УДК 519.862.8

А.В. Жариков

Равновесие Нэша в игре двух лиц для вариантов информированности игроков

Рассматривается оператор управления состояниями объектов, которые функционируют в динамической случайной среде. Управление проводится с использованием принципа осреднения входных переменных [1]. Предполагается, что управление выбирается из условий максимизации некоторого функционала и разной информированности субъектов [2–5].

Особенность постановки данной задачи позволяет свести ее к задаче теории игр. Причем количество игроков соответствует количеству управляемых объектов.

Пусть $S = \{1,2,\ldots,n\}$ – индексы всех компонент вектора x; S_i, $S_i \subseteq S$ – совокупность индексов, определяющих информационную структуру для i-ого игрока, имеющего стратегию $u_i = u_i(d_i),\ d_i = (x_j)_{j\in S_i}$; $i \in I = \{1,2\}$ – множество игроков.

Условие разной информированности игроков:

$$\frac{\partial u_i(d_i)}{\partial x_j} = 0, i\in I, j\notin S_i. \tag{1}$$

Соответственно, функция полезности i-го игрока запишется в виде *интегрального выигрыша*:

$$J_i = \int_a^b \ldots \int_a^b F_i(x,u)\Phi(x)dx, i\in I,$$

где $x \in X$ и имеет плотность распределения $\Phi(x)$.

Следовательно, игровая постановка задачи примет вид:

$$J_i(u) = \int_a^b \ldots \int_a^b F_i(x,u)\Phi(x)dx \to \max_{u_i\in U_i}, i\in I,$$

где $U_i = \left\{u_i : \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} = 0, (j\notin S_i), u_i \in C^2(X)\right\}$.

Рассмотрим случай квадратичной структуры $F_i(x,u), i\in I$, т.е. $F_i(x,u) = \left\langle A^i(u,x),(u,x)\right\rangle, i\in I$ – квадратичная форма с матрицей $A^i = \left(a^i_{ks}\right)_{(2+n)\times(2+n)}$. Таким образом, получаем следующую задачу

$$J_i(u) = \int_a^b \ldots \int_a^b \left\langle A^i(u,x),(u,x)\right\rangle \Phi(x)dx \to \max_{u_i}, i\in I, \tag{2}$$

при условии (1).

Согласно [2], равновесие по *Нэшу* в задаче (2) при условии (1) существует, если

$$a^i_{ii} < 0, \forall i. \tag{3}$$

Задача (2) при условии (1), по сути, является вариационной задачей, тогда соответствующие уравнения Эйлера запишутся в виде

$$\int_a^b \ldots \int_a^b \left(\sum_{j=1}^{2} a^i_{ij} u_j(d_j) + \sum_{j=3}^{2+n} a^i_{ij} x_{j-3+1}\right)\Phi(x)dp_i = 0, i\in I, \tag{4}$$

где $p_i = \{x_j\}_{j\notin S_i}, d_i = \{x_j\}_{j\in S_i}$. Таким образом, задача нахождения равновесия по *Нэшу* сводится к решению системы (4) при условии (3).

Далее, решение (4) будем искать для частных случаев информационной структуры игроков и характера входного случайного вектора x.

Множество индексов компонент вектора x $S = \{1,2\}$ и $d_1 = \{x_2\}$, $d_2 = \{x_1\}$.

Компоненты x_1, x_2 – независимые случайные величины с плотностью распределения $\Phi(x_1,x_2) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)$, тогда оптимальные управления отыскиваются в классе линейных функций $u_1^*(x_2) = Q_1x_2 + R_1$, $u_2^*(x_1) = Q_2x_1 + R_2$, при условии $\frac{a^1_{12}}{a^1_{11}}\cdot\frac{a^2_{12}}{a^2_{22}} \neq 1$. Выражения для соответствующих коэффициентов можно найти в [4].

