе моментов искомое поле на раскрыве волновода раскладывается по полной системе базисных ортогональных функций с последующим сведением задачи к бесконечной системе алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения. Достоинством метода является возможность получения численных результатов для любых физических характеристик антенной системы с заданной точностью. Недостатками метода являются неоднозначность выбора базисных функций, громоздкость выкладок, сложность компьютерных программ и большой объем вычислений.

Вариационный подход подразумевает построение заведомо приближенного решения задачи, причем его существование основывается на том, что искомая физическая характеристика системы является функционалом, стационарным в сравнении с первой вариацией функции, относительно которой построено решение интегрального уравнения [4]. Достоинством метода является его сравнительная простота, возможность получения общего решения задачи для волноводов различного поперечного сечения (если известны собственные волновые функции). Недостатком является невозможность оценки и контроля ошибки внутри данного метода. Оценка точности решения требует сравнения полученных численных результатов с экспериментальными данными или с результатами расчетов, полученных строгим методом.

В одномодовом приближении поставленная задача решена в работах [5, 6]. В данной статье к решению задачи применен вариационный подход в многомодовом приближении.

1. Постановка задачи. Геометрия задачи изображена на рисунке 1. В координатной области $z < 0$ находится полубесконечный волновод произвольного поперечного сечения, с параллельными стенками, заполненный однородным магнитодиэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε_w и магнитной проницаемостью μ_w. Волновод возбуждается электромагнитной волной, набегающей на раскрыв вдоль оси z. Диссипативные потери энергии в волноводе отсутствуют. Волновой процесс является стационарным и гармоническим во времени с круговой частотой ω. Зависимость от времени определяется как $e^{-i\omega t}$.

Апертура волновода расположена на бесконечном импедансном фланце, совпадающем с координатной плоскостью $z = 0$. Фланец характеризуется постоянным сторонним импедансом z, нормированным на импеданс свободного пространства $Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}$, где ε_0 и μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемости свободного пространства. В области $z > 0$ находится среда, которая характеризуется диэлектрической проницаемостью ε_s и магнитной проницаемостью μ_s. Решение задачи проводится в системе единиц СИ.

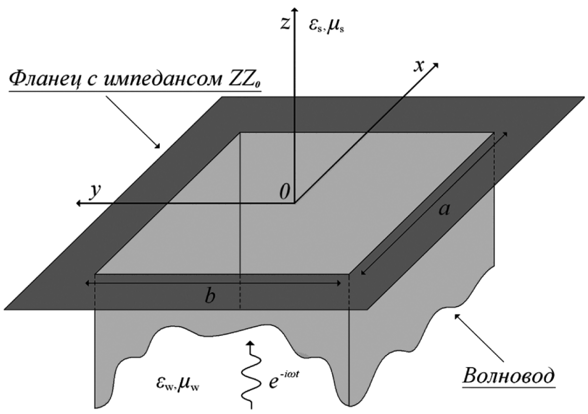

Рис. 1. Геометрия задачи при излучении из волновода

Требуется найти характеристики согласования волноводной антенны.

2. Представление поля на раскрыве. Поле в волноводе (в области $z \le 0$) является суперпозицией собственных типов волн [7, 8]. Касательные составляющие электрического и магнитного поля на раскрыве волновода могут быть представлены в виде суммы колебаний собственных типов волн:

$$\begin{aligned} \vec{E}_\tau(\vec{\rho},-0) &= \sum_{n=0}^{\infty} E_n \vec{\phi}_n(\vec{\rho}), \\ \vec{H}_\tau(\vec{\rho},-0) &= \sum_{n=0}^{\infty} H_n \vec{u} \times \vec{\phi}_n(\vec{\rho}), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\vec{\rho} = \{x, y\}$ – радиус-вектор на плоскости $z = const$; $\vec{u}$ – единичный вектор оси z; $\vec{\phi}_n(\vec{\rho})$ – нормированные поперечные волновые функции; E_n, H_n – комплексные амплитуды для собственных типов волн.

