А.А. Байкин, О.В. Исаева

Сравнительный анализ теоретико-игровых принципов распределения дохода интегрированной системы

Одним из важных аспектов решения социально-экономических задач становится проблема оптимального распределения общих доходов между участниками какого-либо процесса, а также проблема согласования критериев, по которым производится оценка конечных результатов. Проведенный анализ основных теоретических положений и периодической литературы позволяет утверждать, что математически обе эти проблемы могут быть описаны и исследованы в рамках теории игр.

Применение теоретико-игрового подхода для решения задач распределения ресурсов позволяет использовать принцип оптимальности как для экономической системы в целом, так и для отдельных ее подсистем, учитывая интересы субъектов системы в явном виде.

Теоретико-игровой подход выявляет основные концептуальные трудности, возникающие при решении задач распределения (в частности, априори совершенно не ясно, как понимать термин «оптимальность» в задачах распределения), и наметить пути преодоления эти трудностей. Однако в целом проблема распределения является столь сложной, что исследовать ее во всех аспектах не представляется возможным. Авторы публикации исследуют те трудности проблемы распределения, которые являются следствием возможности участников объединиться в различные союзы (коалиции). Для этих целей удобно задачи распределения формализовать в виде различных кооперативных игр, так как такая модель, как кооперативная игра, учитывает кооперативный аспект исходной проблемы, абстрагируясь от всех остальных ее аспектов. При этом проблема распределения сводится к проблеме определения решения таких игр.

Понятие оптимального решения, применительно к играм вообще и к кооперативным играм в частности, не может определяться однозначно. Оно зависит от тех априорных свойств, которые мы хотим получить от решения игры. Эти свойства, вводимые в качестве аксиом, формализуют те интуитивные представления об оптимальном или справедливом распределении, которые требуются от решения кооперативной игры. Некоторая совокупность таких свойств называется *принципом оптимальности*.

Заметим, что понятие принципа оптимальности связано с проблемами непустоты и существования ядра, которые достаточно исследованы. По другим принципам оптимальности отметим работы Р. Аумана, О.Н. Бондаревой, Д. Джиллиса, В. Лукаса, М. Машлера, Н.И. Наумовой, Г. Оуэна, Б. Пелега, А.И. Соболева, Н.А. Соколиной, Л. Шепли.

Было бы идеальным найти такое распределение выигрышей между игроками, которое доминировало бы все остальные дележи. Однако это возможно только для несущественных игр, в которых множество дележей состоит только из одного элемента. Первый подход, основанный на способе сравнения дележей, описали Дж. Нейман и О. Моргенштерн. Они предложили искать решения в виде подмножеств множества всех дележей U, которые в некотором смысле выполняют роль этого идеального дележа, т.е. элементы искомого подмножества R должны доминировать любые дележи, лежащие вне его (*внешняя устойчивость*), и не доминировать друг друга (*внутренняя устойчивость*). Формально это условие можно выразить следующим образом [1, с. 283]:

1) из $\alpha \succ \beta$ следует, что либо $\alpha \notin R$, либо $\beta \notin R$;

2) для любого $\alpha \notin R$ существует такой $\beta \in R$, что $\beta \succ \alpha$.

Отметим, что к прямым возможностям применения понятия *Н–М-решения* на практике многие исследователи относятся скептически. Например, Н.Н. Воробьев интерпретирует понятие Н–М-решения как «представление о такой системе норм поведения, что последствия двух допустимых этими нормами поведений не могут быть противопоставлены какой-либо общественной силой (коалицией)» друг другу, а каково бы ни было отклонение от допустимых поведений в обществе (т.е. в множестве всех игроков I) найдутся такие силы (т.е. некоторая коалиция), которые будут стремиться к восстановлению нормы [2].

Очевидно, что если в некоторой кооперативной игре $\langle I, v \rangle$ игроки придут к соглашению о распределении выигрыша всей коалиции (дележа $\alpha^* = v(S) = \sum_{i \in S} \alpha_i^*$), при котором ни один из других дележей не доминирует дележ α^*, то такое распределение будет *устойчивым*, а все множество C недоминируемых дележей этой кооперативной игры определяет ее C-ядро.