Случайные величины x_1, x_2 имеют общую зависимость и функцию распределения $\Phi(x_1,x_2)$, тогда (4) можно свести к системе интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода

$$u(y) - \lambda\int_a^b K(x,y)u(x)dx = f(y), \tag{5}$$

где $\lambda = \frac{a^1_{12}}{a^1_{11}}\cdot\frac{a^2_{12}}{a^2_{22}}$, $K(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 0 & K_1(x_1,x_2) \\ K_2(x_1,x_2) & 0 \end{pmatrix}$,

$$K_1(x_1,x_2) = \frac{a^2_{22}\Phi(x_1,x_2)}{a^2_{21}\int_a^b \Phi(x_1,x_2)dx_1},\quad K_2(x_1,x_2) = \frac{a^1_{11}\Phi(x_1,x_2)}{a^1_{12}\int_a^b \Phi(x_1,x_2)dx_2},$$

$$f_1(x_2) = \frac{-a^1_{13}\int_a^b x_1\Phi(x_1,x_2)dx_1 - a^1_{14}x_2\int_a^b \Phi(x_1,x_2)dx_1}{a^1_{11}\int_a^b \Phi(x_1,x_2)dx_1},$$

$$f_2(x_1) = \frac{-a^2_{23}x_1\int_a^b \Phi(x_1,x_2)dx_2 - a^2_{24}\int_a^b x_2\Phi(x_1,x_2)dx_2}{a^2_{22}\int_a^b \Phi(x_1,x_2)dx_2}.$$

Как показано в [3], решение системы (5) может быть представлено в виде

$$u(x) = f(x) + \int_a^b R(x, y, \lambda) f(y) dy\,, \tag{6}$$

при условии

$$(b-a)\max_{x_1,x_2}\left(\left|\frac{a_{12}^1\Phi(x_1,x_2)}{a_{11}^1\int_a^b \Phi(x_1,x_2)dx_1}\right|,\left|\frac{a_{12}^2\Phi(x_1,x_2)}{a_{22}^2\int_a^b \Phi(x_1,x_2)dx_2}\right|\right)<1\,, \tag{7}$$

где $R(x,y,\lambda) = K_1(x,y) + \lambda K_2(x,y) + \ldots + \lambda^{n-1} K_n(x,y) + \ldots$ (резольвента ядра $K(x_1,x_2)$).

Множество индексов компонент вектора x $S = \{1,\ldots,n\}$ и $d_1 = \{x_{k+1},\ldots,x_{2k},\ldots,x_n\}$, $d_2 = \{x_1,\ldots,x_k,x_{2k+1},\ldots,x_n\}$, $k \in \{1,2,\ldots,n/2\}$.

Пусть функция распределения входного вектора x имеет вид

$\Phi(x_1,\ldots,x_n) = \varphi_1(x_{k+1},\ldots,x_{2k})\varphi_2(x_1,\ldots,x_k)\varphi(x_{2k+1},\ldots,x_n)$, тогда, аналогично пункту 1.1, оптимальные управления отыскиваются в классе линейных функций $u_i^*(d_i) = \sum_{j\in S_i} Q_j^i x_j + R_i, i = 1,2$, при условии $\frac{a_{12}^1}{a_{11}^1}\cdot\frac{a_{12}^2}{a_{22}^2} \neq 1$.

Коэффициенты Q_j^i находятся из (4).

Компоненты случайного вектора x имеют общую зависимость и функцию распределения $\Phi(x_1,\ldots,x_n)$. Уравнения Эйлера (4) примут вид

$$\begin{cases} u_1(d_1) + \int_a^b \ldots \int_a^b \frac{a_{12}^1}{a_{11}^1} u_2(d_2) \frac{\Phi(x)}{\int_a^b \ldots \int_a^b \Phi(x)dp_1} dp_1 = \frac{-\int_a^b \ldots \int_a^b \sum_{j=3}^{2+n} a_{1j}^1 x_{j-3+1}\Phi(x)dp_1}{\int_a^b \ldots \int_a^b \Phi(x)dp_1}, \\ u_2(d_2) + \int_a^b \ldots \int_a^b \frac{a_{21}^2}{a_{22}^2} u_1(d_1) \frac{\Phi(x)}{\int_a^b \ldots \int_a^b \Phi(x)dp_2} dp_2 = \frac{-\int_a^b \ldots \int_a^b \sum_{j=3}^{2+n} a_{2j}^2 x_{j-3+1}\Phi(x)dp_2}{\int_a^b \ldots \int_a^b \Phi(x)dp_2}, \end{cases} \tag{8}$$