Функции $\vec{\phi}_n(\vec{\rho})$ ортогональны, причем условие ортогональности имеет вид:

$$\int_S \vec{\phi}_k(\vec{\rho}) \vec{\phi}_n(\vec{\rho}) d\vec{\rho} = \delta_{kn}, \tag{2}$$

здесь S – поперечное сечение раскрыва волновода; δ_{kn} – символ Кронекера.

Комплексные амплитуды электрического E_n и магнитного H_n поля связаны соотношениями:

$$Y_n = \frac{H_n}{E_n}, \tag{3}$$

где $n = \overline{0,1,...\infty}$ – номер моды; Y_n – входной адмитанс для n-ой моды волновода.
Каждая из амплитуд электрического и магнитного поля есть сумма падающей и отраженной волны:

$$\begin{aligned} E_n &= \alpha_n + \beta_n, \\ H_n &= Y_n^*(\alpha_n - \beta_n), \end{aligned} \tag{4}$$

где α_n – амплитуда падающей волны; β_n – амплитуда отраженной волны; Y_n^* – характеристический адмитанс для n-ой моды волновода.

Тогда входной адмитанс соответствующей моды будет равен:

$$Y_n = Y_n^* \frac{\alpha_n - \beta_n}{\alpha_n + \beta_n}. \tag{5}$$

Для задачи излучения электромагнитного поля из волновода амплитуды падающей волны α_n можно считать определенными и заданными изначально (например, генератором). Неизвестными величинами в задаче являются амплитуды волн, отраженных от раскрыва волновода. Поскольку задача является линейной, можно представить амплитуду отраженной волны в виде:

$$\beta_n = \Gamma_n \cdot \alpha_n + \sum_{k=0,k\neq n}^{\infty} \tau_{nk} \cdot \alpha_k, \tag{6}$$

где Γ_n – собственный коэффициент отражения n-ой моды; τ_{nk} – коэффициент возбуждения n-ой моды k-ой. Он равен отношению изменения амплитуды электрического поля возбуждаемой в отраженной волне n-ой моды к изменению амплитуды падающей волны k-ой моды. Амплитуды поля отраженной волны связаны с амплитудами падающей волны линейно, поэтому эквивалентной формой записи предыдущего уравнения является:

$$\vec{\beta} = \tilde{\Gamma}\vec{\alpha}, \tag{7}$$

где $\vec{\beta}$, $\vec{\alpha}$ – вектора равные $\{\beta_0, \beta_1, \ldots\}$ и $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots\}$ соответственно; $\tilde{\Gamma}$ – матрица отражения:

$$\tilde{\Gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma_0 & \tau_{01} & \tau_{02} & \cdots \\ \tau_{10} & \Gamma_1 & \tau_{12} & \cdots \\ \tau_{20} & \tau_{21} & \Gamma_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Матрица отражения содержит бесконечное число элементов. Входной адмитанс n-ой моды выражается через амплитуды падающей волны и элементы матрицы отражения:

$$\frac{Y_n}{Y_n^*} = \frac{1 - \Gamma_n - \sum\limits_{k=0,k\neq n}^{\infty} \tau_{nk} \cdot \dfrac{\alpha_k}{\alpha_n}}{1 + \Gamma_n + \sum\limits_{k=0,k\neq n}^{\infty} \tau_{nk} \cdot \dfrac{\alpha_k}{\alpha_n}}, \tag{9}$$

где $\dfrac{\alpha_k}{\alpha_n}$ – относительное распределение амплитуд в падающей волне по модам.

Матрица $\tilde{\Gamma}$ полностью описывает характеристики согласования волновода с фланцем.