Необходимое и достаточное условие непустоты C-ядра было получено Л. Шепли. Например, для симметричных кооперативных игр, в которых характеристическая функция зависит лишь от числа игроков, данное условие определяется системой неравенств [3, с. 29]

$$v(S) \le \frac{k}{n} v(I),\ k = |S| = \overline{1, n},$$

а для игр, заданных характеристической функцией в (0–1)-редуцированной форме, принимает вид [4, с. 280]

$$v(S) \le \frac{1}{n - |S| + 1}. \quad (1)$$

При построении *C*-ядра с помощью решения двойственных задач линейного программирования было впервые определено понятие *сбалансированного покрытия* множества *I*, что положило начало новому направлению исследования. В.Г. Кармановым были получены необходимые и достаточные условия *приведенности* (минимальности) сбалансированного покрытия, а Б. Пелегом предложен алгоритм нахождения всех сбалансированных покрытий по известным приведенным сбалансированным покрытиям. О.Р. Меньшикова дополнила описание приведенных сбалансированных покрытий для случая с шестью (пятью) игроками (решения в общем случае пока не получено).

Непосредственно из определения Н–М-решения можно получить его основные свойства. Оно является замкнутым множеством в множестве $R^{|I|}$ и не может быть собственным подмножеством другого Н–М-решения. Заметим при этом, что между *C*-ядром кооперативной игры и ее Н–М-решением имеется определенная связь. Если Н–М-решение существует, а *C*-ядро непусто, то оно содержится в Н–М-решении [4]. В парной игре Н–М-решение совпадает с *C*-ядром, поскольку доминирование по одноэлементным коалициям и по коалиции, состоящей из всех участников игры, невозможно.

В работе [5] рассмотрен случай игры четырех участников, однако общий метод для построения Н–М-решения и проверки его существования неизвестен. Более того, в статье [6] рассмотрен случай игры десяти лиц, имеющей непустое *C*-ядро и не имеющей Н–М-решения. В связи с этим представляют определенный интерес некоторые модификации Н–М-решения.

Основным недостатком решений является неединственность образующих их дележей, поэтому бельгийский математик Д. Шмайдлер предложил понятие *N*-ядра, которое *всегда существует* и состоит из *единственного* дележа.

Для характеристики степени неудовлетворенности игроков, входящих в некоторую коалицию *S*, возможным дележом α вводится величина

$$e(\alpha; S) = v(S) - \alpha(S), \quad (2)$$

которая называется *эксцессом*.

По мнению Д. Шмайдлера, распределение выигрыша между игроками следует считать справедливым, если эксцесс «мало» отличается от нуля для любой коалиции. Рассматривая задачу векторной оптимизации, в работе [7] была предложена специальная лексикографическая свертка векторного критерия этой задачи и указан способ построения дележа, получившего название «nucleolus». Как отмечает Э. Мулен, «*N*-ядро получается при применении принципа эгалитаризма, когда считаем не доходы отдельных участников, а прибыль от кооперации всех коалиций».

Из определения *N*-ядра следует, что его можно найти, последовательно решая задачи линейного программирования. Доказано, что за конечное число шагов получается задача, имеющая единственное решение, равное *N*-ядру [4, с. 288].

Рассмотрим введенное М. Машлером и Б. Пелегом понятие *K*-ядра. Определим для каждой пары игроков и некоторого дележа возражение первого игрока второму по дележу [3], т.е. $s_{ij} = \max\limits_{\Im_{ij}} e(\alpha; S)$, где $i, j \in I, (i \ne j)$; $\Im_{ij} = \{S \,|\, |S| \ge 2, i \in S, j \notin S\}$. Если $s_{ij} > s_{ji}$, то игрок *i* принадлежит более «неудовлетворенной» коалиции, чем игрок *j*, и если $\alpha_j > 0$, то может потребовать у игрока *j* часть его доли.