Систему (8) можно свести к системе, аналогичной системе (5)

$$u(y,z) - \lambda \int_a^b K(x,y,z) u(x,z) dx = f(y,z)\,, \tag{9}$$

где $z = (x_{2k+1},\ldots,x_n)$, $(x_{k+1},\ldots,x_{2k}) \to (y_1,\ldots,y_k)$, $x = (x_1,\ldots,x_k)$,

$$\lambda = \frac{a_{12}^1}{a_{11}^1}\cdot\frac{a_{12}^2}{a_{22}^2}\,, \quad K(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & K_1(x,y,z) \\ K_2(x,y,z) & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_1(x,y,z) = \frac{a_{22}^2\Phi(x,y,z)}{a_{21}^2\int_a^b \Phi(x,y,z)dx},\quad K_2(x,y,z) = \frac{a_{11}^1\Phi(x,y,z)}{a_{12}^1\int_a^b \Phi(x,y,z)dy},$$

$$f_1(y,z) = \frac{-\int_a^b \ldots \int_a^b \sum_{j=3}^{2+n} a_{1j}^1 x_{j-3+1}\Phi(x,y,z)dx}{a_{11}^1\int_a^b \Phi(x,y,z)dx},$$

$$f_2(x,z) = \frac{-\int_a^b \ldots \int_a^b \sum_{j=3}^{2+n} a_{2j}^2 x_{j-3+1}\Phi(x,y,z)dy}{a_{22}^2\int_a^b \Phi(x,y,z)dy}.$$

Аналогично случаю 1.2, решение системы (9) представимо в виде

$$u(x,z) = f(x,z) + \int_a^b \ldots \int_a^b R(x,y,z,\lambda) f(y,z) dy\,, \tag{10}$$

при условии

$$(b-a)^k \max_{x,y,z}\left(\left|\frac{a_{12}^1\Phi(x,y,z)}{a_{11}^1\int_a^b \Phi(x,y,z)dx}\right|,\left|\frac{a_{12}^2\Phi(x,y,z)}{a_{22}^2\int_a^b \Phi(x_1,y,z)dy}\right|\right)<1,$$

где $R(x,y,z,\lambda) = K_1(x,y,z) + \lambda K_2(x,y,z) + \ldots + \lambda^{n-1} K_n(x,y,z) + \ldots$

Остальные случаи являются следствиями рассмотренных выше. Следует отметить, что система (4) не всегда может быть сведена к системе интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода. Данное преобразование возможно при определенном виде информационной структуры игроков, а именно

$$d_1 = \{x_{k+1},\ldots,x_{2k},\ldots,x_n\},\ d_2 = \{x_1,\ldots,x_k, x_{2k+1},\ldots,x_n\}$$
$$k \in \{1,2,\ldots,n/2\}.$$

Таким образом, при остальных видах информационной структуры, уравнения (4) не могут быть сведены к системе интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода.

Библиографический список

1. Гермейер, Ю.Б. Введение в теорию исследования операций / Ю.Б. Гермейер. – М., 1973.

2. Жариков, А.В. О существовании равновесия по Нэшу в игровой постановке задачи управления при разной информированности субъектов / А.В. Жариков // Материалы десятой региональной конференции по математике. – Барнаул, 2007.

3. Жариков, А.В. Применение принципа сжатых отображений в задаче управления игры двух лиц при разной информированности игроков / А.В. Жариков // Известия АлтГУ. – 2007. – №1.

4. Жариков, А.В. О решении частной задачи управления в случае разной информированности субъектов / А.В. Жариков, А.В. Максимов // Известия АлтГУ. – 2006. – №1.

5. Максимов, А.В. Многопользовательские информационные системы: основы теории и методы исследования / А.В. Максимов, Н.М. Оскорбин. – Барнаул, 2005.