УДК 621.371

П.М. Зацепин, А.Ю. Рыкшин, Д.П. Зацепин, П.В. Малинин

Вейвлет-метод в задаче излучения импульсного нитевидного источника в свободном пространстве

Введение. Проблема излучения и рассеяния электромагнитных волн, создаваемых импульсными источниками, изучается достаточно давно. Большинство исследований связано с изучением излучения и рассеяния монохроматических плоских волн либо с задачами излучения волн монохроматическими локализованными источниками [1–3]. В настоящее время, в связи с появившейся возможностью генерации коротких импульсов длительностью порядка нано- и пикосекунд, являются актуальными исследования, связанные с изучением распространения и рассеяния полей импульсных источников. В данной работе рассмотрено решение задачи излучения электромагнитного импульса нитевидным источником, расположенным в свободном пространстве с использованием техники вейвлет-преобразования.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу об излучении электромагнитных волн импульсным нитевидным источником. Геометрия задачи изображена на рисунке 1.

Первичное поле создается сторонним источником в виде бесконечной вдоль оси y нити магнитного или электрического тока с координатами x_0, z_0, расположенным в свободном пространстве с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_0\varepsilon$; ε_0, μ_0 диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума. Задача является двухмерной, и $\dfrac{\partial}{\partial y}=0$.

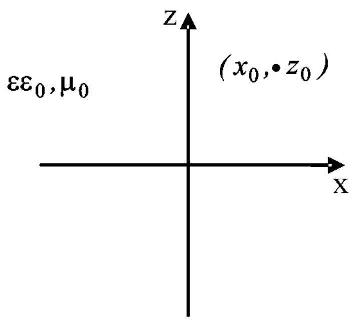

Рис. 1. Геометрия задачи

Поле излучения источника. Уравнения Максвелла имеют следующий вид:

$$rot\,\vec{H}=\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\vec{j}^{\,e}$$
$$rot\,\vec{E}=-\mu_0\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}-\vec{j}^{\,m} \tag{1}$$

Ввиду приведенной геометрии поля и источники не зависят от y, т.е. $\dfrac{\partial}{\partial y}=0$ и $\vec{j}^{\,e,m}=j^{e,m}(r,\varphi,t)\cdot\vec{e}_y$. Исходя из приведенных условий, уравнения Максвелла могут быть записаны в следующем виде:

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial H_y}{\partial\varphi}=\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial E_r}{\partial t};$$
$$\frac{\partial H_y}{\partial r}=\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial E_\varphi}{\partial t}; \tag{2}$$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rH_\varphi\right)=\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial E_y}{\partial t}+j_y^e$$

для вертикальной поляризации;

$$\frac{1}{r}\frac{\partial E_y}{\partial\varphi}=\mu_0\mu\frac{\partial H_r}{\partial t};$$
$$\frac{\partial E_y}{\partial r}=-\mu_0\mu\frac{\partial H_\varphi}{\partial t}; \tag{3}$$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rE_\varphi\right)=-\mu_0\mu\frac{\partial H_y}{\partial t}-j_y^m$$

для горизонтальной поляризации.

Рассмотрим решение для вертикальной поляризации падающего поля (H_y,E_r,E_φ). Волновое уравнение в цилиндрических координатах (r,φ,y) можно записать в следующем виде:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 H_y}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H_y}{\partial r}\right)-$$
$$-\mu_0\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}=\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial j_y^{(m)}}{\partial t}, \tag{4}$$

где $j_y^{(m)}=I_0^{(m)}(t)\dfrac{1}{r}\delta(r-r_0)\delta(\varphi-\varphi_0)$.

Из решения уравнения (4) может быть найдено выражение для неизвестной напряженности магнитного поля $H_y(r,\varphi,t)$. Радиальная и угловая компоненты определяются из уравнений Максвелла (2).

Для удобства поиска решения поместим источник излучения в начало координат. Ввиду угловой симметрии $\frac{\partial}{\partial\varphi}=0$. Волновое уравнение (4) в этом случае будет иметь вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H_y}{\partial r}\right)-\mu_0\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial^2 H_y}{\partial^2 t}=\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial j^m}{\partial t}. \tag{5}$$

Для решения полученного уравнения введем вейвлет-преобразование по времени для напряженности магнитного поля, которое может быть записано как

$$H_y(\vec{r},t)=\frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}W(r,a,b)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\frac{dadb}{a^2}=$$
$$=\frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}h(r)w(a,b)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\frac{dadb}{a^2}. \tag{6}$$

Подставим полученное выражение (6) в уравнение (5) и поменяем порядок дифференцирования и интегрирования:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}h(r)w(a,b)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\frac{dadb}{a^2}\right)-$$
$$-\mu_0\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}h(r)w(a,b)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\frac{dadb}{a^2}\right)=\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial j_y^m}{\partial t},$$

в результате получим

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial h(r)}{\partial r}\right)\frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}w(a,b)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\frac{dadb}{a^2}-$$
$$-\mu_0\varepsilon_0\varepsilon h(r)\frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}w(a,b)\frac{\partial^2\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)}{\partial t^2}\frac{dadb}{a^2}=\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial j_y^m}{\partial t}. \tag{7}$$