3. Интегральное уравнение и формулы для расчетов. При использовании вариационного метода нужно найти такой функционал, вариация которого равна нулю при произвольных вариациях неизвестной функции [4]. Интегральное уравнение задачи может быть записано в следующем виде [5]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n\vec{\phi}_n(\vec{\rho}) = \int_S \tilde{G}(\vec{\rho},\vec{\rho}')\vec{F}(\vec{\rho}')d\vec{\rho}' \qquad (10)$$

где $\vec{F}(\vec{\rho})$ – вспомогательная функция, которая имеет следующий вид:

$$\vec{F}(\vec{\rho}) = \begin{cases} \vec{E}_\tau(\vec{\rho}) - ZZ_0\vec{u}\times\vec{H}_\tau(\vec{\rho}), & \rho\in S \\ 0, & \rho\notin S \end{cases} . \qquad (11)$$

Тензор $\tilde{G}(\vec{\rho},\vec{\rho}')$ представляет собой функцию Грина [6] данной задачи:

$$\tilde{G}(\vec{\rho},\vec{\rho}') = \frac{1}{(2\pi)^2 Z_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{y_{\|}(\vec{\xi})}{Z_w + Z\cdot y_{\|}(\vec{\xi})}\vec{\xi}\circ\vec{\xi} + \right. \\ \left. + \frac{y_{\perp}(\vec{\xi})}{Z_w + Z\cdot y_{\perp}(\vec{\xi})}(\vec{u}\times\vec{\xi})\circ(\vec{u}\times\vec{\xi})\right)\frac{e^{i\vec{\xi}(\vec{\rho}-\vec{\rho}')}}{\xi^2}d\vec{\xi} \qquad (12)$$

Здесь $y_{\perp}(\vec{\xi})$ – нормированный адмитанс парциальной плоской волны горизонтальной поляризации; $y_{\|}(\vec{\xi})$ – нормированный адмитанс парциальной плоской волны вертикальной поляризации; $\circ$ – операция тензорного умножения векторов. Результатом перемножения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является тензор $\tilde{T}$, элементы которого вычисляются по формуле $T_{ij} = a_i b_j$.

После разложения неизвестной функции в ряд по собственным типам волн из интегрального уравнения (10) можно получить систему алгебраических уравнений для комплексных амплитуд A_i:

$$\sum_{j=0}^{n} A_j\left(g_{ij} + \delta_{ij}\frac{Y_i^*}{(1-ZZ_0Y_i^*)}\right) = \\ = \frac{2\alpha_i Y_i^*}{(1-ZZ_0Y_i^*)}, \quad где \quad i=\overline{0..n} \qquad (13)$$

Коэффициенты g_{ij} для произвольного волновода рассчитываются как:

$$g_{ij} = \frac{1}{(2\pi)^2 Z_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{k_s}{Z_sW_s + Zk_s}\Phi_{i\|}^*\Phi_{j\|} + \right. \\ \left. + \frac{W_s}{Z_sk_s + ZW_s}\Phi_{i\perp}^*\Phi_{j\perp}\right)\xi d\xi d\psi, \qquad (14)$$

где $k_s = \sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}$ – волновое число в полупространстве $z>0$; $Z_s = \sqrt{\mu_s/\varepsilon_s}$ – нормированное импеданс полупространства $z>0$; $\Phi_{i\perp}$ – составляющая Фурье-образа собственной функции волновода, перпендикулярная поперечному волновому числу $\vec{\xi}$; $\Phi_{i\|}$ – составляющая, параллельная волновому числу $\vec{\xi}$.

4. Численные результаты и обсуждение. В качестве примера может быть рассмотрено возбуждение волновода волной основного типа. Для прямоугольного волновода волной основного типа является волна H_{10}.

Распространяющиеся моды, которые могут существовать в прямоугольном волноводе, могут содержать четное или нечетное целое число полуволн, укладывающихся вдоль стенок волновода. Симметрия задачи приводит к тому, что все моды распадаются на четыре группы, не взаимодействующие между собой. Волна основного типа может возбуждать высшие типы волн (как E, так и H), первый индекс которых представляет собой нечетное число, а второй – четное. Это утверждение справедливо как для случая идеально проводящего, так и для случая импедансного фланца.