Множество дележей $K = \{\beta \in U \,|\, (s_{ij}(\beta) - s_{ji}(\beta)),\ \beta_j \le 0, \forall i, j \in I, i \ne j\}$ образует *K*-ядро, и если некоторый дележ ему принадлежит, то ни один из игроков не имеет оснований (в смысле удовлетворенности) потребовать у другого игрока часть его доли в дележе.

Отметим, что *N*-ядро всегда непусто и всегда содержится в *K*-ядре. Кроме того, если *C*-ядро непусто, то и его пересечение с *K*-ядром так же непусто. Однако из этого не следует, что *K*-ядро содержится в *C*-ядре [3].

Рассмотренные выше решения (принципы оптимальности) были связаны с устойчивостью поведения самих игроков. Однако в кооперативной теории существуют такие решения, которые, вообще говоря, определяются некоторым третьим лицом – арбитром – согласно определенным понятиям «*разумности*» или «*справедливости*».

Заметим, что распределение выигрышей игроков согласно арбитражной схеме Нэша имеет ряд существенных недостатков, среди которых выделим следующий. Условия конфликтной ситуации могут сложиться таким образом, что для некоторой коалиции (состоящей не из всех участников игры) размеры выигрышей по арбитражной схеме $\bar{u}$ будут меньше выигрышей, которые можно получить, предварительно вступив в соглашение друг с другом. Тогда игроки этой коалиции не будут согласны с предлагаемым распределением, поэтому решение задачи торга может быть принято только некоторой третьей стороной – арбитром, что носит обязательный характер для участников игры.

Проанализируем аксиомы арбитражных схем, которым должно удовлетворять правило, сопоставляющее каждому подмножеству всевозможных векторов интеграционных выигрышей участников конфликта U и точке u^* (*status qwo*) некоторый вектор – решение торга $\bar{u}$. Определим $u^* = \left(u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*\right) \in R^n$, где u_i^* – значение антагонистической интеграционной игры, в которой все участники конфликта интеграции играют против (стараются минимизировать выигрыш) одного из участников (именно i-игрока), возможно, не обращая внимания на свои интересы (величины интеграционных выигрышей), а n – количество участников интеграционной игры.

1. Реализуемость интеграции: $\bar{u} \in U$.

2. Индивидуальная рациональность участников процесса интеграции: $\bar{u} \geq u^*$.

3. Независимость решения торга от посторонних альтернатив:

$$5A;8 \quad \bar{u} \in D \subset U, \, 0\, \bar{u} = \varphi\left(U, u^*\right),$$

$$,B> \quad \bar{u} = \varphi \,|. \tag{3}$$

4. Линейность решения торга:

$$5A;8 \quad U' = aU + b, \; \bar{u} = \varphi\left(U, u^*\right),$$

$$B> \varphi\left(U', au^* + b\right) = a\bar{u} + b.$$

5. Равноправие участников процесса интеграции: если π – некоторая перестановка игроков, то $\pi\,\bar{u} = \bar{u}$.

Первая аксиома означает, что в случае совместных действий предметом торга участников интеграционного процесса может быть только результат, который реально достижим. Вторая аксиома утверждает, что этот результат должен быть не хуже, чем гарантированный результат для каждого участника интеграционного процесса в случае его неучастия в коалиции. Аксиома (3) означает, что стороны интеграции согласятся на то же самое арбитражное решение, имея больше возможностей для его выбора, и при меньших возможностях, если это решение торга допустимо. Согласно аксиоме линейности, выбор участников конфликта принципа оптимальности не зависит от шкалы измерения полезности. Пятая аксиома постулирует равноправие игроков, и поэтому иногда ее называют *аксиомой анонимности*.

Проанализируем подход о справедливом дележе, воплощенный в следующих аксиомах, сформулированных Л. Шепли в работе [9].

1. Симметрия: пусть π – произвольная перестановка игроков, причем $v(S) = v(\pi(S))$. Тогда $\Phi_i(v) = \Phi_{\pi(i)}(v)$, где $\pi(i)$ – образ игрока i при перестановке π.

2. Эффективность: если коалиция T является носителем игры, т.е. $v(S) = v(S \cap T)$, то для любой коалиции $S \subset I$ выполнено $\sum_{i \in I} \Phi_i(v) = v(I)$.