Умножим правую и левую части полученного уравнения (7) на $\frac{1}{\sqrt{a'}}\psi^*\left(\frac{t-b'}{a'}\right)$ и проинтегрируем по dt. После смены порядка интегрирования и некоторых очевидных преобразований получим

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial h(r)}{\partial r}\right)\frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}w(a,b)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a'}a^2}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\psi^*\left(\frac{t-b'}{a'}\right)dtdadb-$$
$$-\mu_0\varepsilon_0\varepsilon h(r)\frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}w(a,b)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a'}a^2}\frac{\partial^2\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)}{\partial t^2}\psi^*\left(\frac{t-b'}{a'}\right)dtdadb=$$
$$=\varepsilon_0\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a'}}\frac{\partial j_y^m}{\partial t}\psi^*\left(\frac{t-b'}{a'}\right)dt;$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial h(r)}{\partial r}\right)w(a',b')+\mu_0\varepsilon_0\varepsilon h(r)w(a',b')=$$
$$=\varepsilon_0\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a'}}\frac{\partial j_y^m}{\partial t}\psi^*\left(\frac{t-b'}{a'}\right)dt. \tag{8}$$

Меняя штрихи на масштабных и временных координатах и используя обозначение $W_h(r,a,b)=$ $=h(r)w(a,b)$, получим

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial W_h(r,a,b)}{\partial r}\right)+\mu_0\varepsilon_0\varepsilon W_h(r,a,b)=$$
$$=\varepsilon_0\varepsilon I(r,a,b). \tag{9}$$

Если правая часть уравнения (9) равна 0, то полученное уравнение является уравнением Бесселя и его решением может быть функция Ханкеля первого или второго рода. Следовательно, решение уравнения (9) будем искать в следующем виде:

$$W_h(r,a,b)=C(a,b)H_0^{1,2}(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon}\,r).$$

Подставляя решение в исходное уравнение и интегрируя все члены его левой части по малому объему $dV=rdrd\varphi$ и учитывая, что асимптотика функции Ханкеля $H_0^{(1)}(z)\approx\frac{ri}{\pi}\ln z$ при $|z|<<1$, получим $C(a,b)=\frac{i\varepsilon_0\varepsilon}{4}I(r,a,b)$. Тогда решение уравнения (9) выглядит следующим образом:

$$W_{hy}(r,a,b)=\frac{i\varepsilon_0\varepsilon}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a}}H_0^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon}\,r)\frac{\partial j_y^m}{\partial t'}\psi^*\left(\frac{t'-b}{a}\right)dt'. \tag{10}$$

С учетом формул (6) и (10) решение уравнения (4) примет следующий вид:

$$H_y(\vec{r},t)=\frac{i\varepsilon_0\varepsilon}{4C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a^{5/2}}H_0^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon}\,r)\frac{\partial j_y^m}{\partial t'}\psi^*\left(\frac{t'-b}{a}\right)dt'dadb. \tag{11}$$

Проанализируем полученные выражения и введем некоторые обозначения.

$$W_{hy}(\vec{r},a,b)=\frac{i\varepsilon_0\varepsilon}{4C_\psi}H_0^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0}\,r)W_j(r,a,b);$$

$$H_y(\vec{r},t)=\frac{i\varepsilon_0\varepsilon}{4C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}H_0^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon}\,r)W_j(r,a,b)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\frac{dadb}{a^2}.$$

Здесь $W_j(r,a,b)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial j_y^m}{\partial t'}\psi^*\left(\frac{t'-b}{a}\right)dt'$ – это выражение может быть найдено в явном виде для конкретной функции вейвлета при известной плотности тока.

Найдем выражение для поля источника, расположенного в произвольной точке пространства с радиус-вектором r_0 (рис. 2).

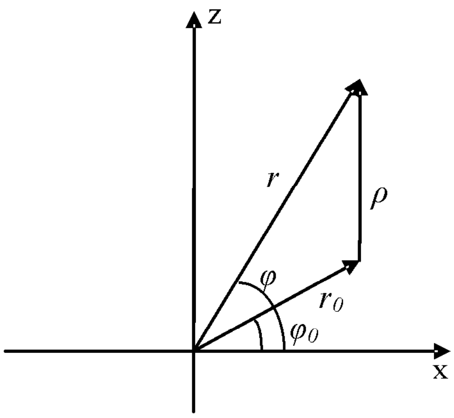

Рис. 2. Изменение геометрии

Воспользовавшись теоремой сложения для цилиндрических функций, получим

$$H_0^{(1)}(\rho)=\begin{cases}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}H_n^{(1)}(r)J_n(r_0)e^{in(\varphi-\varphi_0)}, r\ge r_0\\ \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}H_n^{(1)}(r_0)J_n(r)e^{in(\varphi-\varphi_0)}.\end{cases} \qquad (12)$$