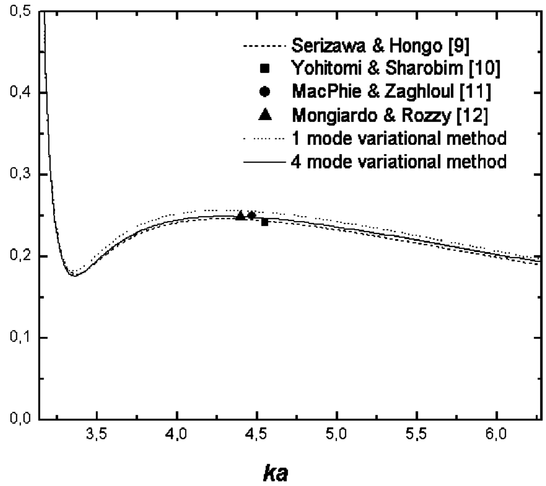

Рис. 2. Зависимость модуля коэффициента отражения от ka, при a/b = 2.25

На рисунке 2 представлены результаты расчета модуля коэффициента отражения с помощью вариационного метода в одномодовом и многомодовом приближении для соотношения сторон a/b = 2.25 в сравнении с теоретическими результатами, опубликованными в литературе [9–12]. Обнаруживается соответствие между численными результатами, полученными вариационным методом и методом моментов, а также расчетами вариационным методом у других авторов. Результаты вариационного метода лежат выше, чем результаты, полученные в работе [9] методом моментов. При увеличении числа мод, учтенных для расчета, улучшается сходимость результатов. Для расчета в одномодовом приближении не учитывается взаимодействие с другими модами,

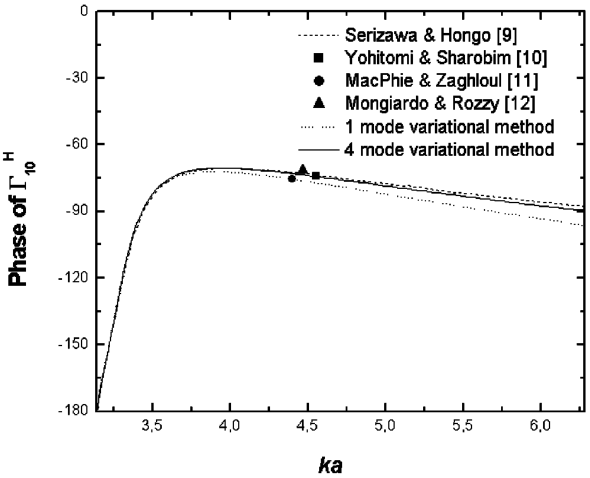

Рис. 3. Зависимость фазы коэффициента отражения от ka, при a/b = 2.25

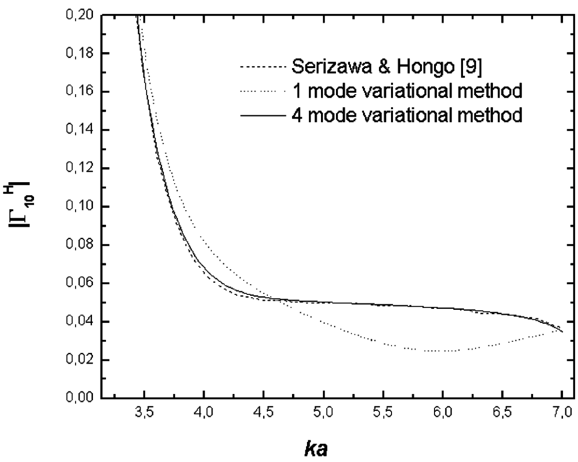

Рис. 4. Зависимость модуля коэффициента отражения от ka, при a/b = 1.0

а для расчета в 4-модовом приближении учитывалось взаимодействие с модами H_{30}, H_{12}, E_{12}.

На рисунке 3 изображены результаты расчета фазы коэффициента отражения с помощью вариационного метода в одномодовом и многомодовом приближении для соотношения сторон a/b = 2.25 в сравнении с теоретическими результатами, опубликованными в литературе [9–12]. Также увеличение числа мод, учтенных для расчетов, улучшает соответствие с расчетом методом моментов [9].