3. Линейность: если характеристическая функция игры $\langle I, w \rangle$ равна сумме характеристических функций соответственно игр $\langle I, u \rangle$ и $\langle I, v \rangle$, т.е. для любой коалиции выполняется равенство $w(S) = v(S) + u(S)$, то для любого игрока справедливо $\Phi_i(w) = \Phi_i(u + v) = \Phi_i(u) + \Phi_i(v)$.

Смысл первой аксиомы заключается в том, что оценка игроком игры не должна зависеть от того, каким индексом его обозначили. Вторую аксиому иногда формулируют в виде двух утверждений [4]. Одно из них касается «болвана», т.е. такого игрока, который сам ничего не получает и никак не влияет на выигрыш коалиции, к которой он присоединяется. В этом случае его доля в общем распределении равна нулю. Второе утверждение просто означает, что игроки делят между собой весь доход $v(I)$.

Третья аксиома определяет, что при участии игрока в двух играх (сложение характеристических функций можно понимать как участие игроков в двух играх) их выигрыши в отдельных играх должны складываться. В результате вектор $\Phi(v)$ для некоторых игр приобретает ряд нежелательных свойств. Например, он не всегда содержится в C-ядре, даже когда оно непусто. Однако довольно часто дележ согласно вектору $\Phi(v)$ вполне удовлетворителен. Дележ по вектору $\Phi(v)$, являясь исторически первым, и до сих пор остается наиболее важным понятием решения. Для каждой характеристической функции v вектор $\Phi(v)$ является дележом и называется *вектором Шепли*.

Л. Шепли показал, что функция, для которой выполняются указанные аксиомы, существует и единственна. Компоненты вектора Шепли определяются следующими равенствами [10, с. 168]:

$$\Phi_i(v) = \sum_{\substack{S \in I, \\ i \in S}} \frac{\left(|S| - 1\right)!\left(n - |S|\right)!}{n!} \left[v(S) - v\left(S \setminus \{i\}\right)\right],$$

$$i \in I,$$

где $|S|$ – число игроков в коалиции S.

Как отмечает Э. Мулен, «вектор Шепли основан на последовательном учете дополнительных доходов от присоединения фиксированного участника к каждой коалиции» [8].

Для сравнительного анализа принципов оптимальности рассмотрим два примера. В первом случае модифицируем задачу, известную в теории кооперативных игр как «игру с главным игроком» [2].

Предположим, что некоторая интегрированная система, состоящая из n подразделений, совместно выполнила некоторый объем работ. Этот же объем могли бы выполнить либо одно «главное» (особенное) и любое (одно или несколько) из остальных подразделений, либо все остальные вместе без «главного». Требуется определить «справедливую» долю каждого из подразделений.

Построим формальную модель. Присвоим каждому подразделению интегрированной системы порядковый номер, обозначив «главное» номером «1». Если обозначить S – коалиция (группа) подразделений, а I – множество различных коалиций, то характеристическая функция данной игры примет следующий вид (1 – работа выполнена, 0 – нет):

$$v(S)=\begin{cases}1, & S=\{2,3,\ldots,n\};\\ 1, & \{1\}\cap S\neq\varnothing,\ S\neq\{1\},\ S\subset I;\\ 0, & \text{в других случаях.}\end{cases}$$

Поскольку C-ядро рассмотренной выше игры является пустым множеством, поэтому представляют интерес другие принципы оптимальности. По приведенным алгоритмам были составлены программы и для различного количества участников данной игры проведены расчеты. Полученные дележи представлены в таблице 1.

Поскольку априори все «неглавные» участники равноправны, можно ожидать равенства их выигрышей для любого принципа оптимальности, что подтверждается полученными результатами. Выигрыш «главного» игрока всегда больше выигрыша других игроков ($n > 3$), но его относительная величина увеличивается с ростом количества участников. Например, вектор Шепли оценивает «монополию» «главного» игрока по «закону» $\Phi(1)=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}\Phi(k),\quad k=\overline{2,n}$.