С учетом данного выражения уравнения для магнитной компоненты решения уравнения (4) примут вид

$$H_y(\vec{r},t)=$$
$$=\frac{i\varepsilon_0\varepsilon}{4C_\psi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in(\varphi-\varphi_0)}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{bmatrix}H_n^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon}r)J_n(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon}r_0)\\ H_n^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon}r_0)J_n(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon}r)\end{bmatrix}_{r\le r_0}^{r\ge r_0}W_j(r,a,b)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\frac{dadb}{a^2}. \qquad (13)$$

Воспользуемся записанными ранее уравнениями Максвелла для вертикальной поляризации для того, чтобы найти $E_r(\vec{r},t)$ и $E_\varphi(\vec{r},t)$. С использованием вейвлет-преобразования выражения для электрических компонент будут иметь следующий вид:

$$E_r(r,t)=\frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}W_{Er}(r,a,b)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\frac{dadb}{a^2};$$
$$E_\varphi(r,t)=\frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}W_{E\varphi}(r,a,b)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\frac{dadb}{a^2}. \qquad (14)$$

Введем обозначения

$$W_{hy}^n(r,a,b)=e^{in(\varphi-\varphi_0)}\begin{bmatrix}H_n^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon}\,r)J_n(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon}\,r_0)\\ H_n^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon}\,r_0)J_n(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon}\,r)\end{bmatrix}.$$

Тогда, воспользовавшись выражениями (2), получим соотношения для спектральных плотностей электрических компонент поля

$$-\frac{1}{r}\frac{i\varepsilon_0\varepsilon}{4}\frac{\partial W_{hy}^n}{\partial\varphi}=$$
$$=\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{4}\frac{n}{r}e^{in(\varphi-\varphi_0)}\begin{bmatrix}H_n^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon}\,r)J_n(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon}\,r_0);r\ge r_0\\ H_n^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon}\,r_0)J_n(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon}\,r);r\le r_0\end{bmatrix}=$$
$$=\varepsilon_0\varepsilon W_{Er}^n\psi'\left(\frac{t-b}{a}\right);$$

$$W_{Er}^n(r,a,b)=$$
$$=\frac{n}{r\psi'\left(\frac{t-b}{a}\right)}W_{hy}^n=\frac{ne^{in(\varphi-\varphi_0)}}{4r\psi'\left(\frac{t-b}{a}\right)}\begin{bmatrix}H_n^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon}\,r)J_n(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon}\,r_0);r\ge r_0\\ H_n^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon}\,r_0)J_n(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon}\,r);r\le r_0\end{bmatrix}; \qquad (15)$$

$$\frac{i\varepsilon_0\varepsilon}{4}\frac{\partial W_{hy}^n}{\partial r}=$$
$$=\frac{i\varepsilon_0\varepsilon}{4}e^{in(\varphi-\varphi_0)}\begin{bmatrix}H_n^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon}\,r)J_n(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon}\,r_0);r\ge r_0\\ H_n^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon}\,r_0)J_n(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon}\,r);r\le r_0\end{bmatrix}=\varepsilon_0\varepsilon W_{e\varphi}^n\psi'\left(\frac{t-b}{a}\right);$$
$$W_{e\varphi}^n(r,a,b)= \qquad (16)$$
$$=\frac{ie^{in(\varphi-\varphi_0)}}{4\psi'\left(\frac{t-b}{a}\right)}\frac{\partial W_{hy}^n}{\partial r}=\frac{ie^{in(\varphi-\varphi_0)}}{4\psi'\left(\frac{t-b}{a}\right)}\begin{bmatrix}\dot{H}_n^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon}\,r)J_n(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon}\,r_0);r\ge r_0\\ H_n^{(1)}(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon}\,r_0)\dot{J}_n(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon}\,r);r\le r_0\end{bmatrix}.$$

Итоговые соотношения для всех компонент электромагнитного поля в этом случае примут следующий вид:

$$H_y(\vec{r},t)=\frac{i\varepsilon_0\varepsilon}{4C_\psi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W_{hy}^n(r,a,b)W_j(r,a,b)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\frac{dadb}{a^2};$$
$$E_r(\vec{r},t)=\frac{1}{C_\psi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W_{er}^n(r,a,b)W_j(r,a,b)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\frac{dadb}{a^2}; \qquad (17)$$
$$E_\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{C_\psi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W_{e\varphi}^n(r,a,b)W_j(r,a,b)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\frac{dadb}{a^2}.$$

Итак, в результате решения задачи излучения с использованием вейвлет-преобразования получены выражения для компонент электрического и магнитного поля излучения от импульсного нитевидного источника для вертикальной поляризации поля.

Литература

1. Марков Г.Т. Возбуждение электромагнитных волн / Г.Т. Марков, А.Ф. Чаплин. – М. ; Л., 1967.

2. Зацепин П.М. Дифракция плоской электромагнитной волны на импедансной ленте / П.М. Зацепин, С.А. Комаров // РЭ. – 1996. – Т. 41. – №8.

3. Габриэльян Д.Д. Возбуждение импедансной поверхности цилиндра продольным электрическим диполем /Д.Д. Габриэльян, М.Ю. Звездина, П.И. Костенко // Журнал радиоэлектроники. – 2000. – №6.