На рисунке 4 представлены результаты расчета модуля коэффициента отражения с помощью вариационного метода в одномодовом и многомодовом приближении для соотношения сторон a/b = 1.0, а также результаты, полученные методом моментов из работы [9]. Расчет в одномодовом приближении дает результаты, которые плохо согласуются с методом моментов, а увеличение числа используемых мод до четырех значительно улучшает соответствие.

Выводы. В результате выполненной работы задача излучения из прямоугольного волновода с импедансным фланцем решена с использованием вариационного принципа в многомодовом приближении. Получены расчетные формулы для характеристик согласования невыступающего волноводного излучателя с помощью вариационного принципа в многомодовом приближении. В предельном случае (импеданс равен нулю) они непрерывно сходятся к формулам для идеального проводящего фланца.

Составлена расчетная программа и получены численные результаты для характеристик согласования прямоугольного волновода при различных значениях частоты, импеданса фланца и размеров волновода.

Рассмотрено влияние высших мод на характеристики согласования волны основного типа в прямоугольном волноводе. Установлено, что моды Е-типа сильнее влияют на характеристики согласования волны основного типа в прямоугольном волноводе, чем моды Н-типа. Высшие моды влияют на характеристики согласования невыступающего излучателя даже при условии их отсутствия в возбуждающей волне. Моды образуют группы, не влияющие друг на друга. Для прямоугольного волновода это четыре группы с индексами $(2n,2m)$, $(2n,2m+1)$, $(2n+1,2m)$, $(2n+1,2m+1)$.

Библиографический список

1. Сазонов, Д.М. Антенны и устройства СВЧ : учебник для радиотехн. спец. вузов / Д.М. Сазонов. – М., 1988.

2. Антенны и устройства СВЧ. Проектирование фазированных антенных решеток : учеб. пособие для вузов / В.С. Филиппов, Л.И. Пономарев, А.Ю. Гринев и др.; Под ред. Д.И. Воскресенского. – 2-е изд., доп. и перераб. – М., 1994.

3. Комаров, С.А. Излучение из полубесконечного волновода с импедансным фланцем / С.А. Комаров // Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 1976. – Т. 19, №2.

4. Ваганов, Р.Б. Основы теории дифракции / Р.Б. Ваганов, Б.З. Канценленбаум. – М., 1982.

5. Комаров, С.А. Вариационный принцип в задачах излучения из полубесконечного волновода с импедансным фланцем / С.А. Комаров // Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 1985. – Т. 28, №3.

6. Комаров, С.А. Входной адмитанс волновода с импедансным фланцем при излучении в плоскослоистую среду / С.А. Комаров, В.В. Щербинин // Известия АлтГУ. – 1997. – №1.

7. Левин, Л. Современная теория волноводов / Л. Левин. – М., 1954.

8. Марков, Г.Т. Возбуждение электромагнитных волн / Г.Т. Марков, А.Ф. Чаплин. – М.; Л., 1967.

9. Serizawa, H. Radiation from a flanged rectangular waveguide / H. Serizawa, K. Hongo // IEEE Transaction on Antennas and Propagation. – 2005. – Vol. 53, №12.

10. Yoshitomi, K. Radiation from a rectangular waveguide with a lossy flange / K. Yoshitomi, H.R. Sharobim // IEEE Transaction on Antennas and Propagation. – 1994. – Vol. 42, №10.

11. MacPhie, R.H. Radiation from a rectangular waveguide with infinite flange: Exact solution by correlation matrix method / R.H. MacPhie, A.I. Zaghloul // IEEE Transaction on Antennas and Propagation. – 1980. – Vol. 28, №4.

12. Mongiardo, M. Singular integral equation analysis of flange-mounted rectangular waveguide radiators / M. Mongiardo, T. Rozzi // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 1993. – Vol. 41, №5.