Вместе с тем качественное свойство, определяющее «главного» игрока, нуждается в уточнении. Если это свойство, например, отражает более высокую производительность, то согласно вектору Шепли «главный» игрок эквивалентен сразу трем игрокам. Его выигрыш должен составлять ровно половину от всего дохода, хотя остальные подразделения (без «главного») так же могли бы справиться с данной работой и получить больший выигрыш (каждому по $\dfrac{1}{3}$ вместо $\dfrac{1}{6}$). Поэтому дележ согласно N-ядру представляется более «справедливым», чем по вектору Шепли.

Проанализируем свойства распределений, получаемых в кооперативной игре трех лиц с характеристической функцией, представленной в таблице 2. Рассмотрим несколько случаев: A – один «лидер», остальные участники равны между собой; B – один «аутсайдер», остальные участники равны между собой; C – все участники «дифференцированы»; D – все участники игры «равны» между собой.

Так как в каждом из разбираемых случаев C-ядро непусто (вид этого множества, получаемый для каждого варианта, представлен соответственно на рисунках 1–4 заштрихованной областью), условия варианта D позволяют определить C-ядро. Однако дележ, принадлежащий этому множеству, в данном случае один и на рисунке 3 он обозначен точкой C.

Дележи, представленные в таблице 3, получены для вектора Шепли и N-ядра по тем же алгоритмам и обозначены на рисунках 1–4 соответственно точками S и N.

Таблица 1

Сравнительный анализ решений «игры с главным игроком»

Принцип оптимальности	Кол-во подразделений											
	$n = 3$			$n = 4$				$n = 5$				
	1	2	3	1	2	3	4	1	2	3	4	5
Вектор Шепли	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
N-ядро	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{19}$	$\frac{2}{19}$	$\frac{2}{19}$	$\frac{2}{19}$	$\frac{2}{19}$

Таблица 2

Характеристическая функция кооперативной игры $v(S)$

Коалиция, S	$\{\varnothing\}$	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
$v(S)$, вариант A	0	0	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$v(S)$, вариант B	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1
$v(S)$, вариант C	0	0	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1
$v(S)$, вариант D	0	0	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

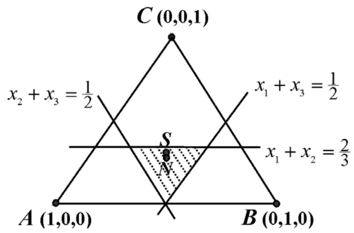

Рис. 1. Множество недоминируемых дележей для варианта A

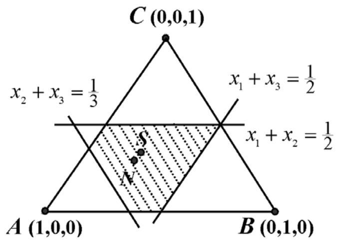

Рис. 2. Множество недоминируемых дележей для варианта B

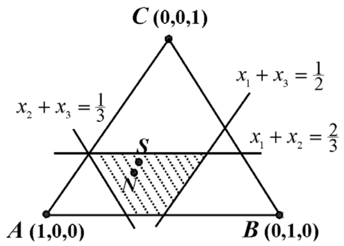

Рис. 3. Множество недоминируемых дележей для варианта C

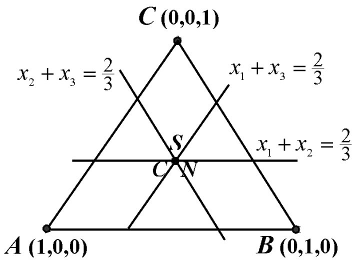

Рис. 4. Множество недоминируемых дележей для варианта D

Во всех представленных случаях вектор Шепли и N-ядро (определяющие дележ однозначно) дают удовлетворительное решение, так как предлагаемые дележи принадлежат C-ядру. «Равные» игроки получают одинаковый выигрыш, более «сильные» – большую величину выигрыша (долю). Поскольку для условий варианта B неравенства (1) выполняются, то дележи C-ядра являются и Н–М-решениями, т.е. поведение участников игры и внешне, и внутренне стабильно.

Учитывая, что игра в (0–1)-редуцированной форме является некоторой нормализацией кооперативной игры с произвольными значениями характеристической функции, то можно заметить следующее. Если считать значение характеристической функции относительной мерой стремления игроков к кооперации, то чем меньше соответствующее значение характеристической функции (большая заинтересованность в интеграции), тем больше возможностей для ее реализации (площадь заштрихованной области). И, наоборот, для интеграции «сильных» («капризных») игроков требуется точный поиск компромиссно-

Таблица 3

Варианты решения кооперативной игры трех лиц

Вариант	Принцип оптимальности					
	Вектор Шепли			N-ядро		
	1	2	3	1	2	3
A	$\frac{13}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{4}{18}$
B	$\frac{14}{36}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{8}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{18}$
C	$\frac{15}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$
D	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

го решения. При этом решение может существовать (единственное как в варианте D) и найдено, а может не существовать (пустое C-ядро).

Таким образом, анализ принципов оптимальности кооперативной теории игр, используемой для моделирования процесса согласования целей участников интегрированной системы, позволяет сделать следующие выводы.

Если процесс интеграции моделируется кооперативной игрой, то объективно лучших результатов добьются игроки, действия которых будут определять дележи, принадлежащие C-ядру.

Отсутствие простых алгоритмов проверки существования C-ядра и множественность его дележей затрудняют практическое использование данного принципа оптимальности. В некоторых случаях можно использовать дополнительные признаки. В частности, если характеристическая функция кооперативной интеграционной игры обладает свойством выпуклости, то в данной игре C-ядро существует [4, с. 280].

Достаточно похожие распределения получаются при использовании вектора Шепли и N-ядра. При этом последний принцип оптимальности дает более «справедливую» оценку вклада игроков.

Отсутствие C-ядра в кооперативной игре, моделирующей процесс интеграции экономических субъектов, означает, что некоторые из участников этого процесса могут образовать «сильную» коалицию. В этом случае, если посредством кооперативной теории оценивалась целесообразность участия в кооперации отдельных субъектов, то выбор принципа оптимальности существенным образом зависит от характера взаимодействия между сторонами. С помощью переговоров, взаимных уступок и угроз отдельные игроки (или в коалиции, причем как «сильной», так и «слабой») принимают решение об участии или неучастии в проекте. Если задача состоит в определении принципа распределения совокупного дохода, то поведение любого из участников интеграционного процесса в будущем (сохранение членства в союзе, разрыв отношений, образование меньшей или большей коалиции и т.д.) зависит от адекватного моделирования самого переговорного процесса, что в общем случае является трудно формализуемым и зависит во многом от конкретной ситуации.

Библиографический список

1. Нейман, Дж. Теория игр и экономическое поведение / Дж. Нейман, О. Моргенштерн. М., 1970.

2. Воробьев, Н.Н. Математическая теория игр / Н.Н. Воробьев. Л., 1963.

3. Кукушкин, Н.Н. Теория неантагонистических игр / Н.Н. Кукушкин, В.В. Морозов. М., 1984.

4. Дюбин, Г.Н. Введение в прикладную теорию игр / Г.Н. Дюбин, В.Г. Суздаль. М., 1981.

5. Бондарева, О.Н. Решение и ядро ациклического отношения на компакте / О.Н. Бондарева // Успехи теории игр : тр. II Всес. конф. по теории игр. Вильнюс, 1973.

6. Lucas, W.F. Some Recent Developments in N-person Game Theory. SIAM Review, 1971. Vol. 13, №4.

7. Schmeidler, D. The Nucleolus of Characteristic Function

Game. SIAM J. Appl. Math., 1969. Vol. 17, №6.
8. Мулен, Э. Теория игр с примерами из математической экономики / Э. Мулен. М., 1985.
9. Shapley, L.S. A Solution Containing an Arbitrary Close Component. Annals of Math. Stud., 1959. №40.
10. Петросян, Л.А. Кооперативные дифференциальные игры и их приложения / Л.А. Петросян, Н.Н. Данилов. Томск, 1985.